Vladimír Štefl

Viriálová věta v astrofyzice

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 25 (1980), No. 6, 348--351

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138182`

Viriálová věta v astrofyzice

Vladimír Štefl, Brno

Článek se zabývá užitím viriálové věty v astrofyzice, kde její význam pro teorii stability hvězdných soustav (hvězdokup a kup galaxií) a pro teorii vnitřní stavby a vývoje hvězd spočívá v tom, že umožňuje stanovit závislost mezi potenciální energií a kinetickou energií hvězd vytvářejících hvězdné soustavy, respektive mezi gravitační potenciální energií hvězdy a kinetickou energií tepelného pohybu všech částic – atomů a atomových jader tvořících soustavu – hvězdu. Použití viriálové věty dává možnost jednoduchým způsobem, jak bude ještě uvedeno, určit například celkovou hmotnost gravitačně vázaných hvězdných soustav, která je jejich důležitým fyzikálním parametrem.

1. Odvození viriálové věty

Úvodem je třeba zdůraznit, že viriálová věta má statistický charakter – vztahuje se pouze ke středním hodnotám veličin za velmi dlouhé periody času. Odvození viriálové věty lze provést zkráceně podle [1] tímto způsobem:

Pro soustavu hmotných bodů, určených polohovými vekotry $\boldsymbol{r}_i$ na které působí síly $\boldsymbol{F}_i$ lze zavést veličinu $G = \sum_i \boldsymbol{p}_i \boldsymbol{r}_i$, kde $\boldsymbol{p}_i = m_i \boldsymbol{v}_i$ je hybnost.
Derivováním podle času obdržíme rovnici

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = \sum_i \dot{\boldsymbol{r}}_i \boldsymbol{p}_i + \sum_i \dot{\boldsymbol{p}}_i \boldsymbol{r}_i ,$$

kterou lze upravit na tvar

$$\frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} = 2W_k + \sum_i \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{r}_i .$$

Přechod ke středním hodnotám veličin v časovém intervalu τ lze vyjádřit integrací

$$\frac{1}{\tau}\int_0^\tau \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \equiv \left\langle \frac{\mathrm{d}G}{\mathrm{d}t} \right\rangle = 2\langle W_k \rangle + $$
$$+ \langle \sum_i \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{r}_i \rangle = \frac{1}{\tau}\,[G(\tau) - G(0)] .$$

Jestliže pohyb probíhá tak, že souřadnice a rychlosti všech bodů jsou během pohybu ohraničené, je $|G|$ rovněž ohraničená. Zvolíme-li časový interval τ dostatečně velký, konverguje výraz na pravé straně k nule. Pak platí

$$\langle W_k \rangle = -\tfrac{1}{2}\langle \boldsymbol{F}_i \boldsymbol{r}_i \rangle .$$

Tento vztah je obecnou formulací věty o viriálu. V případě centrálního silového pole, jehož síly mají potenciál, platí pro jednotlivou částici

$$\langle W_k \rangle = \tfrac{1}{2} \left\langle \frac{\partial W_p}{\partial r} \right\rangle r ,$$

kde W_p značí potenciální energii.

Pro potenciální energii ve tvaru

$$W_p = a \, . \, r^{n+1}$$

platí

$$\frac{\partial W_p}{\partial r} r = (n + 1)\, W_p$$

a viriálová věta nabývá tvar

$$\langle W_k \rangle = \frac{n+1}{2} \langle W_p \rangle .$$

Pro soustavy, kterými se zabýváme v článku, jsou dominující síly gravitační, působící v závislosti $F \sim r^{-2}$; index n je roven -2 a viriálová věta má tvar

$$\langle W_k \rangle = -\tfrac{1}{2} \langle W_p \rangle .$$

Tedy celková kinetická energie soustavy je rovna polovině záporně vzaté celkové potenciální energie soustavy.

2. Hvězdy

Hvězdy (kulově symetrické) nacházející se v stacionárním stavu si můžeme představit jako plynné koule v rovnovážném stavu. Plynná koule se skládá z velkého počtu atomů, iontů a elektronů, svými vlastnostmi se vysoce blíží vlastnostem ideálního plynu. Všechny částice se přitahují jedna k druhé podle zákona všeobecné gravitace. Pro každou dvojici částic je přitažlivá síla velmi malá, ale velký počet částic (například počet částic v Slunci je vyjádřen číslem 10^{56}) způsobuje, že výsledná síla vzájemné přitažlivosti je dostatečně velká, aby udržela všechny částice plynné koule pohromadě. Bez vnitřních zdrojů energie se hvězda vlivem gravitace smršťuje a zahřívá, přičemž část tepla uniká vyzařováním. Při zapálení termonukleárních reakcí získává hvězda vnitřní zdroje energie a vytváří se rovnováha mezi tlakovou silou a gravitační silou; ztráty vnitřní energie vyzařováním jsou nahrazovány energií produkovanou termonukleárními reakcemi.

Z viriálové věty vyplývá, že pro libovolnou hvězdu je její gravitační potenciální energie W_p záporná a absolutní hodnota $|W_p|$ je dvakrát větší než celková kinetická energie W_k tepelného pohybu všech částic tvořících hvězdu, tj. vnitřní energie hvězdy

$$W_p = -2W_k . \tag{1}$$

Celková energie hvězdy je

$$W = W_p + W_k . \tag{2}$$

Z rovnic (1), (2) vyplývá, že

$$W = -W_k = \tfrac{1}{2} W_p . \tag{3}$$

Celková energie hvězdy je tedy záporná a je rovna polovině gravitační potenciální energie s opačným znaménkem nebo je rovna záporné kinetické energii tepelného pohybu všech částic hvězdy.

Po vyčerpání termonukleárních zdrojů energie se musí hodnota celkové energie hvězdy W zmenšovat, se zmenšováním W se zvětšuje W_k a zmenšuje W_p, což odpovídá smršťování hvězdy. Absolutní hodnota $|W_p|$ však roste, to znamená, že vzrůstá gravitační interakce částic plynu, což může probíhat pouze při smršťování hvězdy. Gravitační potenciální energie W_p uvolňovaná smršťováním nejen vyrovnává ztráty energie z povrchu hvězdy, ale dochází ještě v důsledku růstu W_k k zahřívání hvězdy a růstu její teploty. Proto se hvězda v procesu vyzařování energie smršťuje a zahřívá.

Tento paradoxní závěr potvrzuje vztah pro zářivý výkon hvězdy L odvozený z rovnice (3) derivováním rovnice podle času

$$L = -\frac{\mathrm{d}W}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}W_k}{\mathrm{d}t} .$$

3. Hvězdné soustavy

Hvězdnými soustavami rozumíme soustavy mnoha hvězd (hvězda = částice), které jsou tvořeny jednotlivými hvězdami nebo skupinami hvězd. Každá hvězda hvězdné soustavy (hvězdokupy, galaxie) se pohybuje v celkovém gravitačním poli hvězd ostatních a současně se podílí na vytváření tohoto celkového gravitačního pole soustavy. Hvězdy se pohybují ve hvězdných soustavách po drahách kruhových a eliptických. Pro převládající většinu hvězd jsou dráhy uzavřené a při svých pohybech hvězdy zůstávají v prostorové oblasti určitého konečného objemu. Popis pohybu hvězd se vzhledem k jejich velkému počtu provádí statistickými metodami.

Hvězdné soustavy jsou gravitační soustavy, jsou podřízeny gravitačním silám, které pozvolna klesají se vzdáleností. V důsledku toho potenciálová jáma, ve které se pohybuje jednotlivá hvězda, není určována gravitačním polem nejbližších hvězd, ale především celkovým výsledným gravitačním polem všech hvězd soustavy, které se mohou nacházet ve velkých vzdálenostech od zkoumané hvězdy. Gravitační pole všech těchto vzdálených hvězd se sčítají a jejich náhodné změny, spojené s přemísťováním hvězd, jsou téměř kompenzovány stabilností vzniklého stavu soustavy. U většiny reálných hvězdných soustav se celkové gravitační pole vyznačuje vysokým stupněm pravidelnosti v prostoru a stacionárnosti v čase. Analogické závěry jako pro soustavy vytvářené hvězdami platí pro soustavy tvořené galaxiemi (kupy galaxií), kde za částice (členy) soustavy považujeme jednotlivé galaxie.

Gravitační soustavy, jako všechny mechanické soustavy, charakterizujeme velikostí mechanické energie, která se skládá z potenciální a kinetické energie pohybujících se hvězd. V gravitačně vázaných soustavách je celková mechanická energie záporná (v opačném případě by soustavy nebyly stabilní) a pro střední hodnoty potenciální a kinetické energie soustav za velmi dlouhé časové intervaly platí tedy viriálová věta.

Její použití umožňuje nalézt vztahy mezi parametry hvězdných soustav (R je poloměr, M hmotnost a $\langle v^2 \rangle$ je střední hodnota čtverce rychlosti členů soustavy vzhledem k inerciálnímu systému spojenému s hmotným středem soustavy). Vzhledem k vzájemné závislosti mezi výše uvedenými parametry se viriálové věty užívá ke studiu problémů stálosti hvězdných soustav a k určování hmotnosti těchto soustav.

Viriálová věta platí pro střední hodnoty kinetické a potenciální energie, respektive střední hodnoty parametrů hvězdných soustav, a to za velmi dlouhé časové intervaly. Pozorování však dávají okamžité hodnoty těchto parametrů. Rozdíl středních a okamžitých hodnot parametrů je však tím menší, čím větší je počet členů v soustavě, poněvadž tím pomaleji se mění hodnoty parametrů a při velkém počtu členů soustavy lze ukázaný rozdíl zanedbat.

3.1. Otevřené hvězdokupy

Otevřené hvězdokupy jsou gravitačně vázané hvězdné soustavy, tvořené obvykle několika stovkami až tisíci hvězd. V případě, že hvězdokupa je soustavou stabilní, je celková mechanická energie hvězdokupy záporná

$$W_k + W_p < 0\,.$$

Pak platí viriálová věta, jejíž aplikace umožňuje určit velikost únikové rychlosti hvězd z hvězdokupy a celkovou hmotnost hvězdokupy.

Kinetická energie otevřené hvězdokupy je dána vztahem $W_k = \frac{1}{2}M\langle v^2 \rangle$, potenciální energie lze vyjádřit vztahem $W_p = -\frac{1}{2}\varkappa M^2/R$, kde R je tzv. efektivní poloměr, který je přibližně roven poloměru hvězdokupy. Podle viriálové věty platí

$$\frac{1}{2}M\langle v^2\rangle = \frac{1}{4}\frac{\varkappa M^2}{R}\,. \tag{4}$$

Odtud vyplývá podmínka pro střední kvadratickou rychlost pohybu hvězd, jestliže má být hvězdokupa stabilní soustavou

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = \sqrt{\frac{1}{2}\frac{\varkappa M}{R}}\,. \tag{5}$$

Vyjádříme-li celkovou hmotnost hvězdokupy M v jednotkách hmotnosti Slunce ($M_S = 1{,}99\,.\,10^{30}$ kg) a poloměr hvězdokupy v jednotkách parsek (1 pc = 3,08 . . 10^{16} m), pak je maximální možná rychlost hvězdy, při které ještě zůstává v hvězdokupě, vyjádřena z rovnice (5) podle [2], [3] ve tvaru

$$\sqrt{\langle v^2\rangle} = 0{,}0463\sqrt{\frac{M}{R}}\quad [\mathrm{km\,s^{-1}}]\,.$$

Podle zákona rozdělení rychlostí existují hvězdy s rychlostmi menšími i většími, než je střední rychlost. Jestliže velikost rychlosti pohybu hvězdy překročí velikost maximální rychlosti, pak může hvězda opustit gravitační pole hvězdokupy a tímto procesem hvězdokupy ztrácejí velmi pomalu hvězdy.

Úpravou rovnice (4) obdržíme vztah pro celkovou hmotnost hvězdokupy

$$M = 2R\frac{\langle v^2\rangle}{\varkappa}\,, \tag{6}$$

kterou lze určit z observačně určených hodnot parametrů R a $\langle v^2\rangle$. Pro názornou představu uvádíme tento příklad: Ve vymezené oblasti prostoru hvězdokupy o poloměru R = 5 pc je střední rychlost pohybu hvězd vzhledem k inerciálnímu systému spojenému s hmotným středem hvězdokupy = 2 km $\mathrm{s^{-1}}$. Celková hmotnost hvězdokupy určená z rovnice (6) je přibližně 10 000 M_S.

3.2. Kupy galaxií

Také kupy galaxií tvoří gravitačně vázané hvězdné soustavy. Jestliže je kupa galaxií soustavou stabilní, platí pro ni viriálová věta. Pro hodnoty kinetické a potenciální energie platí obdobné vztahy jako u otevřených hvězdokup a proto zůstávají v platnosti rovnice (4), (6). Celková hmotnost kupy galaxií, určená z rovnice (6) dosazením observačně určených hodnot parametrů R a $\langle v^2\rangle$, se nazývá viriálová hmotnost kupy galaxií.

Pro názornou představu uvádíme údaje pro kupu galaxií v souhvězdí Coma Berenices podle [2]. Ve vymezené oblasti prostoru o poloměru $R = 5{,}2\,.\,10^5$ pc, která obsahuje 670 pozorovatelných galaxií, je střední rychlost těchto galaxií vzhledem k inerciálnímu systému spojenému s hmotným středem kupy galaxií 1050 km $\mathrm{s^{-1}}$. Z těchto hodnot určená viriálová hmotnost kupy galaxií je přibližně $2\,.\,10^{14}\,M_S$.

Srovnáním hmotností určených pomocí viriálové věty s hmotnostmi určenými jinými metodami (např. z poměru M/L) bylo zjištěno, že viriálová hmotnost kupy galaxií, a tedy i hmotnost jednotlivých galaxií, je téměř vždy větší než hmotnost určená jinými metodami. Tento tzv. viriálový paradox je vysvětlován principiálně dvěma základními teoriemi [4]. Buď kupy galaxií nejsou stacionárními soustavami, takže se na ně nevztahuje viriálová věta, anebo jestliže jsou stacionárními soustavami, pak existuje v kupách galaxií skrytá hmota neprojevující se zářením. Ve prospěch druhé teorie je uváděna řada fakt např. v [5].

Poznámka: Zařazení viriálové věty do obsahu učiva volitelného přírodovědného přírodovědného semináře „Fyzika vesmíru" ve IV. ročníku gymnázia dává možnost fyzikálním způsobem objasnit