Hilbert & Schmidt

aneb

O jednom mezníku v historii matematiky

Albrecht Pietsch, Jena

Úvod překladatele

V roce 1984 začalo nakladatelství Teubner v Lipsku vydávat řadu Teubner-Archiv zur Mathematik, *v níž čtenáře seznamovalo s pracemi významných německých matematiků, působících v druhé polovině devatenáctého a na počátku dvacátého století. Šlo především o přetisky (faksimile) či přepisy důležitých článků nebo (univerzitních) přednášek, doprovázených zasvěcenými komentáři.*

Jedenáctý svazek uvedené řady vyšel v roce 1989. Nesl název Integrální rovnice a rovnice o nekonečně mnoha neznámých *a obsahoval některé z prací, které v letech 1904 až 1910 publikovali David Hilbert a jeho žák Erhard Schmidt. Svazek uspořádal Albrecht Pietsch, který také napsal závěrečný doslov. Informace o dalších svazcích uvedené řady najde čtenář na 3. straně obálky tohoto čísla.*

D. Hilberta a E. Schmidta jistě není třeba našim čtenářům představovat. Práce, které v uvedené periodě vytvořili, představují nepochybně mezník v historii lineární funkcionální analýzy. Zde chceme čtenáře seznámit s Pietschovým doslovem, který výrazně přesahuje rámec toho, co bychom od „pouhého doslovu" očekávali. Autor doslovu nejen že hodnotí uvedené práce, ale dívá se na celou problematiku z podstatně širšího hlediska, seznamuje nás s různými zajímavými dobovými souvislostmi a navíc také ukazuje, jaký vliv měly klasické *výsledky a metody na rozvoj* moderní *teorie. Není tedy jen jistým modernějším a přístupnějším převyprávěním „starých" textů, ale říká nám také, „co bylo dál". A proto ho také chceme přiblížit touto formou.*

A. K.

Shrnutí rozhodujících prací DAVIDA HILBERTA a jeho žáka ERHARDA SCHMIDTA, které na téma „Lineární integrální rovnice a rovnice o nekonečně mnoha neznámých" uveřejnili v letech 1904 až 1910, je lákavé především tím, že jde o setkání dvou osobností, které reprezentují dvě zcela rozdílná pojetí matematického výzkumu.[1])

[1]) Následující hodnocení Hilbertova pracovního stylu se týká výhradně jeho publikace „Grundzüge". U jeho díla „Grundlagen der Geometrie" (1899) bychom asi došli ke zcela jinému závěru.

ALBRECHT PIETSCH: *Nachwort* (zum Band *D. Hilbert – E. Schmidt, Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten. Teubner-Archiv zur Mathematik, Bd. 11, 1989.*)

Přeložil ALOIS KUFNER.

Otištěno s laskavým svolením nakladatelství Teubner.

Jedno stanovisko je charakterizováno tím, že se soustřeďuje především na výsledky a jen málo si cení „uhlazených“ teorií a elegantních metod. Podle zásady „Účel světí prostředky“ je jako matematický nástroj povoleno i „páčidlo“ a o zjednodušení původních důkazů se nepokoušíme. Takový přístup má své oprávnění, pokud skutečně jde o objevování nových světadílů. Kromě toho má myšlenkami sršící genius nepopíratelné právo věnovat se novým problémům, jakmile bylo nalezeno řešení problémů starých. Hilbertovým „páčidlem“ je se vší důsledností provedený limitní přechod $n \to \infty$, který od známých tvrzení n-rozměrné lineární a bilineární algebry vedl k příslušným výsledkům o integrálních rovnicích a rovnicích s nekonečně mnoha neznámými.[2])

Opačné (a doplňující!) stanovisko je založeno na zjištění, že matematika má i nepostradatelnou estetickou složku. Teorii lze proto považovat za uzavřenou teprve tehdy, byly-li nalezeny takové pojmy a metody, které umožňují její jednoduchou a přirozenou výstavbu. Výjimky potvrzují pravidlo! K důležitým úkolům tedy patří kultivace nově objevených oblastí a zakládání pohodlných silnic a cest k nejvýraznějším bodům nové krajiny. ERHARD SCHMIDT se ve své nástupní řeči jako člen Pruské akademie věd přihlásil jednoznačně k druhému pojetí. Jistě měl na mysli svého slavného učitele, když formuloval tato slova:

> „Maje na paměti velké potíže, které jsem měl při četbě matematických pojednání, jsem vůbec vždycky věnoval velké úsilí zjednodušení důkazů. Přitom si ihned všimnete dvou způsobů, jak vést důkaz. Buď se vydáte k cíli přímo — houštinami i močály, cestou necestou. Má to tu výhodu, že máte cíl stále před očima a že vcelku dodržujete nejpřímější linii, zatímco v detailech se cesta často stává nepřehlednou a musíte skákat sem a tam. Nebo se vydáte oklikou po pohodlné silnici. Přitom ztratíte z očí cíl, který se před vámi objeví často překvapivě teprve v posledním okamžiku za zatáčkou; zato však snadno přehlédnete kus cesty ležící za vámi a před vámi a potěšíte se tak mnohým pěkným výhledem.“

Po vyjití „Základů geometrie“ (Grundlagen der Geometrie) u Teubnera (1899) a po slavné přednášce „O matematických problémech“ na Mezinárodním kongresu matematiků v Paříži (1900) se HILBERT zabýval otázkami variačního počtu. Zvláštní roli přitom hrál Dirichletův princip. Konečný cíl viděl HILBERT v jisté axiomatice analýzy.[3]) Pro uskutečnění tohoto záměru byla velmi důležitá přednáška, kterou měl v Göttingenu na jaře roku 1901 HOLMGREN. Švédský matematik tam referoval

[2]) BLUMENTHAL (1935, str. 412): „Z našeho hlediska nám rozvoje připadají poněkud neohrabané, když je srovnáme třeba se stručností a elegancí důkazů E. SCHMIDTA.“

WEYL (1944, str. 647): „HILBERTŮV postup přes limitní přechody je pracný“.

HEUSER (1986, str. 626): „Čtvrté sdělení je skrz naskrz klasická analýza. V hrdinském úsilí vymačká z *passagio dal discontinuo al continuo* vše, co může vydat — a tím z něj vysaje život. Výsledky tohoto sdělení uvedly do pohybu funkcionálně-analytický balvan, metody tohoto sdělení byly pod ním pohřbeny.“

[3]) K tomu konstatoval BLUMENTHAL (1935, str. 408): „Zdá se mi, že i pro tato bádání si HILBERT už předem vytýčil axiomatický program.“

Srv. též konec čtvrtého oddílu tohoto doslovu.

o teorii determinantů pro integrální rovnice, kterou krátce předtím rozvinul jeho krajan FREDHOLM.[4]) BLUMENTHAL (1935, str. 410) k tomu poznamenává:

> „Tento den byl rozhodující pro dlouhé období v HILBERTOVĚ životě a pro podstatnou část jeho věhlasu. Lze si klást otázku, zda by byl dokázal dát variačním metodám tolik pružnosti a síly, aby ony samy mohly proniknout celou analýzu a stát se jejím základem. On se o to nepokusil, nýbrž vzplanul pro nový objev a v jeho propojení s variačními principy našel svůj cíl.“

Výsledky své výzkumné činnosti v letech 1901 až 1910 vyložil DAVID HILBERT v sérii sdělení, která byla pod názvem

„Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen“

zveřejněna ve Zprávách Královské společnosti věd v Göttingenu, třída matematicko-fyzikální:

1. sdělení, ročník 1904, str. 41–49, předloženo 5. března 1904,
2. sdělení, ročník 1904, str. 213–259, předloženo 25. června 1904,
3. sdělení, ročník 1905, str. 307–338, předloženo 22. července 1905,
4. sdělení, ročník 1906, str. 157–227, předloženo 3. března 1906,
5. sdělení, ročník 1906, str. 439–480, předloženo 28. července 1906,
6. sdělení, ročník 1910, str. 355–417, předloženo 17. července 1909,

Obsah, ročník 1910, str. 595–618, předloženo 2. května 1910.

Monografie, která tato sdělení v téměř nezměněné podobě shrnuje, vyšla v roce 1912 v nakladatelství B. G. Teubnera (dotisk 1924; přetisk v nakladatelství Chelsea, New York 1953).

Tehdy by vlastně bylo docela namístě publikaci „Grundzüge“ zcela přepracovat s přihlédnutím k novým, mezitím získaným poznatkům.[5]) HILBERT to však neudělal a v předmluvě (z června 1912) se spokojil s touto poznámkou:

> „Teorie obsažená v těchto sděleních byla mezitím mými žáky a dalšími mladšími matematiky doplněna o cenné výsledky a v podstatných bodech dále rozvedena. Upouštím od všech speciálních údajů, týkajících se literatury, která na moje sdělení navazuje.“

Nejjednodušším vysvětlením pro toto hříšné opomenutí je asi skutečnost, že HILBERTA v té době už nezajímaly integrální rovnice, nýbrž problémy matematické fyziky. Ale možná mu šlo také o to reprodukovat svůj přístup v „nefalšované podobě“.

Z hlediska formulace problému lze Hilbertova sdělení rozdělit do dvou skupin. Zatímco v prvním, čtvrtém a pátém jsou budovány základy nové teorie, jsou druhé, třetí a šesté sdělení věnována nejrůznějším aplikacím. V tomto díle řady „Teubner-Archiv zur Mathematik“ jsou znovu vydány teoreticky orientované příspěvky, neboť mají velmi výrazný význam pro vznik funkcionální analýzy. Abychom přesto podali uzavřený obraz o celkovém HILBERTOVĚ díle v této oblasti, dodali jsme alespoň Obsah, který jako závěr svých výzkumů zveřejnil v roce 1910. Jako důležitý doplněk k tomu

---

[4]) FREDHOLM (1900).

[5]) Šlo zde především o Schmidtův přístup a o Rieszovu–Fischerovu větu.

přistupuje programová přednáška, kterou chtěl HILBERT proslovit na Mezinárodním kongresu matematiků v Římě (1908):

> Podstata a cíl analýzy nekonečně mnoha nezávislých proměnných (německy: Wesen und Ziel einer Analysis der unendlichvielen unabhängigen Variablen). Rendiconti Circ. Matem. Palermo *27* (1909), 59–74.

Dne 29. června 1905 uzavřel ERHARD SCHMIDT své promoční řízení na göttingenské univerzitě ústní zkouškou. K tomu předložil inaugurální disertaci, která obsahovala velmi elegantní přístup k výsledkům, jež HILBERT publikoval ve svém prvním sdělení. Jako pokračování v těchto úspěšných výzkumech vznikla v následující době řada prací pod společným názvem „K teorii lineárních a nelineárních integrálních rovnic“, které vyšly v časopise „Mathematische Annalen“:

1. část: Rozvoj libovolných funkcí podle systémů zadaných (německy: Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener), *63* (1907), 433-476,[6])

2. část: Vyřešení obecné lineární integrální rovnice (německy: Auflösung der allgemeinen linearen Integralgleichung), *64* (1907), 161–174,

3. část: O vyřešení nelineární integrální rovnice a o větvení jejích řešení (německy: Über die Auflösung der nichtlinearen Integralgleichung und die Verzweigung ihrer Lösungen), *65* (1908), 370–399.

Protože tento díl řady „Teubner-Archiv zur Mathematik“ je věnován především lineární teorii, zařadili jsme sem jen obě první pojednání. Dále k tomu přistupuje ještě mimořádně důležitý článek

> O vyřešení lineárních rovnic s nekonečně mnoha neznámými (německy: Über die Auflösung linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten), Rendiconti Circ. Matem. Palermo *25* (1908), 53–77,

který lze vlastně považovat za rodný list Hilbertova prostoru posloupností.

Existuje již velké množství příspěvků, popisujících a oceňujících výkony HILBERTA a SCHMIDTA v oblasti lineárních integrálních rovnic a rovnic o nekonečně mnoha neznámých. Tato řada začíná klasickým encyklopedickým článkem HELLINGERA a TOEPLITZE (1927). Následuje pojednání, které HELLINGER (1935) věnoval výhradně dílu Hilbertovu. Přistupují k tomu i nekrology od SCHMIDTA (1943) a WEYLA (1944). Dále je třeba vyzdvihnout obě knihy MONNY (1973) a DIEUDONNÉHO (1981) o historii funkcionální analýzy, jakož i historický dodatek k HEUSEROVĚ učebnici (1986). Uvádíme i příslušné kapitoly ze Základů dějin matematiky od BOURBAKIHO (1971). A konečně odkazujeme ještě na následující autory, kteří se ve svých článcích rovněž dotkli vlivu HILBERTA a SCHMIDTA na formování funkcionální analýzy:
BERNKOPF (1966, 1968), STEEN (1973), SIEGMUND-SCHULTZE (1982, 1986), TAYLOR (1982, 1985), BIRKHOFF a KREYSZIG (1984).

Cílem tohoto doslovu proto nemůže být doplnění již existujících příspěvků dalším, podobným, či dokonce jakési shrnutí. Naopak, omezil jsem se zde na to, pojednat o historii vzniku několika ústředních pojmů a vět a sledovat jejich další vývoj až

---

[6]) To je v podstatě inaugurální disertace.

do současnosti. Volba přitom byla přirozeně ve velké míře určena mými osobními matematickými zájmy.

Když nyní v dalším ukážeme, že se sice prosadily HILBERTOVY výsledky, nikoli však jeho metody a jeho způsob myšlení, neznamená to v žádném případě nějakou kritiku. Jak dokazuje historie, prodělaly skoro všechny matematické teorie delší proces zrání, a i skutečným velikánům vědy se jen zřídkakdy podařilo vytvořit nejnovější pojmy hned na první pokus. Rozhodující je, že se cíle dosáhne spojenými silami — podle HILBERTOVA hesla:

Wir müssen wissen. Wir werden wissen.

1. Prostory a operátory

Poté, co WEYL (1909) měl v semináři přednášku o svém důkazu Rieszovy–Fischerovy věty, se ho prý HILBERT zeptal:

„Weyle, řekněte mi, prosím, co to je Hilbertův prostor? Já jsem tomu nerozuměl!“[7])

Třebaže tato epizoda asi není pravdivá, je alespoň dobře vymyšlená. HILBERTŮV zájem platil totiž jen zřídkakdy lineárnímu prostoru všech číselných posloupností $x = (\xi_i)$, pro něž konverguje řada utvořená z jejich čtverců, tedy prostoru, který dnes označujeme l_2.[8]) Omezoval se spíše na vyšetřování uzavřené jednotkové koule:

$$U_2 = \left\{ x \in l_2 : \sum_{i=1}^{\infty} |\xi_i|^2 \leqq 1 \right\}.$$

To bylo pro jeho účely zcela postačující, neboť lineární a kvadratické formy

$$L(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \alpha_i \xi_i \qquad \text{a} \qquad Q(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{\infty} \alpha_{ij} \xi_i \xi_j,$$

které vyšetřoval, se dají popsat dostatečně dobře už pomocí svého chování na U_2. Rozhodující výhodou však je, že na U_2 je konvergence po složkách totožná se slabou konvergencí a že tak U_2 je v této topologii kompaktní. Tím mohl HILBERT ve svém

---

[7]) YOUNG (1981, str. 312); srv. též TAYLOR (1982, str. 283).

[8]) Symbol L_2 — tehdy $[L^2]$ — zavedl už v roce 1910 RIESZ ve své práci o soustavách integrovatelných funkcí a od té doby se běžně užívá. Naproti tomu se odpovídající označení pro Hilbertův prostor posloupností, které se — pokud vím — vyskytuje poprvé u BANACHA (1932, str. 12), prosazovalo jen velmi váhavě. V mezidobí se používalo následujících variant:

R_∞ (HELLINGER a TOEPLITZ 1927, str. 1434),
Ω (FRÉCHET 1928, str. 83),
F_z (VON NEUMANN 1932, str. 16),
H_0 (STONE 1932, str. 14),
σ_2 (KÖETHE a TOEPLITZ 1934, str. 193) a
H (SZ.-NAGY 1942, str. 1, srv. též str. 6).

4. sdělení (str. 200) vysvětlit pojem totální spojitosti pomocí tradičních pojmových prostředků.[9]) HILBERTOVO stanovisko převzal i SCHOENFLIES, když v roce 1908 poprvé zavedl označení „Hilbertův prostor".[10]) Ani on pod tímto označením nechápal celý prostor posloupností l_2, nýbrž jen jeho (otevřenou) kouli. Takovéto vytváření pojmů bylo pro topologa zcela přirozené.

Žádný vědec nemůže zapřít školu, která ho utvářela. Není proto divu, že HILBERT ctil „německé pojetí", zastupované WEIERSTRASSEM, KRONECKEREM a především FROBENIEM, totiž pojetí, že matice slouží především k definici bilineární formy. Násobení přitom odpovídá konvoluce (Faltung).[11]) To, že tato cesta vede nutně do slepé uličky, se nám objasní při pohledu na výraz

$$A(.,\bullet)\,O(.,x)\,O(\bullet,\circ)\,B(\star,\diamond)\,O(\star,\circ)\,O(\diamond,y),$$

který lze najít ve 4. sdělení na str. 181. Naštěstí mládež tuto překážku v krátké době překonala. Už v roce 1910 cítil HILBERT povinnost zmínit se ve svém Obsahu (str. 596) stručně o pojmu omezené lineární transformace, a v RIESZOVĚ monografii, která vyšla v roce 1913, lze najít kapitolu nadepsanou

> „Teorie lineárních substitucí o nekonečně mnoha proměnných" (francouzsky: La théorie des substitutions linéaires à une infinité de variables).

Tím opět nabylo svých práv „italské stanovisko", které zavedli na konci minulého století PEANO, PINCHERLE a VOLTERRA a které zastávali i HADAMARD a FREDHOLM.[12]) Příklad encyklopedického článku HELLINGERA a TOEPLITZE (1927) ovšem ukazuje, jak dlouho se mohou udržet překonané názory uznávaných učenců. Transformačně-teoretické pojetí, jež by práce s lineárními prostory nutně vyžadovala, tam hraje zcela podřadnou roli, a o nekonečněrozměrném Hilbertově prostoru je tam jen krátká zmínka.[13])

---

[9]) V moderní literatuře se lineární operátor, zobrazující jeden Banachův prostor na druhý, nazývá totálně spojitý, převádí-li každou slabě konvergentní posloupnost v posloupnost konvergující silně; RIESZ (1913, str. 96).

[10]) SCHOENFLIES (1908, str. 86, 266 a 298).

[11]) DIEUDONNÉ (1981, str. 113): „Bohužel se držel FROBENIA s jeho koncepcí ‚konvoluce' bilineárních forem (místo přirozené ideje ‚skládání' transformací)."

[12]) FREDHOLM (1903, str. 372): „Chápeme-li rovnici

$$\varphi(x)+\int_0^1 f(x,s)\varphi(s)\,\mathrm{d}s=\psi(x)$$

jakožto převod (transformaci) funkce $\varphi(x)$ v novou funkci $\psi(x)$, zapíši tuto rovnici jako

$$S_f\varphi(x)=\psi(x)$$

a řeknu, že transformace S_f je dána funkcí $f(x,y)$." Srv. též HEUSER (1986, str. 604–611) a MONNA (1973, str. 51 a 120).

[13]) Srv. str. 1434–1438.

Také v Göttingenu se již od roku 1907 začalo prosazovat poznání, že je výhodnější uvažovat celý prostor posloupností l_2. Tento vývoj podnítily SCHMIDTOVY geometrické úvahy.[14]) Jeho nejdůležitější výsledky lze shrnout do následujících bodů:

Množina komplexních číselných posloupností, jejichž čtverce tvoří konvergentní řadu, se chápe jako lineární prostor a je opatřena skalárním součinem, jakož i příslušnou normou.

Zavede se pojem silné konvergence a prokáže se úplnost prostoru l_2.

Na základě Studyho pojmu ortogonality se dokáže Pythagorova věta a Besselova nerovnost. Navíc se jasně zdůrazní velký význam procesu ortogonalizace, pocházející od dánského pojišťovacího matematika GRAMA (1883).

A konečně se ukáže, že ke každé „funkci“ $x \in l_2$ a k libovolné uzavřené lineární podmnožině M existuje vždy „perpendikulární funkce“ $P(x)$, určená jednoznačně podmínkami $P(x) \perp M$ a $x - P(x) \in M$. Přitom platí

$$\|P(x)\| = \min\{\|x - y\| : y \in M\}.$$

V úvodu ke SCHMIDTOVU článku v Rendiconti i v jeho názvu je jasně vyjádřeno, že autorovi záleželo především na teorii řešení lineárních rovnic, vyložené ve druhé kapitole. Z našeho dnešního hlediska je však vlastní hodnota této práce v „pomocných geometrických úvahách“, jimiž nabyl Hilbertův prostor posloupností l_2 definitivně svých občanských práv v matematice.

Jak to ale vypadalo s Hilbertovým prostorem funkcí L_2? Pohlížeje zpět, konstatuje WEYL (1944, str. 649):

> „Domnívám se, že HILBERT se moudře držel v mezích spojitých funkcí, když nebylo právě nutné zavést Lebesgueův obecný pojem.“

To je v rozporu s poznámkou HELLINGERA a TOEPLITZE (1927, str. 1366):

> „Celkově lze říci, že rozhodujícím momentem se ukázalo to, že byl správně vymezen obor funkcí, s nímž se pracuje.“

A konečně činí DIEUDONNÉ (1981, str. 119–120) dokonce tuto drastickou poznámku:

> „Když se FREDHOLM a SCHMIDT snažili rozšířit dosah svých výsledků tím, že zeslabili předpoklady na jádro, neměli k dispozici nic kromě hrozného a neužitečného takzvaného Riemannova integrálu, a pokrok ve funkcionální analýze by asi byl podstatně menší, kdyby se šťastnou shodou okolností nebyl objevil pojem Lebesgueova integrálu právě na počátku HILBERTOVA díla o integrálních rovnicích.“

Především je třeba souhlasit s WEYLEM, že bylo výhodnější nezatěžovat popularizaci nově rozvinuté teorie integrálních rovnic použitím relativně ještě neznámého pojmu

[14]) SCHMIDT o tom přednášel 12. února 1907 v rámci Matematické společnosti v Göttingenu.

integrálu.[15]) Na druhé straně vedlo lpění na klasickém stylu práce se spojitými funkcemi k několika zbytečným komplikacím a rozhodujícím způsobem zamezilo pochopení obecných souvislostí.[16]) Ale i tento nedostatek Hilbertova přístupu byl brzy napraven. Na jaře roku 1907 pochopili RIESZ a FISCHER takřka současně, že prostor L_2 všech měřitelných a kvadraticky integrovatelných funkcí tvoří izomorfní protějšek prostoru posloupností l_2.[17]) Elegantnější důkaz pochází od FISCHERA, který dokázal úplnost prostoru L_2. Tím také bylo jasné, že konvergence v průměru, odvozená od normy

$$\|f\| = \left(\int_a^b |f(s)|^2 \, \mathrm{d}s\right)^{1/2},$$

je přirozenou konvergencí v L_2. Analogicky to platí i pro l_2. HILBERT velice váhal, které konvergenci by měl dát přednost. Ve 4. sdělení (str. 117 a 200) zavedl pojmy „spojitost" a „totální spojitost"; v 5. sdělení (str. 439) přešel k označení „omezeně spojitý" a „spojitý", které pak při souborném vydání díla „Grundzüge" (str. 174) opět stáhl.

Další etapa rozvoje funkcionální analýzy spočívala v tom, že RIESZ (1910 : a) zavedl prostory funkcí L_p s $1 < p < \infty$. O odpovídajících prostorech posloupností l_p pojednal v roce 1913 ve své monografii. Bylo to jistě velké zklamání, když selhal pokus zobecnit Rieszovu–Fischerovu větu na případ $p \neq 2$.[18]) Tento negativní výsledek však vedl k poznatku, že pro práci s prostory L_p jsou bezpodmínečně nutné „nesouřadnicové metody". Tím dozrál čas pro axiomatizaci teorie prostorů posloupností a prostorů funkcí.[19])

---

[15]) Göttingenští matematici si pravděpodobně teprve po Rieszově přednášce dne 26. února 1907 jasně uvědomili, že integrál zavedený LEBESGUEM (1902) by mohl mít pro jejich výzkum zásadní význam. Viz též pozn. pod čarou [17]).

[16]) Srv. poznámky v druhé části tohoto doslovu, str. 76.

[17]) Historie Rieszovy–Fischerovy věty je dramatická. Dodatkem ke krátkému článku z roku 1906 uveřejnil RIESZ dvě obsahově stejné práce, které byly předloženy 9. března 1907 Göttingenské akademii a 11. března 1907 Pařížské akademii věd. Ve své poznámce v časopise Comptes Rendus z 13. května 1907 FISCHER konstatuje: „Dne 11. března předložil M. RIESZ v Akademii poznámku o ortogonálních systémech funkcí. Já jsem došel ke stejnému výsledku a dokazoval jsem ho na přednášce, uspořádané Matematickou společností v Brně, již 5. března. I když nezávislost mého výsledku je zřejmá, prvenství publikace zůstává M. RIESZOVI." Nato považuje RIESZ za nutné poukázat v Comptes Rendus z 24. června 1907 na skutečnost, že o svých výsledcích přednášel již 26. února 1907 v Göttingenu. Vzhledem k těmto skutečnostem jde u následujícího citátu z YOUNGA (1981, str. 309) snad jen o jedovatou pověst: „Göttingen mu nikdy neodpustil jeho podíl (tím je míněn RIESZ, pozn. vydavatele) na Rieszově–Fischerově větě, publikované poté, co vyslechl seminární přednášku FISCHEROVU."
Srv. též BERNKOPF (1906, str. 48–54), BIRKHOFF a KREYSZIG (1984, str. 287), SIEGMUND-SCHULTZE (1982, str. 64) a TAYLOR (1982, str. 270–281).

[18]) Nicméně se došlo k Hausdorffově-Youngově větě, která se stala výchozím bodem mnoha zajímavých výzkumů. Srv. YOUNG (1912) a HAUSDORFF (1923).

[19]) RIESZ (1910 : a) poznamenal: „V předložené práci se předpoklad kvadratické integrovatelnosti nahrazuje předpokladem integrovatelnosti výrazu $|f(x)|^p$; . . . . Vyšetřování těchto tříd funkcí obzvláště osvětlí skutečné a zdánlivé výhody exponentu $p = 2$; a lze také tvrdit, že poskytne užitečný materiál pro axiomatické vyšetřování prostorů funkcí."

Zatímco RIESZOVI (1918) chyběla v jeho základní práci o lineárních funkcionálních rovnicích pravděpodobně jen odvaha k nekonvenční formulaci svých výsledků, podařil se BANACHOVI (1922), HAHNOVI (1922) a WIENEROVI (1922) nezávisle na sobě velký tah.[20] Rozhodujícím krokem bylo znovuobjevení lineárních prostorů, které zavedl již PEANO (1888) a které pak opět upadly do zapomenutí. Poté už bylo snadné definovat — na základě FRÉCHETOVÝCH (1906) myšlenek — takové pojmy jako norma, konvergence a úplnost v abstraktní formě. Konečným výsledkem byla jedna z nejdůležitějších struktur moderní matematiky — Banachův prostor.[21]

Při „správném plánování" by musel být jistě Hilbertův prostor axiomatizován dříve než prostor Banachův. Výzkum však jde (naštěstí!) svými vlastními cestami, a tak zavedl VON NEUMANN (1927, 1929) abstraktní Hilbertův prostor teprve o několik let později. Další kuriozitou bylo, že se přitom neodvolával ani na PEANA, ani na BANACHA, HAHNA nebo WIENERA, nýbrž převzal definici lineárního prostoru od WEYLA (1918).

Von Neumannův systém axiomů byl zvolen tak, že vznikl — v dnešní terminologii — separabilní nekonečněrozměrný Hilbertův prostor, určený až na izomorfismus jednoznačně. Neseparabilní Hilbertovy prostory zkoumali poprvé LÖWIG (1934) a RELLICH (1934).

Axiomatizace teorie Hilbertových a Banachových prostorů znamenala především přechod k „nesouřadnicovému" myšlení. S jakým váháním se tento krok uskutečnil, to lze poznat z toho, že ERHARD SCHMIDT prý vyzval koncem dvacátých let JOHANNA VON NEUMANNA:[22]

„Ne! Ne! Neříkejte operátor, říkejte matice!"

Také základní výzkum KÖTHEHO a TOEPLITZE (1934) k teorii dokonalých prostorů posloupností se orientoval zcela a plně podle klasického vzoru. Dokonce i slavný Banachův problém existence báze lze interpretovat jako pokorný pokus zavést přece jen opět souřadnice alespoň v separabilních Banachových prostorech.[23] To, jak důsledné však nakonec bylo vítězné tažení abstraktního pojetí, ukazuje skutečnost, že pěkná monografie WINTNEROVA (1929) se nedočkala pozornosti vlastně jen proto, že tam byla spektrální teorie vyložena ve staromódním jazyku matic.

Geometrie Hilbertových prostorů vybudovaná na SCHMIDTOVÝCH výsledcích je poměrně chudou teorií, neboť se ve vztahu k ortogonalitě nijak podstatně neliší od klasického konečněrozměrného případu. Geometrie Banachových prostorů se naproti tomu rozvinula od poloviny šedesátých let v samostatnou disciplínu, která má dalekosáhlé aplikace v nejrůznějších odvětvích matematiky.[24] Fundamentální výsledek

[20]) V této souvislosti je bezpodmínečně nutné poukázat na dílo HELLYHO, který už v roce 1921 zavedl pojem normovaného lineárního prostoru posloupností.

[21]) Označení „espace de Banach" zavedl FRÉCHET (1928, str. 141). BANACH sám hovoří ve své monografii (1932) o „espace du type (B)".

[22]) Převzato z BERNKOPFA (1968, str. 346), který se odvolává na rozhovor s FRIEDRICHSEM.

[23]) BANACH (1932, str. 111). Dnes díky ENFLOOVI (1973) víme, že to není vždy možné.

[24]) Srv. třeba přehledný článek PEŁCZYŃSKÉHO (1984).

finitní teorie představuje DVORETZKÉHO věta, která říká, že každý nekonečněrozměrný Banachův prostor obsahuje „skoroeuklidovské podprostory“ o libovolně velké konečné dimenzi.[25]) Pro ERHARDA SCHMIDTA by jistě bylo milým překvapením, kdyby se dozvěděl, že právě jeho výzkumy k izoperimetrickému problému, které představují druhou část jeho životního díla, jsou základem elegantního důkazu Dvoretzkého věty.[26])

HELLINGER a TOEPLITZ (1910) zjistili, že s nekonečnými maticemi, omezenými v Hilbertově smyslu, lze počítat stejně jako s konečnými maticemi. Dostaneme tak jistou nekomutativní algebru. K ní izomorfní algebru $\mathscr{L}(l_2)$, tvořenou všemi ohraničenými lineárními operátory v l_2, vyšetřoval RIESZ (1913). Šel však ještě o krok dále a zavedl stejnoměrnou topologii odvozenou z operátorové normy. Tím se z $\mathscr{L}(l_2)$ stala — v dnešním smyslu — Banachova algebra.

Pokud nás zajímají jen algebraické a metrické vlastnosti množiny $\mathscr{L}(l_2)$, nehraje žádnou roli, zda prvky chápeme jako matice, bilineární formy nebo operátory. Tím se nabízí možnost zobecnění, které se chopili GELFAND a NAJMARK (1943). Zavedli abstraktní pojem C^*-algebry.[27]) Protože každou takovou algebru lze realizovat jako uzavřenou podalgebru operátorové algebry vhodného Hilbertova prostoru, nedostáváme sice po obsahové stránce nic nového, ale metodické výhody jsou zřejmé. Už o něco dříve vytvořil GELFAND (1941) axiomatickou teorii obecných Banachových algeber. Vzniklo tak samostatné odvětví funkcionální analýzy, které poskytuje vhodný jazyk pro formulaci mnoha spektrálně-teoretických tvrzení. Své správné místo zde nachází i pojem rezolventy, zavedený HILBERTEM v jeho 4. sdělení (str. 174). Mimo jiné lze pro každou Banachovu algebru s jednotkovým prvkem I ukázat, že všechny prvky tvaru $I - T$ s $\|T\| < 1$ lze invertovat, přičemž platí

$$(I - T)^{-1} = I + T + T^2 + \dots .$$

I když elementární důkaz konvergence Neumannovy řady na pravé straně podal teprve HILB (1908), vyskytuje se již u DIXONA (1901), HILBERTA (4. sdělení, str. 185–186) a SCHMIDTA (2. část, str. 162–164).

2. Spektrální teorie samoadjungovaných operátorů

Nejpodstatnějším poznatkem, k němuž dospěl HILBERT při rozvíjení Fredholmovy teorie lineárních integrálních rovnic, bylo zjištění, že zvláště pěkné výsledky dostaneme, budeme-li předpokládat, že odpovídající spojité jádro je symetrické. Podařilo se mu zobecnit na nekonečněrozměrný případ metodu převedení konečné symetrické matice k hlavním osám, pocházející od EULERA, LAGRANGE, LAPLACE, CAUCHYHO

[25]) DVORETZKY (1961).

[26]) Aktuální podání lze nalézt v knize MILMANA a SCHECHTMANA (1986). Na str. 144 tam je citován SCHMIDT (1948, str. 84–85).

[27]) Občas se používá i označení B^*-algebra, srv. DUNFORD a SCHWARTZ (1963, str. 874). NAJMARK (1956, str. 240) hovořil o plně regulárních normovaných symetrických okruzích.

a SYLVESTERA. Přitom nevyužil limitního přechodu $n \to \infty$ jen jako vodítka pro nalezení správného přístupu, nýbrž ho dobudoval ve skutečnou metodu důkazu. Základní věta, obsažená v jeho 1. sdělení (str. 69–70), říká toto:

Ke každému symetrickému spojitému jádru $K(s,t)$ existuje konečný nebo spočetný systém navzájem ortogonálních a normovaných spojitých funkcí $\psi^{(i)}(s)$ tak, že pro všechny spojité funkce $f(s)$ a $g(t)$ platí vztah

$$\int_a^b \int_a^b K(s,t)f(s)g(t)\,\mathrm{d}s\,\mathrm{d}t = \sum_i \lambda^{(i)} \int_a^b \psi^{(i)}(s)f(s)\,\mathrm{d}s \int_a^b \psi^{(i)}(t)g(t)\,\mathrm{d}t.$$

Reálné koeficienty $\lambda^{(i)}$ jsou takzvané vlastní hodnoty, neboť platí

$$\int_a^b K(s,t)\psi^{(i)}(t)\,\mathrm{d}t = \lambda^{(i)}\psi^{(i)}(s).$$ [28])

V případě $K \neq 0$ dostáváme jako důsledek, že suma stojící na pravé straně předposlední formule nemůže být prázdná. Musí tedy existovat alespoň jedna vlastní hodnota. Tento postup je poněkud nezvyklý, neboť se z existence celé budovy usuzuje na existenci jednotlivých stavebních kamenů.

Už SCHMIDT postavil důkaz základní věty z hlavy na nohy. Vlastním klíčem se stává věta o existenci vlastních hodnot, kterou dokázal pomocí postupu pocházejícího od SCHWARZE (1885). Tato metoda se ovšem nedala zobecnit, protože se při ní používaly stopy iterovaných jader. Ve svém 4. sdělení (str. 201–203) pak HILBERT sám podal důkaz, který se v lehce modifikované podobě používá i dnes. Hodily se mu přitom zkušenosti, které nasbíral, když se zabýval Dirichletovým principem. Ukázal, že každá totálně spojitá kladně definitní kvadratická forma nabývá na slabě kompaktní jednotkové kouli U_2 svého maxima $\lambda > 0$ alespoň v jednom bodě x. Pro příslušný operátor T pak platí $Tx = \lambda x$ a ukazuje se, že λ je největší vlastní hodnota operátoru T. V následující době byla tato idea dotvořena COURANTEM (1920) ve známou větu o minimaxu.

Velká zásluha SCHMIDTOVA při budování spektrální teorie totálně spojitých symetrických operátorů spočívá v tom, že nahradil limitní přechod $n \to \infty$ přímým přístupem. Zatímco HILBERT potřeboval klasické převedení konečné symetrické matice k hlavním osám jako nepostradatelné východisko, byl tento postup u SCHMIDTA speciálním případem obecné teorie.

Jako nejdůležitější otázku své teorie lineárních integrálních rovnic formuloval HILBERT ve svém 5. sdělení (str. 455) tuto úlohu: Je třeba vyjasnit, která symetrická spojitá jádra mají úplný systém vlastních funkcí. Vlastní funkce se přitom předpokládají spojité. Není-li $\lambda = 0$ vlastní číslo, nepředstavuje tento požadavek žádné omezení, protože všechny kvadraticky integrovatelné vlastní funkce jsou automaticky spojité.

[28]) V tomto doslovu používáme dnes běžnou definici vlastní hodnoty operátoru T pomocí rovnice $Tx = \lambda x$ s $x \neq 0$. HILBERT používal převrácených hodnot. Toto pojetí má rovněž své výhody, neboť pak dostaneme vlastní hodnoty jako kořeny Fredholmova determinantu.

Proto se lze v tomto případě obejít bez použití Lebesgueova integrálu. Tato úvaha však selhává u vlastních funkcí příslušejících vlastnímu číslu $\lambda = 0$. Existují symetrická spojitá jádra $K(s,t)$, pro která má homogenní rovnice

$$\int_a^b K(s,t)f(t)\,dt = 0$$

sice netriviální kvadraticky integrovatelné řešení, ale kromě $f(t) = 0$ nemá žádné spojité řešení.[29]) I když jsou tato jádra ve smyslu 1. sdělení (str. 73) uzavřená, neplatí pro ně věta o rozvoji. Protože HILBERT používal ve svém 4. sdělení (str. 199) pro kvadratické formy „správné“ definice, vedlo to k velké nevýhodě, že při překládání jedné teorie do druhé neodpovídala uzavřená jádra uzavřeným formám.[30]) Celé dilema spočívá v nesprávné volbě výchozího prostoru funkcí.[31])

Zvláště je třeba zdůraznit skutečnost, že HILBERT provedl zobecněné převedení k hlavním osám nejen pro totálně spojité, ale dokonce pro omezené kvadratické formy. V tomto případě vzniká zcela jiná situace, neboť vedle konečné nebo nekonečné spočetné sumy, která odpovídá vlastním hodnotám, se zde objevuje ještě spojitá část. Poznatek, že tento jev lze popsat pomocí tehdy ještě málo používaného Stieltjesova integrálu, otevřel cestu zcela novému vývoji. Už RIESZ (1910: b) shrnul diskrétní a spojitý sčítanec do jednotného výrazu, který bývá označován jako spektrální rozklad (rozklad jednotky) nebo spektrální míra. K tomu potřeboval zjištění, HILBERTEM nevyslovené, že spektrální forma $\delta(\lambda)$ je pro každé reálné číslo tzv. „jednoforma“ (Einzelform).*) RIESZ překvapivě formuloval v 5. kapitole své monografie (1913) výsledky v jazyce kvadratických forem, když předtím ve 4. kapitole dal přednost lineárním operátorům. V době následující se pak jednoznačně prosadilo stanovisko teorie operátorů. Přitom se mimo jiné ukázalo, že „jednoformám“ odpovídají ortogonální projektory v l_2. Tato pěkná geometrická interpretace, za níž vděčíme VON NEUMANNOVI (1929), je implicitně obsažena již v pracích HILBERTA a SCHMIDTA.[32])

Poté, co WEYL (1944, str. 450–451) ve svém nekrologu o DAVIDU HILBERTOVI vyjmenoval mnohé aplikace spektrální teorie v matematice, pokračuje:

---

[29]) Srv. HELLINGER a TOEPLITZ (1927, str. 1524–1525).

[30]) 5. sdělení, str. 461.

[31]) Matoucí následky jsou patrné ještě dnes, jak např. ukazuje nesprávná věta na str. 118 v „Doplňujících kapitolách“ příručky BRONSTEIN/SEMENDJAJEV „Taschenbuch der Mathematik“, Teubner-Verlag 1979.

*) Pozn. překl.: Nepodařilo se mi zjistit, zda existuje či existoval český termín pro *Einzelform*, ale vzhledem k následujícímu textu a k pozn. pod čarou [32]) to snad není nutné. Poznamenejme jen, že HILBERT definuje „jednoformu“ jako „omezenou kvadratickou formu, jejíž konečné bodové spektrum je tvořeno pouze jedničkou a jež nemá spojité spektrum“ (4. sdělení, str. 193).

[32]) Upozorňujeme na větu o reprezentaci „jednoforem“ dokázanou ve 4. sdělení (str. 194) a na „perpendikulární funkci“, kterou SCHMIDT sestrojil ve svém článku v Rendiconti (str. 64/65). Pozoruhodná je i skutečnost, že VON NEUMANN ještě v roce 1927 (str. 25) používal termín *Einzeloperator*, zatímco v roce 1929 (str. 74) přešel k označení „operátor projekce“.

„Celá historie by byla dost dramatická, i kdyby nic dalšího nenásledovalo. Ale pak došlo k jistému zázraku: ukázalo se, že teorie spektra Hilbertových prostorů je odpovídajícím matematickým prostředkem nové kvantové fyziky, zavedené HEISENBERGEM a SCHRÖDINGEREM v roce 1925."

Než ovšem věci došly tak daleko, bylo ještě třeba učinit jeden rozhodný krok. Šlo o to najít spektrální rozklad také pro neomezené — a tím ne všude definované — symetrické operátory. Po CARLEMANOVÝCH (1923) přípravných pracích našli konečné řešení nezávisle na sobě VON NEUMANN (1929) a STONE (1932).[33]) Vlastní potíž spočívala v charakterizaci těch symetrických lineárních operátorů, které se pomocí spektrální míry (E_λ) dají psát ve tvaru

$$Tx = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \, \mathrm{d}E_\lambda x.$$

Definiční obor by přitom měly tvořit všechny prvky x, pro které je výraz

$$\int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 \, \mathrm{d}(E_\lambda x, x)$$

konečný. Nutnou podmínkou bylo, že takové operátory nesmějí připouštět netriviální symetrické rozšíření. Tato maximalita však není postačující, bylo třeba trochu silnější vlastnosti. Z tohoto důvodu hovořil VON NEUMANN (1929, str. 72) o „hypermaximálních operátorech". Později se pak prosadilo označení „samoadjungovaný", zavedené STONEM (1932, str. 50). V této souvislosti snad stojí za zmínku, že rozhodující myšlenka při vykrystalizování tohoto základního pojmu pochází od ERHARDA SCHMIDTA.[34])

Zveřejněním obou monografií, které VON NEUMANN a STONE publikovali v roce 1932, byla v jistém smyslu uzavřena spektrální teorie samoadjungovaných operátorů v Hilbertových prostorech. Vývoj se však přesto nezastavil, což nyní zdůrazníme tím, že popíšeme některé další výzkumy.

Tzv. „čistí" fyzikové matematikům nikdy neodpustili, že spektrum samoadjungovaného operátoru může obsahovat i hodnoty, k nimž neexistují žádné vlastní vektory.[35]) Zkoumáme-li třeba operátor násobení $M: f(s) \to sf(s)$ v Hilbertově prostoru L_2 nad reálnou osou, plyne z $Mf = \lambda f$ vždy $f = 0$. Naproti tomu platí vztah $M\delta_\lambda = \lambda\delta_\lambda$, kde δ_λ je Diracova distribuce s jednotkovou hmotou v bodě λ. Je proto nasnadě pokusit se pro daný samoadjungovaný operátor o rozšíření příslušného Hilbertova prostoru tak, aby ve vhodném rozšířeném prostoru Φ^* existovalo dostatečně mnoho vlastních prvků. Tohoto cíle dosáhli GELFAND a KOSTJUČENKO (1955). Každé vylepšení však

[33]) Vztah mezi VON NEUMANNOVÝM a STONEOVÝM výzkumem popisují BIRKHOFF a KREYSZIG (1984, str. 309). Odvolávají se přitom na STONEŮV dopis.

[34]) Srv. VON NEUMANN (1929, pozn. pod čarou na str. 62).

[35]) HEUSER (1986, pozn. pod čarou na str. 198) k tomu sarkasticky poznamenává: „Fyzikové jsou ovšem tak posedlí vlastními hodnotami, že je nacházejí dokonce i tam, kde vůbec žádné neexistují." Příklad, o kterém zde pojednáváme, však ukazuje, že tak mnohé odvážné předpoklady našich fakultních kolegů v sobě skrývají ryzí matematický obsah.

něco stojí. V tomto případě se musí zaplatit tím, že věta o rozvoji platí už jen pro prvky jistého podprostoru Φ. Dostáváme tak takzvanou Gelfandovu trojici $\Phi \subset H \subset \Phi^*$, ve které Φ označuje nukleární lokálně konvexní prostor a Φ^* jeho topologický duál.[36])

Nechyběly ani pokusy o rozšíření spektrální věty pro samoadjungované operátory také na jisté operátory v Banachových prostorech.[37]) Podstatný příspěvek k tomuto problémovému okruhu podal DUNFORD (1958). Vcelku však lze říci, že dosud nebylo dosaženo žádných výrazných úspěchů. Jedinou rozumnou motivaci pro vyšetřování symetrických operátorů poskytují zřejmě právě Hilbertovy prostory svou „samodualitou", a každé zobecnění vede k výraznému ochuzení nové teorie.

Poté, co RIESZ (1913) vybudoval funkcionální kalkul pro omezené symetrické operátory, bylo jasné, že pro každý takový operátor lze definovat absolutní hodnotu, jakož i kladnou a zápornou část. Tím byly vytvořeny předpoklady pro zavedení svazové struktury. FREUDENTHAL (1936) vyšel z tohoto poznatku a podařilo se mu nalézt podmínky, za nichž existuje pro jisté prvky lineárního svazu spektrální rozklad.[38]) Použití tohoto pojmového aparátu a těchto metod vedlo k novému a velmi jednoduchému důkazu klasické spektrální věty.[39])

Za protějšek právě popsaného zobecnění, založeného na teorii svazů, lze považovat algebraický přístup, pocházející od GELFANDA a NAJMARKA (1943). Ti ukázali, že každou komutativní C^*-algebru A s jednotkovým prvkem lze realizovat jako algebru všech spojitých komplexních funkcí na kompaktním Hausdorffově prostoru K. Je-li A podalgebrou operátorové algebry nějakého Hilbertova prostoru, je tento izomorfismus dán přiřazením tvaru

$$f(\lambda) \to \int_K f(\lambda)\,\mathrm{d}E_\lambda,$$

kde (E_λ) značí jednoznačně určenou spektrální míru. Zvolíme-li speciálně za A nejmenší symetrickou a komutativní podalgebru, která obsahuje daný omezený symetrický operátor, dostaneme jako důsledek opět klasickou spektrální větu.[40])

Teorie C^*-algeber a W^*-algeber s jejich aplikacemi v moderní fyzice je nepochybně v dnešní době nejdůležitějším pokračováním Hilbertovy spektrální teorie.[41])

3. Spektrální teorie kompaktních operátorů

V roce 1877 publikoval americký astronom a matematik HILL práci, ve které se poprvé vyskytly determinanty nekonečných matic. Důkazy konvergence, které tehdy ještě chyběly, dodal POINCARÉ (1886). Za nejpodstatnější příspěvky k této teorii však

---

[36]) Výklad této teorie lze nalézt u GELFANDA a VILENKINA (1964, str. 100–121) nebo u MAURINA (1968).

[37]) O této spektrální teorii se podrobně pojednává ve 3. díle DUNFORDA a SCHWARTZE (1971) nebo u DOWSONA.

[38]) Moderní výklad lze najít u LUXEMBURGA a ZAANENA (1971, str. 253–269 a 392).

[39]) SZ.-NAGY (1942, str. 23–24) a LJUSTERNIK a SOBOLEV (1955, str. 180–185).

[40]) Srv. DUNFORD a SCHWARTZ (1963, str. 895–899) nebo NAJMARK (1959, str. 260).

[41]) Stručný úvod lze nalézt u SAKAIE (1971).

vděčíme VON KOCHOVI, kterého k práci na této problematice podnítil jeho učitel MITTAG-LEFFLER.[42]) Přednostním cílem těchto výzkumů bylo nalezení podmínek pro nekonečnou matici, které zaručují, že posloupnost determinantů odpovídajících konečným submaticím konverguje. Přitom se ukázalo, že je výhodné zapsat tyto matice ve tvaru $(\delta_{ij} - \mu_{ij})$. Tím lze lépe vyjádřit skutečnost, že odchylka od jednotkové matice (δ_{ij}) by neměla být příliš velká. VON KOCH (1901) tak například požadoval, aby platilo

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_j |\mu_{ij}| < \infty.$$

Vzhledem k analogii mezi soustavou lineárních rovnic

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{ij}\xi_j = \eta_i \quad \text{s} \quad i = 1, 2, \ldots$$

a lineární integrální rovnicí

$$f(s) - \int_a^b K(s,t) f(t)\, \mathrm{d}t = g(s) \quad \text{s} \quad a \leqq s \leqq b$$

se dalo čekat, že i ve spojitém případě bude možno vybudovat teorii založenou na determinantech. Tohoto cíle dosáhl FREDHOLM, který byl rovněž žákem MITTAG-LEFFLERA. Jeho nejpodstatnější práce, která byla východiskem pro rozvoj lineární funkcionální analýzy, vyšla v roce 1903, ale krátké sdělení o nejdůležitějších výsledcích předložil již v lednu 1900 Švédské akademii věd. Když se o tom HILBERT na jaře 1901 dozvěděl, ihned rozpoznal nosnost Fredholmových idejí a zaměřil na tento fascinující předmět celou svou matematickou tvůrčí sílu. A dokonce celá Hilbertova škola se začala věnovat novému problémovému okruhu a ve velmi krátké době rozvinula ucelenou teorii. S tím asi byla spojena jistá tragika FREDHOLMOVA života: s rezignací musel přihlížet, jak jeho podnět byl rukama göttingenských matematiků doveden do plného rozkvětu a mnohostranně rozvinut.[43]) Od FREDHOLMA samotného už máme po roce 1903 k dispozici jen přehlednou přednášku, kterou měl v roce 1909 na kongresu matematiků ve Stockholmu.

Zatímco VON KOCHA zajímaly (především v jeho pozdějších pracích) nekonečné determinanty jako samostatné matematické objekty, pro FREDHOLMA byly v prvé řadě metodickým pomocným prostředkem k řešení integrálních rovnic. Jako konečný výsledek obdržel svou slavnou alternativu:

Buď je nehomogenní rovnice $x - Tx = y$ řešitelná pro každou pravou stranu y, nebo má homogenní rovnice $x - Tx = 0$ řešení $x \neq 0$.

Stejně jako v lineární algebře závisí rozhodnutí o tom, který z obou případů nastane, na tom, zda je příslušný determinant různý od nuly či nikoli.

---

[42]) Pěkný přehled svých příspěvků podal VON KOCH (1910) v přednášce, kterou měl v roce 1909 na matematickém kongresu ve Stockholmu.

[43]) Srv. KOWALEWSKI (1950, str. 193).

Protože v konečné formulaci Fredholmovy alternativy žádné determinanty nevystupují, vznikla ihned otázka, zda existuje důkaz tohoto tvrzení, který by nevyužíval determinantů. Tuto úlohu vyřešil HILBERT ve svém 4. sdělení (str. 219). Vyšetřoval nekonečnou soustavu lineárních rovnic

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{ij}\xi_j = \eta_i \quad \text{s} \quad i = 1, 2, \ldots$$

za předpokladu, že odpovídající bilineární forma je totálně spojitá. Posloupnosti $x = (\xi_i)$ a $y = (\eta_i)$ přitom měly být takové, aby řady utvořené z jejich čtverců konvergovaly. Ve svém 5. sdělení (str. 445–451) přenesl tyto výsledky na integrální rovnice. Odhlédneme-li od úvah nad Fredholmovými determinanty, provedených v 1. sdělení, jsou to jediné HILBERTOVY příspěvky vztahující se k nesymetrickému případu.

Podle RIESZE (1913, str. 113) je omezený lineární operátor T v l_2 totálně spojitý právě tehdy, lze-li ho vyjádřit jako stejnoměrnou limitu posloupnosti jeho konečných úseků. V moderním způsobu vyjadřování to znamená, že T lze libovolně dobře aproximovat operátory, jejichž obrazy jsou konečnědimenzionální prostory. V tomto případě lze rovnici $x - Tx = y$ řešit Schmidtovou „odštěpovací" metodou. K tomu účelu se aproximovatelnému operátoru T přiřadí konečnědimenzionální operátor A tak, aby platilo: $\|T-A\| < 1$. Položíme-li $B = T-A$, lze operátor $I-B$ invertovat pomocí Neumannovy řady a rovnici $x - Tx = y$ lze převést na rovnici $x - (I - B)^{-1}Ax = (I - B)^{-1}y$. Protože však prostor obrazů operátoru $(I - B)^{-1}A$ má konečnou dimenzi, je druhá rovnice ekvivalentní konečné soustavě lineárních rovnic. Tím jsme řešení rovnice $x - Tx = y$ převedli na elementární problém lineární algebry. Tuto elegantní metodu, která patří ke standardnímu programu každé přednášky z funkcionální analýzy, použil SCHMIDT pro integrální rovnice se spojitými jádry.[44]) Lze ji ovšem nalézt už u DIXONA (1901), ale význam jeho pozoruhodné práce byl rozpoznán teprve velmi pozdě.[45]) Proto také nijak neovlivnila rozvoj funkcionální analýzy. Za podmínky

$$\sum_{i=1}^{\infty} \sup_j |\mu_{ij}| < \infty,$$

kterou použil i VON KOCH (1901), vyšetřoval DIXON nekonečnou soustavu lineárních rovnic

$$\xi_i - \sum_{j=1}^{\infty} \mu_{ij}\xi_j = \eta_i \quad \text{pro} \quad i = 1, 2, \ldots .$$

Řady, utvořené z posloupností $x = (\xi_i)$ a $y = (\eta_i)$, přitom mají absolutně konvergovat. Z dnešního pohledu jde o rovnici $x - Tx = y$ v případě, že T je nukleární operátor v Banachově prostoru l_1.

Rozhodující krok učinil RIESZ (1918). V Banachově prostoru funkcí spojitých na uzavřeném intervalu zavedl pojem totálně spojitého lineárního operátoru a rozvinul jeho spektrální teorii, jež patří k tomu nejkrásnějšímu, co kdy matematika ze sebe

---

[44]) Tvoří hlavní obsah 2. části SCHMIDTOVY série článků.

[45]) Pokud je mi známo, citoval tuto práci poprvé RIESZ (1913, str. 98).

vydala. Ačkoli je Rieszova práce psána v klasickém jazyku prostorů funkcí, dala se po zavedení abstraktních Banachových prostorů bez námahy přeložit do nového kontextu. Zcela podstatně přispěla k tříbení funkcionálně analytického způsobu myšlení. Jediné, co se od té doby změnilo, je terminologie. Jako důsledek návrhu HILLEHO (1948, str. 14) se během padesátých let vžil místo „totálně spojitý“ pojem „kompaktní“; tím se jasněji zvýrazňuje definující vlastnost těchto operátorů.[46])

Jak FREDHOLM, tak i DIXON vyšetřovali vedle výchozí rovnice též rovnici transponovanou. Výsledkem bylo podstatné upřesnění Fredholmovy alternativy. Aby bylo možné dát těmto výrokům abstraktní formu, bylo třeba vybudovat pro Banachovy prostory teorii duality. Nejdůležitějším předpokladem k tomu byla věta o rozšíření, dokázaná HAHNEM (1927) a BANACHEM (1929). Poté dokončil Rieszovo dílo SCHAUDER (1930).

V následné době se děly pokusy vymezit přesný obor platnosti této základní teorie. První charakterizace takzvaných Rieszových operátorů pochází od RUSTONA (1954). Nedávno udal SMYTH velmi pěkné geometrické kritérium, jež je bezprostředním zobecněním definice kompaktních operátorů.[47])

Ve svém 4. sdělení (str. 218) HILBERT ukázal, že bilineární forma, přiřazená nekonečné matici (μ_{ij}), je totálně spojitá, je-li výraz

$$\sum_{i=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{\infty}|\mu_{ij}|^2$$

konečný. Na druhé straně bylo z CARLEMANOVÝCH (1921) výzkumů zcela jasné, že v teorii integrálních rovnic, rozvinuté HILBERTEM a SCHMIDTEM, není ani tak důležitá spojitost jádra $K(s,t)$ jako spíše konečnost dvojnásobného integrálu

$$\int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, ds \, dt.$$

Dalo se tedy očekávat, že se za těmito analogickými podmínkami skrývá zajímavá třída operátorů. Za objasnění této situace vděčíme VON NEUMANNOVI (1927, str. 37–41), který v průběhu své axiomatizace Hilbertova prostoru zavedl operátory s konečnou „absolutní hodnotou“. Dnes hovoříme o Hilbertových–Schmidtových operátorech a odpovídající normu definujeme pomocí formule

$$|||T|||^2 = \sum_i \|Te_i\|^2.$$

Součet na pravé straně přitom nezávisí na speciální volbě ortonormální báze (e_i).

Mohl by vzniknout dojem, že SCHMIDT přispěl výhradně k metodickému vylepšení Hilbertovy teorie, aniž by sám přidal nové výsledky; takovéto hodnocení by však bylo nesprávné. Velmi důležitým činem je věta o rozvoji pro libovolná spojitá jádra (1. část, str. 466), jejíž moderní formulace zní:

---

[46]) Takové operátory zobrazují všechny omezené podmnožiny na podmnožiny prekompaktní.

[47]) Srv. BARNES, MURPHY, SMYTH a WEST (1982). Podrobný výklad lze najít u PIETSCHE (1987, str. 135–149).

Každý kompaktní lineární operátor T v nekonečnědimenzionálním Hilbertově prostoru lze vyjádřit pomocí dvou ortonormálních posloupností (x_n) a (y_n) ve tvaru

$$Tx = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n(x, x_n)y_n \quad \text{pro všechna } x \in H.$$

Přitom je (τ_n) klesající posloupnost nezáporných čísel, konvergující k nule.

Protože platí vztahy $Tx_n = \tau_n y_n$ a $T^* y_n = \tau_n x_n$ (T^* je adjungovaný operátor), nazval SCHMIDT oba prvky x_n a y_n dvojicí adjungovaných vlastních prvků, odpovídajících vlastnímu číslu τ_n (část 1, str. 461). Tento název byl poněkud iritující, neboť obecně nemusí být τ_n vlastním číslem operátoru T nebo T^*. Dnes proto hovoříme o singulárních číslech nebo o s-číslech.

Už SCHMIDTA (1. část, str. 467–472) zajímalo, jak dobře lze spojité jádro aproximovat vzhledem k normě $|||.|||$ jádry tvaru

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i(s)g_i(t).$$

Pokračování v těchto výzkumech vedlo k pojmu aproximačních čísel, která lze definovat dokonce pro libovolné omezené lineární operátory, zobrazující jeden Banachův prostor na druhý:[48])

$$a_n(T) = \inf\{\|T - A\| : \operatorname{rang}(A) < n\}.$$

Zde značí rang(A) dimenzi prostoru obrazů aproximujících operátorů A. Je-li T kompaktní lineární operátor v nekonečnědimenzionálním Hilbertově prostoru, dostáváme podle ALLACHVERDIEVA (1957) právě s-čísla, neboť platí $a_n(T) = \tau_n$.

Asymptotického chování s-čísel lze využít k charakterizaci speciálních tříd operátorů. Tak je například T Hilbertovým–Schmidtovým operátorem právě tehdy, patří-li posloupnost (τ_n) do l_2. Nahradíme-li l_2 obecnějšími prostory posloupností l_p s $0 < < p < \infty$, dostáváme důležité třídy operátorů zavedené SCHATTENEM a VON NEUMANNEM.[49]) Ve speciálním případě $p = 1$ dostáváme nukleární operátory.

Už HILBERT poznamenal ve svém 4. sdělení (str. 205), že konvoluce totálně spojité bilineární formy s omezenou bilineární formou je vždy opět totálně spojitá. Samozřejmě je též součet dvou totálně spojitých bilineárních forem opět totálně spojitý. Tím tedy tvoří totálně spojité bilineární formy ideál v algebře všech omezených bilineárních forem. Odpovídající tvrzení pro operátory lze najít u RIESZE (1913, str. 96–97). RIESZ však navíc ukázal (str. 113, poznámka pod čarou), že je tento ideál uzavřený.

Výše popsané Schattenovy-von Neumannovy třídy jsou rovněž ideály v operátorové algebře každého Hilbertova prostoru, i když nikoli uzavřené. Zavedením vhodné normy $(1 \leqq p \leqq \infty)$, resp. kvazinormy $(0 < p < 1)$ se z nich však mohou stát úplné metrické prostory.[50])

---

[48]) K teorii aproximačních čísel srv. obě PIETSCHOVY monografie (1978, 1987).

[49]) SCHATTEN a VON NEUMANN (1946, 1948).

[50]) Teorie ideálů pro operátory v Hilbertových prostorech je vyložena v knihách SCHATTENA (1960) a GOCHBERGA a KREJNA (1969). Srv. též DUNFORD a SCHWARTZ (1963, str. 1088–1119).

Poté, co se rozvinula teorie ideálů pro operátory v Hilbertových prostorech, byl učiněn pokus rozšířit tyto výsledky na obecnější případ Banachových prostorů. Už RIESZ (1918) ukázal, že kompaktní lineární operátory tvoří uzavřený ideál, a počátkem padesátých let zavedli RUSTON (1951) a GROTHENDIECK (1951) ideál nukleárních operátorů. K tomu přistoupily absolutně p-sčítatelné operátory, vyšetřované PIETSCHEM (1967), jakož i přirozená rozšíření ideálů Schattenových–von Neumannových. Na základě těchto důležitých příkladů pak vznikla samostatná teorie operátorových ideálů, která našla mnohé pěkné aplikace uvnitř i vně funkcionální analýzy.[51])

Ve svém 4. sdělení (str. 202) HILBERT ukázal, že posloupnost vlastních hodnot totálně spojité kvadratické formy konverguje k nule. Pro integrální rovnice se symetrickými spojitými jádry odvodil SCHMIDT (1. část, str. 445–446) stejné tvrzení ze vztahu

$$\sum_{i=1}^{\infty} |\lambda_i|^2 \leqq \int_a^b \int_a^b |K(s,t)|^2 \, \mathrm{d}s \, \mathrm{d}t.^{52)}$$

Tuto nerovnost dokázal SCHUR (1909) pro libovolná spojitá jádra a CARLEMAN (1921) ji zobecnil pro Hilbertovy–Schmidtovy operátory.

Podíváme-li se přesněji, vidíme, že z této nerovnosti plyne víc než jen tvrzení, že $\lambda_i \to 0$.[53]) Dostáváme totiž dodatečnou informaci o rychlosti této konvergence. Tím je popsán problém asymptotického chování vlastních čísel, k němuž přispěl základními výsledky nejslavnější z Hilbertových žáků, HERMANN WEYL (1912, 1949). Jeho nejdůležitějším výsledkem v této oblasti je takzvaná Weylova nerovnost

$$\sum_{i=1}^{n} |\lambda_i|^p \leqq \sum_{i=1}^{n} a_i(T)^p,$$

která platí pro každý kompaktní lineární operátor T v Hilbertově prostoru, $n = 1, 2, \ldots$ a $0 < p < \infty$. Ve speciálním případě $p = 2$ přejde ve výše popsanou nerovnost Schurovu-Carlemanovu. Teprve v poslední době se podařilo vybudovat uzavřenou teorii rozložení vlastních hodnot i pro operátory v Banachových prostorech.[54])

Na závěr tohoto oddílu se ještě jednou vrátíme k historickému výchozímu bodu lineární funkcionální analýzy, k teorii determinantů. Poté, co DIXON, HILBERT, SCHMIDT a RIESZ našli přístup k Fredholmově alternativě, který nevyužíval determinantů, hrály nekonečné determinanty už jen podřadnou roli. Až do WEYLOVY práce z roku 1949 ovšem stále byly nepostradatelným pomocným prostředkem v teorii rozložení vlastních hodnot pro integrální rovnice s nesymetrickými jádry.[55]) Poté se

---

[51]) Podrobný výklad teorie operátorových ideálů podal PIETSCH (1978).

[52]) V tomto případě platí dokonce znaménko rovnosti.

[53]) Má-li operátor jen konečný počet vlastních čísel či nemá-li dokonce vůbec žádná, nahradíme chybějící λ_i nulami.

[54]) Podrobný výklad lze nalézt v monografiích KÖNIGA (1986) a PIETSCHE (1987).

[55]) Srv. HILLE a TAMARKIN (1931).

zdálo, že jejich doba už dávno minula, protože se nepodařilo dát této teorii vhodnou abstraktní formu. K tomu však došlo začátkem padesátých let nezávislými příspěvky RUSTONA (1951), LEŻAŃSKÉHO (1953) a GROTHENDIECKA (1956). Přístup, který byl tehdy vypracován, byl bohužel mimořádně technický a našel zatím málo příznivců.[56]) Situace se vyostřila, když ENFLO (1973) sestrojil protipříklad k problému aproximace. Tím bylo jasné, že pro nukleární operátory v jistých Banachových prostorech nelze vybudovat uspokojivou determinantovou teorii. V poslední době však byly nalezeny poněkud menší operátorové ideály, v nichž jde vše docela dobře. Kromě toho bylo možné získat pomocí axiomatizace teorie determinantů a vyjasněním jejích přesných vztahů k teorii stop mnohé nové poznatky.[57])

Teorie determinantů však bude mít vždy tu nevýhodu, že ji lze přímo užít jen na poměrně malou třídu operátorů.[58]) Tomu lze ovšem podstatně odpomoci jistou regularizační metodou, neboť stačí, když bude „malá" nějaká mocnina výchozího operátoru. Také k tomuto problémovému okruhu přispěl HILBERT tím, že ukázal směr. Na konci svého 1. sdělení se totiž zabýval jistými slabě singulárními jádry a ukázal, jak lze i v tomto případě dospět vhodnou modifikací Fredholmova determinantu k požadovaným výsledkům. Tento podnět, který později rozpracovali CARLEMAN (1921) a SMITHIES (1941), tvoří základ dnešní teorie regularizace. Tím se i zde historický kruh uzavřel.

4. Nekonečnědimenzionální analýza

Na závěr se budeme zabývat otázkou, do jaké míry byl realizován Hilbertův program analýzy v nekonečně mnoha proměnných. Především je třeba konstatovat, že „bezsouřadnicový" způsob myšlení znamenal v této problematice metodický obrat; rozhodující základní záměr však zůstal stejný.

Ve vztahu k lineární teorii toho bylo dosaženo mimořádně mnoho. V první řadě jde o řešení lineárních rovnic a o spektrální teorii lineárních operátorů, které přitom vystupují. Dobře se rozvinula i teorie lineárních obyčejných diferenciálních rovnic v Banachových prostorech a s tím spojená teorie semigrup operátorů.[59]) Přesto však je i v lineárním případě celá řada otevřených problémů. Dokonce i v Hilbertových prostorech jsme dosud plně zvládli jen skromný výběr operátorů se speciálními vlastnostmi. Naštěstí vystačují získané výsledky k tomu, abychom mohli uspokojivým způsobem zodpovědět většinu otázek kladených aplikacemi.

---

[56]) Výklad této teorie (ve stylu padesátých let) podal nedávno RUSTON (1986).

[57]) Odkazujeme na 4. kapitolu PIETSCHOVY monografie (1987).

[58]) HELLINGER a TOEPLITZ (1927, str. 1421–1422) k tomu poznamenávají: „Díváme-li se na celou tuto teorii nekonečných determinantů v rámci moderní teorie řešitelnosti nekonečných soustav lineárních rovnic, zjistíme, že ji tam lze mnoha různými způsoby použít, že však přesto jsou vybudování teorie řešitelnosti na základě nekonečných determinantů vytýčeny už vzhledem k její povaze těsné a nepřekročitelné hranice."

[59]) Srv. HILLE (1948) a KREJN (1971).

Pokud však jde o nelineární teorii, ta se ještě pořád vyvíjí. Známe sice velký počet vět o pevném bodě, vyřešili jsme problém implicitních funkcí, a — abychom vyjmenovali alespoň něco — relativně dobře je vybudována i teorie bifurkací založená SCHMIDTEM (3. část).[60]) V této souvislosti bychom chtěli odkázat také na teorii holomorfních funkcí v nekonečněrozměrných prostorech, která zřejmě ležela HILBERTOVI obzvláště na srdci.[61])

Nejpodstatnější překážkou, která se staví do cesty budování nekonečnědimenzionální analýzy, je však skutečnost, že nemáme k dispozici žádnou analogii Lebesgueovy míry.[62]) Jako náhražka byla vybudována teorie Gaussových měr, která přispěla k řešení mnoha problémů.[63]) Tak se třeba pro jisté reálné funkce $u(x)$, kde x probíhá otevřenou množinu nekonečněrozměrného Hilbertova prostoru, podařilo definovat Laplaceův operátor $\Delta u(x)$ a rozvinout teorii potenciálu. Také Gaussova věta byla zobecněna. Vcelku však je třeba ještě hodně udělat.

Chápeme-li dnes funkcionální analýzu jako axiomatickou teorii topologických lineárních prostorů a mezi nimi působících lineárních a nelineárních operátorů, je toto pojetí jistě zcela odlišné od toho, co si HILBERT představoval pod axiomatikou analýzy. Jemu šlo o to, aby vykrystalizovala taková tvrzení, z nichž by bylo možné odvodit zbývající teorii „bez nových úvah o konvergenci".[64]) Takový záměr se zdá být z dnešního pohledu neproveditelný a asi by se o něj ani nemělo usilovat. Jako mimořádně užitečné se naproti tomu ukázalo axiomatické budování jistých dílčích disciplín. Podaří se tím často svázat věci různého charakteru, a obecné souvislosti vystoupí zřetelněji do popředí. Parádním příkladem je již zmíněná teorie Banachových algeber, která dovoluje zpracovat algebry operátorů i algebry funkcí podle jednotných hledisek.

5. Hilbertova škola

Jak ukazuje následující seznam, bylo v letech 1901 až 1914 na HILBERTŮV podnět vypracováno ne méně než 19 disertací, které byly tematicky věnovány integrálním rovnicím a příbuzným problémům:[65])

---

[60]) Z velké nabídky literatury o nelineární funkcionální analýze uveďme: DUGUNDJI a GRANAS (1982), SCHWARTZ (1969) a VAJNBERG a TRENOGIN (1973).

[61]) Srv. DINEEN (1981).

[62]) Důležitost takovéhoto pomocného prostředku lze ilustrovat příkladem lokálně kompaktních grup, pro které Hilbertův žák HAAR dokázal existenci invariantní míry. Teorie Fourierovy transformace, která tam byla rozvinuta, patří rovněž do oblasti nekonečnědimenzionální analýzy. Srv. NAJMARK (1959, str. 370–378 a 418–423).

[63]) Odkazujeme na výklad KUA (1975) a SKOROCHODA (1974).

[64]) HILBERT se k tomuto problému vyjádřil ve svém 4. sdělení (str. 227) a v článku v Rendiconti „Wesen und Ziel..." (str. 72).

[65]) Zde jde o výtah ze seznamu všech Hilbertových doktorandů, který lze nalézt v 3. díle (str. 431–433) jeho Sebraných spisů.

Oliver Dimon Kellog (1902): K teorii integrálních rovnic a Dirichletova principu,

Charles Max Mason (1903): Okrajové úlohy u obyčejných diferenciálních rovnic,

Albert Andrae (1903): Pomocné prostředky obecné teorie lineárních eliptických diferenciálních rovnic,

Erhard Schmidt (1905): Rozvoj libovolných funkcí podle systémů předepsaných,

Wilhelmus David Allen Westfall (1905): K teorii integrálních rovnic,

Alexander Myller (1906): Obyčejné diferenciální rovnice vyššího řádu v jejich vztahu k integrálním rovnicím,

Wera Lebedeff (1906): Teorie integrálních rovnic při požití na některé rozvoje v řadu,

Charles Haseman (1907): Použití teorie integrálních rovnic u některých okrajových úloh teorie funkcí komplexní proměnné,

William Deweese Cairns (1907): Použití integrálních rovnic na druhou variaci u izoperimetrických problémů,

Robert König (1907): Oscilační vlastnosti vlastních funkcí integrální rovnice s definitním jádrem a Jacobiho kritérium variačního počtu,

Ernst Hellinger (1907): Ortogonální invarianty kvadratických forem nekonečně mnoha proměnných,

Hermann Weyl (1908): Singulární integrální rovnice se zvláštním ohledem na Fourierovu integrální větu,

Alfred Haar (1909): K teorii ortogonálních systémů funkcí,

Richard Courant (1910): O použití Dirichletova principu na problémy konformního zobrazení,

Wallie Abraham Hurwitz (1910): Okrajové úlohy u soustav lineárních parciálních diferenciálních rovnic prvního řádu,

Hugo Steinhaus (1911): Nové aplikace Dirichletova principu,

Hans Bolza (1913): Aplikace teorie integrálních rovnic na elektronovou teorii zředěných plynů,

Bernard Baule (1914): Teoretické zpracování jevů ve zředěných plynech,

Kurt Schellenberg (1914): Použití integrálních rovnic na teorii elektrolýzy.

Mezi vyjmenovanými disertacemi dosáhla bezpochyby nejvyššího významu disertace Schmidtova. Ale také Weyl a Haar vystoupili hned na začátku své vědecké dráhy s důležitými příspěvky.

Mnozí z Hilbertových doktorandů se později stali sami vedoucími matematiky:

Oliver Dimon Kellog (1878–1932),
Erhard Schmidt (1876–1959),
Hermann Weyl (1885–1955),
Alfred Haar (1885–1933),
Richard Courant (1888–1972),
Hugo Steinhaus (1887–1972).

K nim přistupuje

OTTO TOEPLITZ (1881–1940),

který se roku 1907 v Göttingenu habilitoval. Další spoluzakladatelé funkcionální analýzy byli svými těsnými kontakty s HILBERTEM podstatně ovlivněni:

FRIEDRICH RIESZ (1880–1956),
HANS HAHN (1879–1934),
JOHANN VON NEUMANN (1903–1957).

Konečně je třeba připomenout, že

STEFAN BANACH (1892–1945)

byl objeven a podporován Hilbertovým žákem STEINHAUSEM. Takovéto řetězce vztahů učitel–žák by bylo možno vysledovat až do dnešní generace v nejrůznějších směrech.

Souhrnně lze konstatovat, že DAVID HILBERT přispěl svými vlastními výkony i výkony svých žáků rozhodným způsobem k rozvoji funkcionální analýzy. Společně s FREDHOLMEM položil základy k budově, jejíž hrubá stavba byla dokončena do počátku třicátých let RIESZEM, BANACHEM, VON NEUMANNEM a dalšími. Dostavba však stále pokračuje a není ještě ani dnes uzavřena. My dnešní matematikové máme za úkol v tomto díle pokračovat, a to nejen řemeslnou pílí, ale také novými myšlenkami.

6. Životopisné poznámky

David Hilbert se narodil 23. ledna 1862 ve Wehlau u Královce (Königsberg, Kaliningrad). Jeho rodiči byli právník OTTO HILBERT a jeho manželka MARIA, roz. ERDTMANNOVÁ. Po návštěvě školy v Královci studoval HILBERT takřka výhradně na tamní univerzitě, jen druhý semestr strávil v Heidelbergu. K jeho učitelům patřil HEINRICH WEBER, LAZARUS FUCHS a FERDINAND VON LINDEMANN. Na jeho matematický vývoj mělo velký vliv úzké přátelství s HERMANNEM MINKOWSKIM (1864–1909) a ADOLFEM HURWITZEM (1859–1919). HILBERT promoval v roce 1885 u LINDEMANNA v Královci a habilitoval se v roce 1886 na téže univerzitě. Tam byl v roce 1892 jmenován mimořádným a o rok později řádným profesorem. Rozhodujícím krokem v HILBERTOVĚ životě bylo jeho povolání na univerzitu v Göttingenu, k němuž dal podnět FELIX KLEIN a kde působil od roku 1895 až do své smrti 14. února 1943. V roce 1892 se HILBERT oženil s kupeckou dcerou KÄTHE JEROSCHOVOU, která ho přežila o dva roky. Z tohoto manželství vzešel jeden syn.

Podrobný výklad o životě a díle DAVIDA HILBERTA lze najít v knize REIDOVÉ (1970), jakož i v článcích BLUMENTHALA (1935), SCHMIDTA (1943) a WEYLA (1944). Odkazujeme také na hilbertovský pamětní spis vydaný REIDEMEISTEREM (1971).

Erhard Schmidt se narodil 14. ledna 1876 v Dorpatu (dnešní Tartu). Jeho rodiči byli profesor fyziologie ALEXANDER SCHMIDT a jeho manželka IDA, roz. VON FICKOVÁ. Po návštěvě škol v Dorpatu a v Rize studoval SCHMIDT na univerzitách v Dorpatu, Berlíně a Göttingenu. K jeho učitelům patřil ADOLF KNESER, HERMANN

AMANDUS SCHWARZ a DAVID HILBERT. SCHMIDT promoval v roce 1905 u HILBERTA v Göttingenu a habilitoval se v roce 1906 v Bonnu. První povolání obdržel v roce 1908 na curyšskou univerzitu. Poté byl profesorem v Erlangenu a ve Vratislavi a konečně odešel v roce 1917 na univerzitu v Berlíně, kde působil až do své smrti 6. prosince 1959. V roce 1909 se oženil s BERTOU VON BERGMANNOVOU, která však zemřela již v roce 1916 při porodu třetího syna.

Podrobný výklad o životě a díle ERHARDA SCHMIDTA lze najít v článcích NEVANLINNY (1956), SCHRÖDERA (1963), ROHRBACHA (1968) a DINGHASE (1970).

Seznam literatury

Část A: Historické a biografické příspěvky

BERNKOPF, M.
1966 *The development of function spaces with particular reference to their origins in integral equation theory.* Arch. Hist. Exact. Sci. *3*, 1–96.
1968 *A history of infinite matrices.* Arch. Hist. Exact. Sci. *4*, 308–358.

BIRKHOFF, G. / KREYSZIG, E.
1968 *The establishment of functional analysis.* Historia Math. *11*, 258–321.

BLUMENTHAL, O.
1935 *Lebensgeschichte.* In: *Gesammelte Abhandlungen von David Hilbert, Band 3.* Berlin: Springer-Verlag, 388–429.

BOURBAKI, N.
1971 *Elemente der Mathematikgeschichte.* Göttingen: Vandenhoeck & Ruprecht.

DIEUDONNÉ, J.
1981 *History of functional analysis.* Math. Studies *49*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland.

DINGHAS, A.
1970 *Erhard Schmidt (Erinnerungen und Werk).* Jahresber. Deut. Math. Verein. *72*, 3–17.

HELLINGER, E.
1935 *Hilberts Arbeiten über Integralgleichungen und unendliche Gleichungssysteme.* In: *Gesammelte Abhandlungen von David Hilbert, Band 3.* Berlin: Springer Verlag, 94–145.

HELLINGER, E. / TOEPLITZ, O.
1927 *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Encyklopädie Math. Wiss. II. C. 13. Leipzig: Teubner-Verlag. (Dotisk; New York: Chelsea, 1952.)

HEUSER, H.
1986 *Funktionalanalysis.* Stuttgart: Teubner-Verlag.

KOWALEWSKI, G.
1950 *Bestand und Wandel (Meine Lebenserinnerungen zugleich ein Beitrag zur neueren Geschichte der Mathematik.* München: Oldenburg-Verlag.

MONNA, A. F.
1973 *Functional analysis in historical perspective.* Utrecht: Oosthoek Publ. Comp.

NEVANLINNA, R.
1956 *Erhard Schmidt (zu seinem 80. Geburtstag).* Math. Nachr. *15*, 3–6.

REID, C.
1970 *Hilbert.* New York–Heidelberg–Berlin: Springer-Verlag.

REIDEMEISTER, K. (editor)
1971 *Hilbert (Gedenkband).* Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

ROHRBACH, H.
1968 *Erhard Schmidt (Ein Lebensbild).* Jahresber. Deut. Math. Verein. *69*, 209–224.

SCHMIDT, E.
1919 *Antrittsrede.* Sitzungsber. Preuß. Akad. Wiss. Berlin, 564–566.

1943 *David Hilbert.* Forschungen und Fortschritte *19*, 108.

SCHRÖDER, K.
1963 *Erhard Schmidt.* Math. Nachr. *25*, 1–3.

SIEGMUND-SCHULTZE, R.
1982 *Die Anfänge der Funktionalanalysis und ihr Platz im Umwälzungsprozess der Mathematik um 1900.* Arch. Hist. Exact Sci. *26*, 13–71.

1986 *Der Beweis des Hilbert-Schmidt-Theorems.* Arch. Hist. Exact Sci. *36*, 251–270.

STEEN, L. A.
1973 *Highlights in the history of spectral theory.* Amer. Math. Monthly *80*, 359–381.

TAYLOR, A. E.
1982 *A study of Maurice Fréchet: I. His early work on point set theory and the theory of functionals.* Arch. Hist. Exact Sci. *27*, 233–295.

1985 *A study of Maurice Fréchet: II. Mainly about his work on general topology, 1909–1928.* Arch. Hist. Exact Sci. *34*, 279–380.

1987 *A study of Maurice Fréchet: III. Fréchet as analyst, 1909–1930.* Arch. Hist. Exact Sci. *37*, 25–76.

WEYL, H.
1944 *David Hilbert and his mathematical work.* Bull. Amer. Math. Soc. *50*, 612–654.

YOUNG, L.
1981 *Mathematicians and their times.* Math. Studies *48*, Amsterdam–New York–Oxford: North Holland.

Část B: Příspěvky z oblasti funkcionální analýzy

ALLACHVERDIEV, D. E.
1957 *O přesnosti aproximace totálně spojitých operátorů konečnědimenzionálními operátory* (rusky). Azerbajzhan. Gos. Univ. Uchen. Zap. (Baku) *2*, 27–37.

BANACH, S.
1922 *Sur les opérations dans les ensembles abstraits et leur application aux équations intégrales.* Fund. Math. *3*, 133–181.

1929 *Sur les fonctionelles linéaires.* Studia Math. *1*, 311–216 a 223–229.

1932 *Théorie des opérations linéaires.* Warszawa: Monografie Matematyczne.

BARNES, B. A. / MURPHY, G. J. / SMYTH, M. R. F. / WEST, T. T.
1982 *Riesz and Fredholm theory in Banach algebras.* Research Notes in Math. *67*. Boston–London–Melbourne: Pitman.

CARLEMAN, T.
1921 *Zur Theorie der linearen Integralgleichungen.* Math. Z. *9*, 196–217.

1923 *Sur les équations intégrales singulières à noyau réel et symétrique.* Uppsala: Univ. Årsskrift.

COURANT, R.
1920 *Über die Eigenwerte bei den Differentialgleichungen der mathematischen Physik.* Math. Z. *7*, 1–57.

DINEEN, S.
1981 *Complex analysis in locally convex spaces.* Math. Studies *57*, Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland.

DIXON, A. C.
1901 *On a class of matrices of infinite order and on the existence of „matricial" functions on a Riemann surface.* Trans. Cambridge Phil. Soc. *14*, 190–233.

DOWSON, H. R.
1978 *Spectral theory of linear operators.* London–New York–San Francisco: Academic Press.

DUGUNDJI, J. / GRANAS, A.
1982 *Fixed point theory.* Warszawa: Polish Sci. Publ.

DUNFORD, N.
1958 *A survey of the theory of spectral operators.* Bull. Amer. Math. Soc. *64*, 217–274.

DUNFORD, N. / SCHWARTZ, J. T.
1963 *Linear operators, part II.* New York–London: Interscience Publ..
1971 *Linear operators, part III.* New York–London–Sydney–Toronto: Wiley-Interscience.

DVORETZKY, A.
1961 *Some results on convex bodies and Banach spaces.* Proc. Symp. on Linear Spaces, Jerusalem, 123–160.

ENFLO, P.
1973 *A counterexample to the approximation problem in Banach spaces.* Acta Math. *130*, 309–317.

FISCHER, E.
1907 *Sur la convergence en moyenne.* C. R. Acad. Sci. Paris *144*, 1022–1024.

FRÉCHET, M.
1906 *Sur quelques points du calcul fonctionnel (Thèse, Paris 1906).* Rendiconti Circ. Mat. Palermo *22*, 1–74.
1928 *Les espaces abstraits.* Paris: Gauthier–Villars.

FREDHOLM, I.
1900 *Sur une nouvelle méthode pour la résolution du problème de Dirichlet.* Öfversigt of Kongl. Svenska Vetenskaps–Akademiens Förhandlingar *57*, 39–46.
1903 *Sur une classe d'équations fonctionelles.* Acta Math. *27*, 365–390.
1910 *Les équations intégrales linéaires.* C. R. Congrès Math. Stockholm 1909, Leipzig: Teubner-Verlag, 92–100.

FREUDENTHAL, H.
1936 *Teilweise geordnete Moduln.* Proc. Acad. Sci. Amsterdam *39*, 641–651.

GELFAND, I. M.
1941 *Normované okruhy* (rusky). Mat. Sbornik *9*, 3–24.

GELFAND, I. M. / KOSTJUČENKO, A. G.
1955 *O rozvoji diferenciálních operátorů a dalších operátorů podle vlastních funkcí* (rusky). Doklady Akad. Nauk SSSR *103*, 349–342.

GELFAND, I. M. / NAJMARK, M. A.
1943 *O vnoření normované algebry do algebry operátorů jistého Hilbertova prostoru* (rusky). Mat. Sbornik *12*, 197–213.

GELFAND, I. M. / VILENKIN, N. J
1964 *Verallgemeinerte Funktionen, Band 4.* Berlin: Deut. Verlag der Wiss. (německý překlad ruského originálu; Moskva: Fizmatgiz., 1961).

GOCHBERG, I. C. / KREJN, M. G.
1969 *Introduction to the theory of non-self-adjoint operators in Hilbert space.* Providence: Amer. Math. Soc. (anglický překlad ruského originálu; Moskva: Nauka 1965).

GRAM, J. P.
1883 *Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate.* J. Reine Angew. Math. *94*, 41–73.

GROTHENDIECK, A.
1951 *Sur une notion de produit tensoriel topologique d'espaces vectoriels topologiques et une classe remarquable d'espaces vectoriels liée á cette notion.* C. R. Acad. Sci. Paris *233*, 1556–1558.
1956 *La théorie de Fredholm.* Bull. Soc. Math. France *84*, 319–384.

HAHN, H.
1922 *Über Folgen linearer Operationen.* Monatshefte Math. Phys. *32*, 3–88.
1927 *Über lineare Gleichungssysteme in linearen Räumen.* J. Reine Angew. Math. *157*, 214–229.

HAUSDORFF, F.
1923 *Eine Ausdehnung des Parsevalschen Satzes über Fourierreihen.* Math. Z. *16*, 163–169.

HELLINGER, E. / TOEPLITZ, O.
1910 *Grundlagen für eine Theorie der unendlichen Matrizen.* Math. Ann. *69*, 289–330.
1927 *Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Encyklopädie Math. Wiss. II. C. 13. Leipzig: Teubner-Verlag. (Dotisk; New-York: Chelsea, 1952.)

HELLY, E.
1921 *Über Systeme linearer Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Monatshefte Math. Phys. *31*, 60–91.

HILB, E.
1908 *Über die Auflösung von Gleichungen mit unendlich vielen Unbekannten.* Sitzungsber. Phys.-Med. Sozietät, Erlangen, *40*, 84–89.

HILL, G. W.
1877 *On the part of the motion on the lunar perigee which is a function of the mean motion of the sun and moon.* Cambridge (Mass.) a Acta Math. *8* (1886), 1–36.

HILLE, E.
1948 *Functional analysis and semi-groups.* New York: Amer. Math. Soc. (Rozšířené vydání společně s R. S. PHILLIPSEM 1957.)

HILLE, E. / TAMARKIN, J. D.
1931 *On the characteristic values of linear integral equations.* Acta Math. *57*, 1–76.

KOCH, H. VON
1901 *Sur quelques points de la théorie des déterminants infinis.* Acta Math. *24*, 89–22.
1910 *Sur les systémes d'une infinité d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* C. R. Congrès Math. Stockholm 1909, Leipzig: Teubner-Verlag, 43–61.

KÖNIG, H.
1986 *Eigenvalue distribution of compact operators.* Basel: Birkhäuser-Verlag.

KÖTHE, G. / TOEPLITZ, O.
1934 *Lineare Räume mit unendlich vielen Koordinaten und Ringe unendlicher Matrizen.* J. Reine Angew. Math. *171*, 193–226.

KREJN, S. G.
1971 *Linear differential equations in Banach spaces.* Providence: Amer. Math. Soc. (Anglický překlad ruského originálu; Moskva: Nauka, 1967).

KUO, H. H.
1975 *Gaussian measures in Banach spaces.* Lecture Notes in Math. *463*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

LEBESGUE, H.
1902 *Intégral, longeur, aire (Thése, Paris 1902).* Annali di Mat. (3), 7, 231–259.

LEŻAŃSKI, T.
1953 *The Fredholm theory of linear equations in Banach spaces.* Studia Math. *13*, 244–276.

LJUSTERNIK, L. A. / SOBOLEV, V. I.
1955 *Elemente der Funktionalanalysis.* Berlin: Akademie-Verlag (Německý překlad ruského originálu; Moskva: Gos. Izd. Tech. Teor. Lit., 1951).

LÖWIG, H.
1934 *Komplexe euklidische Räume von beliebiger endlicher oder unendlicher Dimensionszahl.* Acta Sci. Math. Szeged 7, 1–33.

LUXEMBURG, W. A. / ZAANEN, A. C.
1971 *Riesz spaces, Vol. I.* Amsterdam–London: North-Holland.

MAURIN, K.
1968 *General eigenfunction expansions and unitary representations of topological groups.* Warszawa: Polish Sci. Publ.

MILMAN, V. D. / SCHECHTMAN, G.
1986 *Asymptotic theory of finite dimensional normed spaces.* Lecture Notes in Math. *1200*, Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

NEUMANN, J. VON
1927 *Mathematische Begründung der Quantenmechanik.* Nachr. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 1–57.
1929 *Allgemeine Eigenwertheorie Hermitescher Funktionaloperatoren.* Math. Ann. *102*, 49–131.
1932 *Mathematische Grundlagen der Quantenmechanik.* Berlin: Springer-Verlag.

NAJMARK, M. A.
1959 *Normierte Algebren.* Berlin: Deut. Verlag der Wiss. (Německý překlad ruského originálu; Moskva: Gos. Izd. Tech. Teor. Lit., 1955.)

PEANO, G.
1888 *Calcolo geometrico secondo l'Ausdehnungslehre di H. Grassmann.* Torino: Fratelli Bocca.

PEŁCZYŃSKI, A.
1984 *Structural theory of Banach spaces and its interplay with analysis and probability.* Proc. Int. Congress Math., Warsaw 1983, Vol. 1, 237–269, Warszawa: Polish. Sci. Publ. a Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland.

PIETSCH, A.
1967 *Absolut p-summierende Abbildungen in normierten Räumen.* Studia Math. *28*, 333–353.
1978 *Operator ideals.* Berlin: Deut. Verlag der Wiss. a Amsterdam–New York–Oxford: North-Holland.
1987 *Eigenvalues and s-numbers.* Leipzig: Akademische Verlagsgesellschaft Geest & Portig a Cambridge Univ. Press.

POINCARÉ, H.
1886 *Sur les déterminants d'ordre infini.* Bull. Soc. Math. France *14*, 77–90.

RELLICH, F.
1934 *Spektraltheorie in nicht-separablen Räumen.* Math. Ann. *110*, 342–356.

RIESZ, F.
1906 *Sur les ensembles de fonctions.* C. R. Acad. Sci. Paris 143, 738–741.

1907:a *Über orthogonale Funktionensysteme.* Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 116–122.

1907:b *Sur les systèmes orthogonaux de fonctions.* C. R. Acad. Sci. Paris 144, 615–619.

1910:a *Untersuchungen über Systeme integrierbarer Funktionen.* Math. Ann. *69*, 449–497.

1910:b *Über quadratische Formen von unendlich vielen Veränderlichen.* Nachr. Königl. Gesell. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Klasse 190–195.

1913 *Les systèmes d'équations linéaires à une infinité d'inconnues.* Paris: Gauthier–Villars.

1918 *Über lineare Funktionalgleichungen.* Acta Math. *41*, 71–98.

RUSTON, A. F.
1951 *On the Fredholm theory of integral equations for operators belonging to the trace class of a general Banach space.* Proc. London Math. Soc. (2) *53*, 109–124.

1954 *Operators with a Fredholm theory.* J. London Math. Soc. *29*, 318–326.

1986 *Fredholm theory in Banach spaces.* Cambridge Univ. Press.

SAKAI, S.
1971 *C^*-algebras and W^*-algebras.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

SCHATTEN, R.
1960 *Norm ideals of completely continuous operators.* Berlin–Heidelberg–New York: Springer-Verlag.

SCHATTEN, R. / NEUMANN, J. VON
1946 *The cross-space of linear transformations II.* Ann. of Math. (2) *47*, 608–630.

1948 *The cross-space of linear transformations III.* Ann. of Math. (2) *49*, 557–582.

SCHAUDER, J.
1930 *Über lineare vollstetige Funktionaloperationen.* Studia Math. 2, 183–196.

SCHMIDT, E.
1948 *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung und ihr Spiegelbild sowie die isoperimetrische Eigenschaft der Kugel in der euklidischen und nichteuklidischen Geometrie.* Math. Nachr. *1*, 81–157.

SCHOENFLIES, A.
1908 *Die Entwicklung der Lehre von den Punktmanningfaltigkeiten (zweiter Teil).* Leipzig: Teubner-Verlag.

SCHURR, I.
1909 *Über die charakteristischen Wurzeln einer linearen Substitution mit einer Anwendung auf die Theorie der Integralgleichungen.* Math. Ann. *66*, 488–510.

SCHWARTZ, J. T.
1969 *Nonlinear functional analysis.* New York–London–Paris: Gordon and Breach.

SCHWARZ, H. A.
1885 *Über ein die Flächen kleinsten Flächeninhalts betreffendes Problem der Variationsrechnung.* Acta Soc. Sci. Fennicae *15*, 315–362.

SKOROHOD, A. V.
1974 *Integration in Hilbert space.* New York–Heidelberg: Springer-Verlag.

SMITHIES, F.
1941 *The Fredholm theory of integral equations.* Duke Math. J. *8*, 107–130.

STONE, M. H.
1932 *Linear transformations in Hilbert space.* New York: Amer. Math. Soc.

SZ.-NAGY, B.
1942 *Spektraldarstellung linearer Transformationen des Hilbertschen Raumes.* Berlin: Springer-Verlag.

VAJNBERG, M. M. / TRENOGIN, V. A.
1973 *Theorie der Lösungsverzweigung bei nichtlinearen Gleichungen.* Berlin: Akademie-Verlag (Německý překlad ruského originálu; Moskva: Nauka, 1969).

WEYL, H.
1909 *Über die Konvergenz von Reihen, die nach Orthogonalfunktionen fortschreiten.* Math. Ann. *67*, 225–245.
1912 *Das asymptotische Verteilungsgesetz der Eigenwerte linearer partieller Differentialgleichungen (mit einer Anwendung auf die Theorie der Hohlraumstrahlung).* Math. Ann. *71*, 441–479.
1918 *Raum, Zeit, Materie.* Berlin: Springer-Verlag.
1949 *Inequalities between the two kinds of eigenvalues of a linear transformation.* Proc. Nat. Acad. USA *35*, 408–411.

WIENER, A.
1922 *Limit in terms of continuous transformations.* Bull. Soc. Math. France *150*, 124–134..

WINTER, A.
1929 *Spektraltheorie der unendlichen Matrizen.* Leipzig: Hirzel-Verlag.

YOUNG, W. H.
1912 *Sur la généralisation du théorème de Parseval.* C. R. Acad. Sci. Paris *155*, 30–33.

O autorovi

Autor předmluvy a editor celé publikace, prof. dr. ALBRECHT PIETSCH patří k předním představitelům německé i světové funkcionální analýzy. Narodil se v roce 1934 a už v roce 1965 se stal řádným profesorem matematiky na Univerzitě Friedricha Schillera v Jeně, kde působí dosud. O jeho věhlasu a vynikajících výsledcích svědčí i to, že již v roce 1974 byl zvolen členem učené společnosti Leopoldina v Halle. Značného ohlasu dosáhly i jeho monografie: Vedle knih uvedených v seznamu literatury napsal ještě monografii o nukleárních prostorech, která vyšla v němčině, angličtině a ruštině, a také jeho kniha o operátorových ideálech vyšla rusky. V Jeně pak vychoval řadu významných matematiků, takže lze právem hovořit o PIETSCHOVĚ škole.