Karel Havlíček

Přehled základních pojmů z geometrie zakřivených prostorů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 6, 639--659

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138050

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK III — ČÍSLO 6

MATEMATIKA

PŘEHLED ZÁKLADNÍCH POJMŮ Z GEOMETRIE ZAKŘIVENÝCH PROSTORŮ

Doc. Dr KAREL HAVLÍČEK, Praha

V prvních třech odstavcích tohoto článku je z geometrického hlediska referováno o pojmech užívaných v prostorech, jež jsou jistým zobecněním prostoru euklidovského. Formální aparát, který se stále více uplatňuje v mechanice, spočívá na těchto geometrických pojmech (konexe, Riemannův bikvadratický tensor křivosti, absolutní derivace apod.). Poslední, čtvrtý odstavec, má ráz metodický; je v něm podáno elementární odvození významu Levi-Civitova paralelismu na plochách.

1. Úvod

V mechanice se vedle pravoúhlých kartézských souřadnic v prostoru užívá často i souřadnic křivočarých, na příklad polárních nebo cylindrických, a to pro jejich výhody při vyšetřování speciálních případů. Pravoúhlé souřadnice x, y, z v trojrozměrném euklidovském prostoru souvisí s polárními souřadnicemi ϱ, φ, ϑ v témže prostoru rovnicemi

$$\begin{aligned} x &= \varrho \sin\varphi \cos\vartheta\,, & \varrho &= \sqrt{x^2+y^2+z^2}\,, \\ y &= \varrho \sin\varphi \sin\vartheta\,, & \varphi &= \arccos \frac{z}{\sqrt{x^2+y^2+z^2}}\,, \\ z &= \varrho \cos\varphi\,, & \vartheta &= \operatorname{arctg} \frac{y}{x}\,. \end{aligned}$$

Čtenář jich může použít jako příkladu pro obecnou transformaci souřadnic, zavedenou dále v rovnicích (4) a (5), klade-li v nich

$$\begin{aligned} x &= \xi^1\,, & y &= \xi^2\,, & z &= \xi^3\,, \\ \varrho &= {}'\xi^1, & \varphi &= {}'\xi^2, & \vartheta &= {}'\xi^3, \end{aligned}$$

a objasnit si tak všechny výpočty uvedené v prvních třech odstavcích.

Zavedení křivočarých souřadnic je však přímo nutné v těch prostorech, v nichž přímočaré souřadnice vůbec zavést nelze; takové prostory, označované obvykle názvem *prostory zakřivené*, byly studovány v geometrii a aplikovány i na mechaniku.[1]) Jsou zobecněním pojmu obyčejného prostoru nezakřiveného, na příklad euklidovského, a tudíž prostory „rovné" (tj. nezakřivené) jeví se jako jejich nejjednodušší speciální případ. Ze zakřivených prostorů nejrozší-

[1]) Viz Kilčevskij, str. 89—142. (Citace jmen se vztahuje k seznamu literatury uvedenému vzadu.)

řenější jsou prostory Riemannovy, jejichž nejběžnějším případem jsou dvojrozměrné plochy v trojrozměrném euklidovském prostoru. Základy k této geometrii ploch položil K. F. Gauss (1777—1855). Od těch dob byla diferenciální geometrie značně propracována. Užitečný prostředek k tomuto studiu poskytla metoda tensorového počtu. Zásluhou italských matematiků, z nichž nejvýznamnější je asi T. Levi-Civita (1873—1941), byl tu vytvořen tzv. *absolutní počet diferenciální*. Pro důležitost jeho aplikací v mechanice byl na příklad už před válkou zřízen v Moskvě zvláštní seminář pro tensorovou analysu. V poválečné době dosahuje v tomto oboru významných výsledků sovětský matematik V. V. Wagner.[2])

Při studiu tensorové analysy je užitečné poznat geometrický význam příslušných pojmů. My se na těchto stránkách soustředíme hlavně na paralelismus zavedený T. Levi-Civitou; je to zobecnění pojmu rovnoběžnosti pro zakřivené prostory. Geometrická interpretace Levi-Civitova paralelismu na plochách je názorně podána na příklad v knize Duscheka a Mayera a velmi podrobně o ní píše Kagan[3]). Ale pokud se nepoužívá vyšších prostředků[4]), vyvozuje se elementárně tato geometrická interpretace ještě způsobem, který připomíná ty doby, kdy diferenciál byl pokládán za veličinu nekonečně malou.[5]) Jedním z cílů tohoto článku je odstranit tuto závadu; to je obsahem 4. odstavce. Předcházející odstavce mají ráz informativní a jsou tedy určeny především těm čtenářům, kteří se s geometrií v zakřivených prostorech dosud nesetkali. Doplňují zároveň citovanou už a nedávno v češtině vydanou knihu Kilčevského v tom smyslu, že o paralelismu uvádějí ty partie, jež Kilčevskij do svého výkladu nezařadil, ale jejichž znalost u čtenáře mlčky předpokládá.

Výslovně podotýkám, že si zde všimneme jen lokálních vlastností prostoru; v tom smyslu je třeba chápat všechna tvrzení v dalším textu obsažená. Přitom všude pracujeme v oboru reálných čísel; tedy i funkce v dalším se vyskytující jsou reálné funkce reálných proměnných. Ve 4. odstavci se předpokládá, že čtenář zná základní věci z diferenciální geometrie ploch.

2. Základní pojmy a vztahy

Souřadnice v n-rozměrném prostoru označme $\xi^1, \xi^2, \ldots, \xi^n$, stručně je píšeme ξ^λ ($\lambda = 1, 2, \ldots, n$).[6]) Jsou tím míněny libovolné křivočaré nebo přímočaré souřadnice, kartézské souřadnice jsou jejich speciálním případem.

Křivka v tomto prostoru je vyjádřena parametricky rovnicemi

$$\xi^\lambda = \xi^\lambda(t)\,, \tag{1}$$

kde t je proměnný parametr, $\xi^\lambda(t)$ jsou funkce tohoto parametru definované v nějakém intervalu. Pro účely tohoto článku stačí předpokládat, že funkce $\xi^\lambda(t)$ mají tam spojité derivace až třetího řádu. Označíme-li písmenem s oblouk křivky (1), je v Riemannových prostorech čtverec diferenciálu tohoto oblouku dán positivně definitní kvadratickou formou; zapisujeme to stručně ve tvaru

$$ds^2 = a_{\lambda\mu}\, d\xi^\lambda\, d\xi^\mu\,. \tag{2}$$

[2]) Kilčevskij, str. 109, 115.

[3]) Duschek-Mayer, I. díl, str. 184; Kagan, I. díl. str. 375—411 i dále.

[4]) Srovnej Duschek-Mayer. II. díl, str. 161 a Eisenhart, str. 249—251. Eisenhart tu užívá k elegantnímu důkazu tzv. asociovaných vektorů.

[5]) Duschek-Mayer, I. díl, str. 183—187; Levi-Civita, str. 35 a dál.

[6]) Řecká písmena $\lambda, \mu, \ldots$ psaná zde k typu ξ a později i k jiným typům vpravo nahoře neznamenají tedy mocnitele, nýbrž indexy, jimiž jednotlivé souřadnice či složky prostě číslujeme.

Přitom sčítáme podle každého řeckého indexu, který se vyskytuje zároveň nahoře a dole, od 1 do n, aniž přitom vypisujeme sumační znamení. Tuto úmluvu zavedl A. Einstein a přidržíme se jí i ve všech dalších formulích. V rovnici (2) probíhají tedy indexy λ, μ nezávisle na sobě hodnoty $1, 2, \ldots, n$; výraz stojící na pravé straně této rovnice je pak součtem všech tak vzniklých členů.

Koeficienty $a_{\lambda\mu}$ této kvadratické formy jsou, jak záhy ze vzorců (10) a (12) poznáme, kovariantní složky tensoru; tento tensor nazývá se metrický tensor. Předpokládáme, že determinant

$$\begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12}, & \ldots, & a_{1n} \\ a_{21}, & a_{22}, & \ldots, & a_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ a_{n1}, & a_{n2}, & \ldots, & a_{nn} \end{vmatrix} \tag{3}$$

sestavený z jeho složek, je symetrický ($a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$) a že je ve všech bodech prostoru kladný. (Konkrétní určení složek $a_{\lambda\mu}$ na plochách je uvedeno na začátku odstavce 4.)

Zaveďme tzv. Kroneckerovo delta rovnicemi

$$\delta^{\nu}_{\mu} = \begin{cases} 1 \text{ pro } \mu = \nu \\ 0 \text{ pro } \mu \neq \nu \end{cases}.$$

Soustavy lineárních rovnic

$$a_{\lambda\mu} a^{\lambda\nu} = \delta^{\nu}_{\mu}$$

připouštějí jednoznačné řešení pro $a^{\lambda\nu}$, neboť determinant (3) je nenulový. Z předpokladu $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ plynou i rovnice $a^{\lambda\nu} = a^{\nu\lambda}$. Koeficienty $a^{\lambda\nu}$ jsou kontravariantní složky metrického tensoru.

Rozlišování kontravariantních a kovariantních složek vektorů a tensorů se zde nevyhneme. Charakterisujeme je transformačními rovnicemi při přechodu od jedné soustavy souřadnic k jiné. Jsou-li $'\xi^{\nu}$ ($\nu = 1, 2, \ldots, n$) nové souřadnice, pak transformace souřadnic ξ^{λ} v souřadnice $'\xi^{\nu}$ je dána tak, že $'\xi^{\nu}$ jsou funkcemi n proměnných ξ^{λ}, při čemž Jacobian této transformace (tj. příslušný funkcionální determinant) je nenulový. Zapisujeme to ve tvaru

$$'\xi^{\nu} = {}'\xi^{\nu}(\xi^{\lambda}), \quad \mathrm{Det} \left| \frac{\partial' \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} \right| \neq 0 . \tag{4}$$

Za těchto předpokladů existuje k transformaci (4) transformace inversní, kterou zapisujeme podobně.

$$\xi^{\lambda} = \xi^{\lambda}('\xi^{\nu}), \quad \mathrm{Det} \left| \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial' \xi^{\nu}} \right| \neq 0. \tag{5}$$

Jacobiany těchto transformací jsou determinanty navzájem reciproké, neboť užitím pravidla pro derivování složených funkcí na funkce (4) a (5) dostáváme

$$\frac{\partial' \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\omega}} \frac{\partial \xi^{\omega}}{\partial' \xi^{\mu}} = \delta^{\nu}_{\mu}, \quad \frac{\partial \xi^{\lambda}}{\partial' \xi^{\omega}} \frac{\partial' \xi^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} = \delta^{\lambda}_{\mu} . \tag{6}$$

Kontravariantní složky vektoru jsou při těchto transformacích charakterisovány vzorci

$$'v^{\nu} = \frac{\partial' \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}} v^{\lambda}, \quad v^{\nu} = \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial' \xi^{\lambda}} {}'v^{\lambda} . \tag{7}$$

Každý z těchto vzorců plyne ze zbývajícího z nich. Přitom v^{λ} jsou kontravariantní složky vektoru v původních souřadnicích ξ^λ a $'v^\lambda$ jsou kontravariantní složky téhož vektoru v nových souřadnicích $'\xi^\lambda$. Nejběžnějším příkladem kontravariantních složek vektoru jsou diferenciály funkcí (1), neboť ze (4) plyne

$$d'\xi^\nu = \frac{\partial'\xi^\nu}{\partial\xi^\lambda} d\xi^\lambda , \tag{8}$$

což je v souhlase se vzorci (7), píšeme-li tam $'v^\nu = d'\xi^\nu$, $v^\lambda = d\xi^\lambda$; tyto diferenciály jsou ovšem kontravariantní složky tečného vektoru křivky (1).

Kovariantní složky u_λ nějakého vektoru jsou podobně charakterisovány transformačními vzorci

$$'u_\lambda = \frac{\partial\xi^\nu}{\partial'\xi^\lambda} u_\nu , \quad u_\lambda = \frac{\partial'\xi^\nu}{\partial\xi^\lambda} {'u^\nu} . \tag{9}$$

Tensor o složkách $T^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_q}$ je charakterisován transformačními rovnicemi

$$\left.\begin{aligned} 'T^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_q} &= T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_q} \frac{\partial'\xi^{\lambda_1}}{\partial\xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial'\xi^{\lambda_r}}{\partial\xi^{\alpha_r}} \frac{\partial\xi^{\beta_1}}{\partial'\xi^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial\xi^{\beta_q}}{\partial'\xi^{\mu_q}} , \\ T^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\mu_1 \ldots \mu_q} &= {'T^{\alpha_1 \ldots \alpha_r}_{\beta_1 \ldots \beta_q}} \frac{\partial\xi^{\lambda_1}}{\partial'\xi^{\alpha_1}} \cdots \frac{\partial\xi^{\lambda_r}}{\partial'\xi^{\alpha_r}} \frac{\partial'\xi^{\beta_1}}{\partial\xi^{\mu_1}} \cdots \frac{\partial'\xi^{\beta_q}}{\partial\xi^{\mu_q}} . \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Nezapomeňme, že se zde sčítá podle indexů $\alpha_1, \ldots, \alpha_r, \beta_1, \ldots, \beta_q$, při čemž každý z nich probíhá hodnoty $1, 2, \ldots, n$ nezávisle jeden na druhém. O tomto tensoru říkáme, že je stupně $r + q$, a to r-krát kontravariantní a q-krát kovariantní. Srovnáním vzorců (7) a (9) se vzorci (10) poznáváme, že vektor je tensorem prvního stupně.

Výraz S, který je nezávislý na transformaci souřadnic, takže jeho transformační rovnice můžeme psát ve tvaru

$$'S = S , \tag{11}$$

nazývá se skalár a bývá pokládán za tensor stupně nula. Hledání těchto skalárů je hlavním cílem geometrie na tomto poli, neboť skaláry, jsouce nezávislé na volbě soustavy souřadnic, poskytují přímo geometrické vlastnosti studovaných objektů. Tak na příklad délka oblouku křivky (1) je zřejmě takovým skalárem; protože její výpočet v různých soustavách souřadnic musí dávat stejný výsledek, plyne ze vzorce (2) identita

$$'a_{\alpha\beta} \, d'\xi^\alpha \, d'\xi^\beta = a_{\lambda\mu} \, d\xi^\lambda \, d\xi^\mu ,$$

odkud po dosazení z (8) pohodlně dostaneme

$$\left.\begin{aligned} a_{\lambda\mu} &= {'a_{\alpha\beta}} \frac{\partial'\xi^\alpha}{\partial\xi^\lambda} \frac{\partial'\xi^\beta}{\partial\xi^\mu} , \\ 'a_{\lambda\mu} &= a_{\alpha\beta} \frac{\partial\xi^\alpha}{\partial'\xi^\lambda} \frac{\partial\xi^\beta}{\partial'\xi^\mu} . \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Protože tyto rovnice jsou speciálním případem rovnic (10), je tím potvrzeno, že $a_{\lambda\mu}$ je tensor. Rovnice (12) umožňují určit složky $'a_{\lambda\mu}$ metrického tensoru v nové soustavě souřadnic, známe-li jeho složky $a_{\lambda\mu}$ v soustavě původní. Mechanickým výpočtem se přesvědčíte, že i kontravariantní složky $a^{\lambda\nu}$ metrického tensoru transformují se při změně souřadnic podle vzorců (10).

Abychom si přiblížili význam metrického tensoru, všimněme si, že jsou-li v^λ kontravariantní složky vektoru, jsou složky v_μ, určené těmito vzájemně ekvivalentními vztahy

$$v_\mu = a_{\lambda\mu} v^\lambda\,, \quad v^\lambda = a^{\lambda\mu} v_\mu \tag{13}$$

kovariantní složky nějakého vektoru. Říkáme, že v^λ resp. v_μ vyhovující rovnicím (13), v nichž $a_{\lambda\mu}$ a $a^{\lambda\nu}$ jsou složky metrického tensoru, jsou kontravariantní resp. kovariantní složky téhož vektoru. Délka v tohoto vektoru je pak dána vzorci

$$v = \sqrt{a_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu} = \sqrt{a^{\lambda\mu} v_\lambda v_\mu} = \sqrt{v^\lambda v_\lambda}\,. \tag{14}$$

Vektor, jehož délka je rovna jednotce míry, nazývá se jednotkový vektor. Označíme-li jeho složky i^λ resp. i_λ, je

$$a_{\lambda\mu} i^\lambda i^\mu = 1\,, \quad a^{\lambda\mu} i_\lambda i_\mu = 1\,. \tag{15}$$

Úhel φ dvou vektorů o složkách u^λ, v^λ resp. u_λ, v_λ je určen kterýmkoli z těchto vzorců:

$$\cos\varphi = \frac{a_{\lambda\mu} u^\lambda v^\mu}{\sqrt{a_{\lambda\mu} u^\lambda u^\mu}\sqrt{a_{\lambda\mu} v^\lambda v^\mu}} = \frac{a^{\lambda\mu} u_\lambda v_\mu}{\sqrt{a^{\lambda\mu} u_\lambda u_\mu}\sqrt{a^{\lambda\mu} v_\lambda v_\mu}} = \frac{u^\lambda v_\lambda}{\sqrt{u^\lambda u_\lambda}\sqrt{v^\lambda v_\lambda}}\,. \tag{16}$$

Všimněme si ještě, že vektor nebo tensor, který v jedné soustavě souřadnic má všechny složky rovné nule, podrží tuto vlastnost ve všech soustavách souřadnic — to je vidět ze vzorců (10). Takový tensor se nazývá *nulový tensor*; jde-li o *nulový vektor,* je jeho délka rovna nule.

Je samozřejmé, že hořeními vzorci vyjádřené geometrické pojmy (jako oblouk křivky, vektor a jeho délka, úhel dvou vektorů) jsou zobecněním všeobecně známých stejných pojmů z euklidovského prostoru. Čtenář se o tom snadno přesvědčí, verifikuje-li si všechny dosavadní výpočty pro případ, že se omezí jen na pravoúhlé kartézské souřadnice. Metrický tensor má v tom případě složky

$$a_{\lambda\mu} = \begin{array}{l} 1 \text{ pro } \lambda = \mu\,, \\ 0 \text{ pro } \lambda \neq \mu\,. \end{array}$$

Abychom přirozeným způsobem došli k dalšímu pojmu, totiž k pojmu *konexe,* bude užitečné vyjít právě z euklidovského prostoru vztaženého ke kartézským souřadnicím. Pravoúhlé kartézské souřadnice v n-rozměrném euklidovském prostoru označme pro tuto úvahu $^*\xi^\lambda$. Pro stručnost budeme n-rozměrný euklidovský prostor značit v dalším písmenem $\mathbf{E}_n$. Přímka v $\mathbf{E}_n$ má pak, jak známo, parametrické rovnice

$$^*\xi^\lambda = {}^*\eta^\lambda + s\, {}^*\alpha^\lambda\,.$$

Přitom jsme pro jednoduchost zvolili za parametr oblouk s; naproti tomu $^*\eta^\lambda$ a $^*\alpha^\lambda$ jsou konstanty, $^*\alpha^\lambda$ jsou směrové kosiny přímky. Odtud derivováním pro každou přímku plyne

$$\frac{\mathrm{d}^2\, {}^*\xi^\lambda}{\mathrm{d}s^2} = 0 \tag{17}$$

a obráceně integrováním rovnic (17) dostáváme rovnice přímky. V pravoúhlých kartézských souřadnicích v $\mathbf{E}_n$ jsou tedy přímky charakterisovány podmínkou (17). Přejděme nyní k libovolným, třeba křivočarým souřadnicím ξ^ν transformací $^*\xi^\lambda = {}^*\xi^\lambda(\xi^\nu)$. Je pak [srovnej se vzorci (4) a (8)]

$$\frac{\mathrm{d}^*\xi^\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^*\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu}$$

$$\frac{\mathrm{d}^{2*}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s^2} = \frac{\mathrm{d}^2\xi^\nu}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial^*\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu} + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^{2*}\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu},$$

což dosazeno do rovnic (17) dává

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\nu}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial^*\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu} + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^{2*}\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu} = 0\,.$$

Znásobme každou z těchto rovnic výrazem $\dfrac{\partial\xi^\omega}{\partial^*\xi^\lambda}$ a sečtěme tyto výsledky podle λ ($\lambda = 1, 2, 3 \ldots, n$). Se zřetelem k rovnicím (6) přepsaným pro transformaci zde užitou dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\nu}{\mathrm{d}s^2}\delta^\omega_\nu + \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s}\frac{\partial^{2*}\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu}\frac{\partial\xi^\omega}{\partial^*\xi^\lambda} = 0$$

čili

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\omega}{\mathrm{d}s^2} + \Gamma^\omega_{\nu\mu}\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{18}$$

kde jsme položili

$$\Gamma^\omega_{\nu\mu} = \frac{\partial^{2*}\xi^\lambda}{\partial\xi^\nu\partial\xi^\mu}\frac{\partial\xi^\omega}{\partial^*\xi^\lambda}\,. \tag{19}$$

Jsou tedy přímky euklidovského prostoru v libovolných křivočarých souřadnicích charakterisovány diferenciálními rovnicemi (18). Bližší charakter koeficientů $\Gamma^\omega_{\nu\mu}$ poznáme opět z transformačních vzorců při přechodu od jedněch souřadnic k jiným. Jsou-li $'\xi^\alpha$ libovolné další souřadnice v daném prostoru, pak rovnice přímek v těchto souřadnicích jsou ovšem zase typu (18), tedy

$$\frac{\mathrm{d}^{2\prime}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + {}'\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\frac{\mathrm{d}'\xi^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}'\xi^\gamma}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{20}$$

neboť oblouk s jako skalár je ve všech soustavách souřadnic stejný. Vztah mezi koeficienty $\Gamma^\omega_{\nu\mu}$ a $'\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ z rovnic (18) a (20) najdeme pohodlně přechodem od souřadnic ξ^ω k souřadnicím $'\xi^\alpha$, tedy transformací (4) a (5). Podobnými obraty, jakými jsme při transformaci souřadnic $^*\xi^\lambda$ v souřadnice ξ^ν dospěli z rovnic (17) k rovnicím (18), čtenář užitím transformace $\xi^\omega = \xi^\omega('\xi^\nu)$ dojde z rovnic (18) nejdřív k podmínce

$$\frac{\mathrm{d}^{2\prime}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s^2}\frac{\partial\xi^\omega}{\partial'\xi^\lambda} + \frac{\mathrm{d}'\xi^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}'\xi^\gamma}{\mathrm{d}s}\left[\Gamma^\omega_{\nu\mu}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial'\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial'\xi^\gamma} + \frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial'\xi^\beta\partial'\xi^\gamma}\right] = 0$$

a po vynásobení faktorem $\dfrac{\partial'\xi^\alpha}{\partial\xi^\omega}$ a sečtením podle ω ($\omega = 1, 2, \ldots, n$) konečně k rovnicím

$$\frac{\mathrm{d}^{2\prime}\xi^\alpha}{\mathrm{d}s^2} + \frac{\mathrm{d}'\xi^\beta}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}'\xi^\gamma}{\mathrm{d}s}\left[\Gamma^\omega_{\nu\mu}\frac{\partial'\xi^\alpha}{\partial\xi^\omega}\frac{\partial\xi^\nu}{\partial'\xi^\beta}\frac{\partial\xi^\mu}{\partial'\xi^\gamma} + \frac{\partial^2\xi^\omega}{\partial'\xi^\beta\partial'\xi^\gamma}\frac{\partial'\xi^\alpha}{\partial\xi^\omega}\right] = 0\,.$$

To už je tvar (20), takže porovnáním s ním vycházejí pro transformaci $\Gamma^{\omega}_{\nu\mu}$ vzorce

$$\left.\begin{aligned} {}'\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} &= \Gamma^{\omega}_{\nu\mu} \frac{\partial'\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{\omega}} \frac{\partial\xi^{\nu}}{\partial'\xi^{\beta}} \frac{\partial\xi^{\mu}}{\partial'\xi^{\gamma}} + \frac{\partial^2\xi^{\omega}}{\partial'\xi^{\beta}\partial'\xi^{\gamma}} \frac{\partial'\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{\omega}}, \\ \Gamma^{\omega}_{\nu\mu} &= {}'\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} \frac{\partial\xi^{\omega}}{\partial'\xi^{\alpha}} \frac{\partial'\xi^{\beta}}{\partial\xi^{\nu}} \frac{\partial'\xi^{\gamma}}{\partial\xi^{\mu}} + \frac{\partial^{2}{}'\xi^{\alpha}}{\partial\xi^{\nu}\partial\xi^{\mu}} \frac{\partial\xi^{\omega}}{\partial'\xi^{\alpha}}. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

Druhý z těchto vzorců plyne z prvního z nich už pouhou záměnou obou souřadnicových systémů. Oba vzorce jsou navzájem ekvivalentní a zřejmě se liší podstatně od vzorců (10). To znamená, že $\Gamma^{\omega}_{\nu\mu}$ nejsou složky tensoru.

Nejen v prostoru $\mathbf{E}_n$ ale stejně i v každém zakřiveném prostoru zavádíme pro souhrn složek $\Gamma^{\omega}_{\nu\mu}$, jež se při transformaci souřadnic transformují podle vzorců (21), název *konexe*. Vzorce (21) mají zde stejnou úlohu jako měly vzorce (10) pro tensory; umožňují vypočítat složky konexe v libovolné soustavě souřadnic, jakmile je známe v jedné soustavě souřadnic. Je zřejmé, že v každém prostoru si tak můžeme předepsat libovolně mnoho různých konexí. Každou konexi zadáme na příklad tím způsobem, že její složky $\Gamma^{\omega}_{\nu\mu}$ v jedné soustavě souřadnic prostě zvolíme; tím už je taková konexe určena. Všimněme si, že *konexe z rovnic* (18), *které v prostoru* $\mathbf{E}_n$ *charakterisují přímky, má tu charakteristickou vlastnost, že v kartézských pravoúhlých souřadnicích jsou všechny její složky rovny nule*; to plyne srovnáním rovnic (17) a (18). Proto v tomto případě vzorec (19) je jen speciálním případem druhého ze vzorců (21), kde stačí položit ${}'\Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} = 0$, abychom dostali (19).

Zůstaňme ještě na chvíli v prostoru $\mathbf{E}_n$ a ujasněme si geometrický postup, jímž jsme k pojmu konexe dospěli. Přímka v $\mathbf{E}_n$ má různé charakteristické vlastnosti. My jsme z nich využitkovali tu vlastnost, že ve všech svých bodech má přímka stále tutéž tečnu, čili, populárně řečeno, že přímka v $\mathbf{E}_n$ má stále stejný směr ve všech svých bodech. Při prvním derivování rovnic přímky v pravoúhlých kartézských souřadnicích právě tak jako při částečném integrování rovnic (17) totiž dostáváme

$$\frac{\mathrm{d}^*\xi_{\lambda}}{\mathrm{d}s} = \text{konst},$$

a to v souhlase se vzorci (8) znamená, že tečný vektor přímky je konstantní. Ale přímka v $\mathbf{E}_n$ má také ještě jinou charakteristickou vlastnost, že totiž každá úsečka na ní ležící je nejkratší spojnicí svých krajních bodů. A tato vlastnost souvisí s měřením v prostoru. Musí tedy konexe $\Gamma^{\omega}_{\nu\mu}$ z rovnic přímky (18) být v nějakém vztahu k metrickému tensoru $a_{\lambda\mu}$ tohoto prostoru $\mathbf{E}_n$. Abychom si tuto souvislost ujasnili, zavedeme nejdřív nové symboly $\left\{{\omega \atop \nu\mu}\right\}$ rovnicemi

$$\left\{\begin{matrix}\omega\\ \nu\mu\end{matrix}\right\} = \frac{1}{2} a^{\omega\lambda}[\partial_{\nu}a_{\mu\lambda} + \partial_{\mu}a_{\nu\lambda} - \partial_{\lambda}a_{\nu\mu}], \tag{22}$$

kde jsme použili obvyklé zkratky $\partial_{\nu} = \dfrac{\partial}{\partial\xi^{\nu}}$, takže na příklad $\partial_{\nu}a_{\mu\lambda}$ znamená parciální derivaci $\dfrac{\partial a_{\mu\lambda}}{\partial\xi^{\nu}}$. Výrazy $\left\{\begin{matrix}\omega\\ \nu\mu\end{matrix}\right\}$ se nazývají *Christoffelovy symboly* (často také Christoffelovy symboly druhého druhu). Při přechodu k jiné soustavě souřadnic transformují se tyto symboly $\begin{Bmatrix}\omega\\ \nu\mu\end{Bmatrix}$ podle vzorců (21), jak čtenář snadno zjistí mechanickým výpočtem; musí přitom pochopitelně užít vzorců (10) resp. (12) pro transformaci metrického tensoru a příslušných derivací. Christoffelovy symboly tvoří tedy konexi, říkáme jí *metrická konexe*; protože v pravoúhlých kartézských souřadnicích jsou složky $a_{\mu\lambda}$ konstantní, jsou podle (22) Christoffelovy symboly v této soustavě v $\mathbf{E}_n$ rovny nule a je tedy, podle toho, co bylo dřív řečeno, metrická konexe v $\mathbf{E}_n$ totožná s tou konexí, která vystupuje v rovnicích (18) charakterisujících přímky. Souhrnně tedy řekneme, že všechny přímky v $\mathbf{E}_n$ jsou charakterisovány rovnicemi

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\omega}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix}\omega\\ \nu\mu\end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} = 0\,. \tag{23}$$

V zakřiveném Riemannově prostoru jsou pak rovnice (23) rovnicemi geodetických čar, jak se dokazuje metodami variačního počtu při hledání nejkratší cesty spojující dva body takového prostoru[7]).

Vedle metrické konexe vyskytují se v geometrii i jiné, jimiž se však zde nebudeme zabývat. Pro informaci jen podotýkám, že takové konexe, jež nesouvisí s metrickým tensorem, jsou podkladem ke studiu takových prostorů, kde metrický tensor nemáme k disposici. To už nejsou prostory Riemannovy. Nemáme-li v nich metrický tensor a tudíž ani možnost měření, jsou konexe vlastně jediným východiskem k jejich studiu.

Definice Christoffelových symbolů rovnicemi (22) není symozřejmě vyslovena jen pro prostor $\mathbf{E}_n$. Týmiž rovnicemi definujeme tyto symboly všude tam, kde máme k disposici metrický tensor $a_{\lambda\mu}$. Mechanickým výpočtem vycházejí tyto vztahy:

$$\left.\begin{aligned}\partial_\nu a_{\lambda\mu} &= \begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\nu\end{Bmatrix} a_{\varrho\mu} + \begin{Bmatrix}\varrho\\ \mu\nu\end{Bmatrix} a_{\lambda\varrho}\,,\\ \partial_\nu a^{\lambda\mu} &= -\begin{Bmatrix}\mu\\ \varrho\nu\end{Bmatrix} a^{\lambda\varrho} - \begin{Bmatrix}\lambda\\ \varrho\nu\end{Bmatrix} a^{\varrho\mu}\,.\end{aligned}\right\} \tag{24}$$

K důkazu těchto vzorců stačí dosadit do nich za Christoffelovy symboly ze vzorců (22).

Zakřivení prostoru lze charakterisovat Riemannovým bikvadratickým tensorem, jehož složky $R^\nu_{\omega\mu\lambda}$ jsou dány rovnicemi

$$R^\nu_{\omega\mu\lambda} = \partial_\mu \begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\omega\end{Bmatrix} - \partial_\omega \begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\mu\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\nu\\ \varrho\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\omega\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\nu\\ \varrho\omega\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}. \tag{25}$$

Mechanickým výpočtem se čtenář opět může sám při dostatečné trpělivosti přesvědčit, že složky $R^\nu_{\omega\mu\lambda}$ se při transformaci souřadnic transformují podle vzorců (10) a že tedy tvoří skutečně tensor[8]). K tomu, aby prostor byl „rovný", tedy nezakřivený, je nutné a stačí, aby tensor $R^\nu_{\omega\mu\lambda}$ byl nulový tensor, aby

[7]) Viz na příklad Duschek-Mayer, II. díl, str. 115—119.

[8]) Místo $\begin{Bmatrix}\nu\\ \lambda\mu\end{Bmatrix}$ jsme mohli v rovnicích (25) užít libovolné konexe $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$ a dostali bychom zase bikvadratický tensor, který se nazývá tensor křivosti příslušné konexe $\Gamma^\nu_{\lambda\mu}$. V tomto článku však vystačíme s tensorem křivosti metrické konexe.

tedy pro všechny jeho složky platilo $R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0$; tehdy a jen tehdy lze pak v takovém prostoru zavést soustavu pravoúhlých kartézských souřadnic.[9])

Dosavadní vzorce a výpočty se dají formálně zjednodušit zavedením tzv. *kovariantní* resp. *absolutní derivace*. K zavedení těchto pojmů vede i ta okolnost, že v křivočarých souřadnicích obyčejným derivováním tensoru nedostaneme (až na nepatrné výjimky) tensor. Už pro vektor dostáváme na příklad derivováním vzorců (7)

$$\frac{\partial v^{\nu}}{\partial \xi^{\mu}} = \frac{\partial^2 \xi^{\nu}}{\partial' \xi^{\lambda}\, \partial' \xi^{\omega}} \frac{\partial' \xi^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} {'v^{\lambda}} + \frac{\partial \xi^{\nu}}{\partial' \xi^{\lambda}} \frac{\partial' \xi^{\omega}}{\partial \xi^{\mu}} \frac{\partial' v^{\lambda}}{\partial' \xi^{\omega}} .$$

Srovnáním se vzorci (10) vidíme, že $\frac{\partial v^{\nu}}{\partial \xi^{\mu}}$ není tensor, neboť při transformaci křivočarých souřadnic musíme připustit možnost $\frac{\partial^2 \xi^{\nu}}{\partial' \xi^{\lambda}\, \partial' \xi^{\omega}} \neq 0$.

Kovariantní derivaci libovolného tensoru o složkách $g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ *značíme* $\mathrm{D}_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ *a definujeme ji rovnicemi*

$$\begin{aligned} \mathrm{D}_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} &= \partial_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} + \\ + \left\{ {\lambda_1 \atop \varrho\mu} \right\} g^{\varrho\lambda_2 \ldots \lambda_r}_{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_s} &+ \left\{ {\lambda_2 \atop \varrho\mu} \right\} g^{\lambda_1\varrho \ldots \lambda_r}_{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_s} + \ldots + \left\{ {\lambda_r \atop \varrho\mu} \right\} g^{\lambda_1\lambda_2 \ldots \varrho}_{\omega_1\omega_2 \ldots \omega_s} - \\ - \left\{ {\varrho \atop \omega_1\mu} \right\} g^{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r}_{\varrho\omega_2 \ldots \omega_s} &- \left\{ {\varrho \atop \omega_2\mu} \right\} g^{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r}_{\omega_1\varrho \ldots \omega_s} - \ldots - \left\{ {\varrho \atop \omega_s\mu} \right\} g^{\lambda_1\lambda_2 \ldots \lambda_r}_{\omega_1\omega_2 \ldots \varrho} . \end{aligned} \tag{26}$$

Užitím vzorců (10) a (21) může se čtenář přesvědčit, že kovariantní derivace tensoru je opět tensor; přitom $g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ je tensor stupně $r + s$ (r-krát kontravariantní a s-krát kovariantní) a $\mathrm{D}_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ je tensor stupně $r + s + 1$ (r-krát kontravariantní a $(s + 1)$-krát kovariantní).[10]) Kovariantní derivace vektoru v^{ν} je tedy podle toho dána vzorcem

$$\mathrm{D}_{\mu} v^{\omega} = \partial_{\mu} v^{\omega} + \left\{ {\omega \atop \nu\mu} \right\} v^{\nu} . \tag{27}$$

Protože skalár S počítáme mezi tensory jako tensor stupně 0, zahrnujeme i tento případ do definice (26) rovnicí

$$\mathrm{D}_{\mu} S = \partial_{\mu} S . \tag{28}$$

Pomocí kovariantní derivace zavádíme dále pojem absolutní derivace tensoru. *Jsou-li složky* $g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ *tensoru funkcemi skalární proměnné t, značíme absolutní derivaci tohoto tensoru podle t znakem* $\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$ *nebo* $\frac{\mathrm{D} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}}{\mathrm{d}t}$ a definujeme ji vztahem

$$\frac{\mathrm{D}}{\mathrm{d}t} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} = \frac{\mathrm{d}\xi^{\mu}}{\mathrm{d}t} \mathrm{D}_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} . \tag{29}$$

Výraz

$$\mathrm{D} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} = \mathrm{d}\xi^{\mu}\, \mathrm{D}_{\mu} g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$$

nazývá se absolutní diferenciál tensoru $g^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$.

---

[9]) Viz na př. Duschek-Mayer, II. díl, str. 121—122.

[10]) Užijeme-li ve vzorcích (26) místo $\left\{ {\nu \atop \lambda\mu} \right\}$ libovolné konexe $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$, dostaneme definici kovariantní derivace vzhledem ke konexi $\Gamma^{\nu}_{\lambda\mu}$. Zde však vystačíme s definicí podanou v textu.

Čtenář snadno zjistí, že pro absolutní diferenciál resp. absolutní derivaci zachovávají se formálně běžná pravidla pro derivování součtu a součinu, zvláště tedy

$$\mathrm{D}(U + V) = \mathrm{D}(U) + \mathrm{D}(V)$$
$$\mathrm{D}(UV) = U\,\mathrm{D}(V) + V\,\mathrm{D}(U)\,,$$

kde U, V jsou tensory (předpokládá se ovšem, že v prvém případě jsou to tensory téhož typu, takže $U + V$ je zase tensor).

Pro absolutní derivaci kontravariantního vektoru v^ω dostáváme ze vzorce (27) rovnice

$$\frac{\mathrm{D}v^\omega}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v^\omega}{\mathrm{d}t} + \begin{Bmatrix}\omega\\ \nu\mu\end{Bmatrix} v^\nu \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}\,. \tag{30}$$

Rovnice (18) lze pak přepsat na jednoduchý tvar

$$\frac{\mathrm{D}i^\omega}{\mathrm{d}s} = 0\,, \tag{31}$$

kde

$$i^\omega = \frac{\mathrm{d}\xi^\omega}{\mathrm{d}s}\,.$$

Vektor i^ω je jednotkový tečný vektor zkoumané křivky (1), s značí stále její oblouk. Pro přímku je ovšem její jednotkový tečný vektor konstantní a obráceně; v kartézských souřadnicích se to charakterisuje tím, že obyčejná derivace tohoto vektoru podle oblouku s je rovna nule. V křivočarých souřadnicích je pak tato podmínka nahrazena obdobnými rovnicemi (31); jen obyčejná derivace je tu nahrazena derivací absolutní. Hraje tedy absolutní derivace v křivočarých souřadnicích podobnou úlohu jako obyčejná derivace v souřadnicích kartézských. Tuto analogii lze sledovat i dále. Bez důkazu budiž zde upozorněno aspoň na známé vzorce Frenetovy. V pravoúhlých kartézských souřadnicích v $\mathbf{E}_3$ buďtež $^*t^\lambda$, $^*n^\lambda$, $^*b^\lambda$ jednotkové vektory tečny, hlavní normály a binormály dané křivky. Jejich derivace podle oblouku jsou dány známými Frenetovými vzorci

$$\frac{\mathrm{d}^*t^\lambda}{\mathrm{d}s} = k_1{}^*n^\lambda\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^*n^\lambda}{\mathrm{d}s} = -\,k_1{}^*t^\lambda + k_2{}^*b^\lambda\,,$$
$$\frac{\mathrm{d}^*b^\lambda}{\mathrm{d}s} = -\,k_2{}^*n^\lambda\,.$$

Přitom k_1, k_2 jsou skalární křivosti dané křivky. Transformací kartézských souřadnic v křivočaré přejdou složky $^*t^\lambda$, $^*n^\lambda$, $^*b^\lambda$ ve složky t^λ, n^λ, b^λ a vzorce Frenetovy nabudou tvaru[11])

$$\frac{\mathrm{D}t^\lambda}{\mathrm{d}s} = k_1 n^\lambda\,,$$
$$\frac{\mathrm{D}n^\lambda}{\mathrm{d}s} = -\,k_1 t^\lambda + k_2 b^\lambda\,,$$
$$\frac{\mathrm{D}b^\lambda}{\mathrm{d}s} = -\,k_2 n^\lambda\,.$$

[11]) Srovnej např. Eisenhart, str. 106.

I zde vystupuje tedy absolutní derivace na místě, kde v kartézských souřadnicích stála obyčejná derivace.

Obyčejná derivace je ovšem speciálním případem absolutní derivace pro případ, že užijeme kartézských souřadnic, kde, jak víme, je $\{^{\nu}_{\lambda\mu}\} = 0$. Tolik k všeobecnému významu absolutní derivace. Využitkujeme ji ještě v dalších odstavcích.

3. Paralelismus v zakřivených prostorech

Je samozřejmé, že složky tensoru, konexe a jiné z nich odvozené objekty jsou podstatně závislé na tom, v kterém bodě v prostoru je počítáme. To je vidět už z toho, že v příslušných transformačních vzorcích vystupují derivace $\frac{\partial' \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda}}$, $\frac{\partial^{2\prime} \xi^{\nu}}{\partial \xi^{\lambda} \partial \xi^{\mu}}$ atd. Přesvědčte se o tom na příklad tím, že metrický tensor v $\mathbf{E}_n$ určíte v polárních souřadnicích. To znamená, že v zakřivených prostorech už i pojem vektoru je vázán na místo, v němž tento vektor definujeme resp. sestrojujeme. Jeho složky v^{λ} resp. v_{μ} jsou funkcemi bodu; v zakřivených prostorech mluvíme tedy o vektoru v bodě. Podobně je to s tensory i konexemi atd. A neuvedli jsme si prozatím prostředek, který by nám umožnil porovnávat dva vektory sestrojené v různých bodech takového prostoru. V euklidovském prostoru je věc jednoduchá; tam je od pradávna znám pojem rovnoběžnosti a říkáme, že dva vektory sestrojené ve dvou různých bodech P, Q toho prostoru jsou stejné, když jsou rovnoběžné, stejně dlouhé a stejně orientované. Ve výpočtech projevuje se to tím způsobem, že složky takových vektorů jsou konstantní, nezávislé na umístění vektoru v prostoru; analyticky je to v kartézských souřadnicích dáno rovnicemi

$$\mathrm{d}v^{\lambda} = 0\,. \tag{32}$$

To nám v elementární analytické geometrii euklidovského prostoru umožňuje definici tzv. *volného vektoru*[12]), tj. vektoru nezávislého na tom, v kterém bodě v prostoru zvolíme jeho počáteční bod. Ale v zakřivených prostorech takový jednoduchý prostředek nemáme. Uvědomíme-li si však jistou analogii obyčejného diferenciálu z elementární geometrie s absolutním diferenciálem v zakřivených prostorech, je nasnadě zobecnit rovnoběžnost z euklidovského prostoru pro obecnější případy; přitom hned rozšíříme tuto definici i v tom směru, že ji podáme pro libovolný tensor, nikoli jen pro vektor.

V diferenciálních rovnicích (32) je třeba předpokládat, že složky v^{λ} jsou funkcemi nějaké proměnné. Všeobecně nazveme *polem vektorů* resp. tensorů takovou množinu vektorů resp. tensorů, jejichž složky jsou funkcemi několika nezávislých proměnných. Zde vystačíme s polem tensorů podél křivky; je to jednoparametrické pole, neboť sestrojíme-li v každém bodě křivky příslušný vektor resp. tensor, jsou jeho složky závislé na jednom volitelném parametru, totiž na tom parametru, který charakterisuje příslušný bod křivky. Příkladem takového pole jsou tečné vektory křivky nebo vektory hlavních normál té křivky a pod. Přistupme nyní k zobecnění pojmu rovnoběžnosti, jak je zavedl T. Levi-Civita.

Definice. *Budiž dána křivka* (1) *a podél ní pole tensorů* $T^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s}$. *Říkáme, že tyto tensory tvoří podél křivky* (1) *pole tensorů paralelních, platí-li podél této křivky rovnice*

$$\mathrm{D}T^{\lambda_1 \ldots \lambda_r}_{\omega_1 \ldots \omega_s} = 0\,. \tag{33}$$

[12]) Viz např. Kraemer, str. 51.

Místo o poli paralelních tensorů podél křivky mluvíme také o paralelním přenosu nebo posunu tensorů podél křivky. Křivka, podél níž paralelní posun provádíme, nevystupuje v pojmu rovnoběžnosti v $\mathbf{E}_n$ jen zdánlivě; ale je přirozené, že chceme-li vektor posunout z jednoho bodu prostoru do jiného bodu téhož prostoru, musíme ho přenášet po nějaké cestě. Zanedbání křivky (1) při definici rovnoběžnosti v $\mathbf{E}_n$ umožňuje ostatně jen věta 4, kterou záhy poznáme; v zakřivených prostorech však křivka, podél níž paralelní přenos provádíme, vystupuje výrazně.

Podmínka (32) v $\mathbf{E}_n$ je ovšem speciálním případem podmínky (33), neboť v kartézských souřadnicích je $\left\{{\nu \atop \lambda\mu}\right\} = 0$.

Triviální příklad pole paralelních tensorů v Riemannových prostorech poskytuje metrický tensor, neboť z rovnic (24) ihned vychází

$$\mathrm{D}_\omega a_{\lambda\mu} = 0\,, \quad \mathrm{D}_\omega a^{\nu\mu} = 0\,.$$

Všimněme si nejdřív, které z běžných vlastností rovnoběžnosti v $\mathbf{E}_n$ tento zobecněný pojem paralelismu v zakřivených prostorech zachovává.

Předpokládejme, že u^λ resp. v_λ jsou kontravariantní resp. kovariantní složky dvou vektorů paralelně posunutých podél křivky (1). Je tedy podél naší křivky $\mathrm{D}u^\lambda = 0$, $\mathrm{D}v_\lambda = 0$. Odtud plyne

$$\mathrm{D}(u^\lambda v_\lambda) = u^\lambda\, \mathrm{D}v_\lambda + v_\lambda\, \mathrm{D}u^\lambda = 0\,.$$

Protože však pro skalár $u^\lambda v_\lambda$ je $\mathrm{D}(u^\lambda v_\lambda) = \mathrm{d}(u^\lambda v_\lambda)$, dostáváme $u^\lambda v_\lambda = \text{konst}$. Klademe-li zde speciálně $u^\lambda = v^\lambda = a^{\lambda\mu} v_\mu$, dostáváme z rovnic (14) tuto větu:

Věta 1. *Délka vektoru se při paralelním posunutí podél křivky nemění.*

Pro úhel φ dvou vektorů máme vzorec (16), speciálně

$$\cos\varphi = \frac{u^\lambda v_\lambda}{\sqrt{u^\lambda u_\lambda}\,\sqrt{v^\lambda v_\lambda}}\,.$$

Pro každý z vektorů platí věta 1. Z hořeních výpočtů tedy vychází:

Věta 2. *Úhel dvou vektorů se při paralelním posunutí podél křivky nemění.*

Ptáme-li se, pro kterou křivku tvoří její tečné vektory pole vektorů paralelních, dojdeme ke křivce geodetické. Neboť je-li s oblouk křivky (1), je $i^\lambda = \dfrac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s}$ její jednotkový tečný vektor a jeho paralelní přenos podél této křivky je charakterisován vztahem $\dfrac{\mathrm{D}i^\lambda}{\mathrm{d}s} = 0$, to jest

$$\frac{\mathrm{d}^2\xi^\lambda}{\mathrm{d}s^2} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\,\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} = 0\,.$$

To je rovnice křivek geodetických[13]). Jsou tedy v Riemannových prostorech geodetické křivky křivkami autoparalelními podobně, jako přímky v $\mathbf{E}_n$, jak jsme poznali v předcházejícím odstavci. Můžeme proto vyslovit další analogii s rovnoběžností v $\mathbf{E}_n$:

Věta 3. *Jednotkové tečné vektory křivky tvoří podél ní pole vektorů paralelních tehdy a jen tehdy, je-li tato křivka geodetická.*

---

[13]) Duschek-Mayer, II. díl, str. 116; na plochách viz Hlavatý str. 169; Kagan, I. díl str. 414; Eisenhart str. 171.

Zobecnění pojmu rovnoběžnosti nezachovává ovšem v zakřivených prostorech všechny vlastnosti rovnoběžnosti z $\mathbf{E}_n$. Zvláště je důležité si všimnout, že výsledek paralelního přenosu vektoru z jednoho bodu P do druhého bodu Q je závislý na tom, podél které křivky spojující body P, Q tento vektor přenášíme; změníme-li cestu přenosu, změní se ve většině případech i výsledek paralelního posunu. Nahlédneme to snadno, rozřešíme-li otázku opačnou. Ptejme se, kdy tento přenos je na cestě z bodu P do bodu Q nezávislý. Vyšetřeme to pro kontravariantní vektor v^λ. Jeho paralelní přenos z bodu P do bodu Q po křivce (1) je tedy dán podmínkou (s je oblouk křivky (1))

$$\frac{\mathrm{D}v^\lambda}{\mathrm{d}s} \equiv \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s}\left(\frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\mu} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} v^\nu\right) = 0\,. \tag{34}$$

Platí-li nyní

$$\frac{\partial v^\lambda}{\partial \xi^\mu} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} v^\nu = 0 \tag{35}$$

pro každý vektor v^λ, je podmínka (34) automaticky splněna pro každou křivku (1) procházející body P, Q; podmínka (35) je tedy postačující k tomu, aby paralelní přenos byl nezávislý na křivce (1). Obráceně, je-li pro každý vektor v^λ tento přenos nezávislý na křivce (1), jsou rovnice (34) splněny pro každé $\frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}t}$ a tedy pro každý vektor v^λ platí pak nutně i rovnice (35). Podmínky integrability systému (35) jsou

$$\frac{\partial}{\partial \xi^\omega}\left(\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} v^\nu\right) = \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\left(\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\omega\end{Bmatrix} v^\nu\right),$$

to jest

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\omega}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\omega\end{Bmatrix}\right) v^\nu + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix}\frac{\partial v^\nu}{\partial \xi^\omega} - \begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\omega\end{Bmatrix}\frac{\partial v^\nu}{\partial \xi^\mu} = 0\,.$$

Dosadíme-li sem za $\frac{\partial v^\nu}{\partial \xi^\omega}$ z rovnic (35), máme při vhodném označení němých indexů tuto podmínku:

$$\left(\frac{\partial}{\partial \xi^\omega}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\mu\end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial \xi^\mu}\begin{Bmatrix}\lambda\\ \nu\omega\end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \varrho\omega\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \nu\mu\end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix}\lambda\\ \varrho\mu\end{Bmatrix}\begin{Bmatrix}\varrho\\ \nu\omega\end{Bmatrix}\right) v^\nu = 0\,.$$

Srovnáním se vzorcem (25) dostáváme tedy jako podmínky integrability systému (35) rovnice

$$R^\lambda_{\mu\omega\nu} v^\nu = 0\,.$$

Má-li pro každý vektor v^ν být paralelní přenos nezávislý na cestě, po níž vektor přenášíme, musí být systém rovnic (35) řešitelný pro každé v^ν, tj. poslední rovnice musí být splněna pro všechny vektory a obráceně. K téže podmínce dojdeme i v tom případě, když místo kontravariantního vektoru v^ν budeme stejným způsonem vyšetřovat kovariantní vektor u_λ a jeho paralelní přenos. Docházíme tak k větě:

Věta 4. *Paralelní přenos vektorů je nezávislý na křivce, podél níž vektory přenášíme, tehdy a jen tehdy, když $R^\lambda_{\mu\omega\nu} = 0$, tj. když Riemannův bikvadratický tensor křivosti je nulový tensor.*

Prostory s touto vlastností jsou všechny ty, v nichž lze zavést pravoúhlé kartézské souřadnice, tj. prostory isometrické s $\mathbf{E}_n$.

V posledním 4. odstavci je ukázána přímá a názorná konstrukce paralelního přenosu na obyčejných plochách.

4. Paralelní přenos vektorů na plochách

Aplikujme předcházející výpočty na plochy vnořené do trojrozměrného euklidovského prostoru $\mathbf{E}_3$. Každá taková plocha Π je dvojrozměrným Riemannovým prostorem $\mathbf{R}_2$, jak záhy uvidíme. Rozlišení obou těchto prostorů ($\mathbf{E}_3$ a $\mathbf{R}_2$) provedeme odlišným označením souřadnic. Na ploše Π ponecháme pro křivočaré souřadnice označení ξ^λ ($\lambda = 1, 2$) z předcházejících odstavců, kdežto pro označení souřadnic v $\mathbf{E}_3$ užijeme latinky; vystačíme zde jen s jediným systémem souřadnic, označíme prostě x^i ($i = 1, 2, 3$) pravoúhlé kartézské souřadnice v $\mathbf{E}_3$. Plocha Π v tomto prostoru je parametricky dána rovnicemi

$$x^i = x^i(\xi^\lambda)\,, \quad \begin{pmatrix} i = 1, 2, 3 \\ \lambda = 1, 2 \end{pmatrix}, \tag{36}$$

kde $x^i(\xi^\lambda)$ jsou tři funkce dvou nezávisle proměnných ξ^1, ξ^2; předpokládáme, že tyto funkce mají spojité parciální derivace až do druhého řádu včetně a že první parciální derivace nejsou v žádném bodě plochy současně rovny nule. Pro čtverec diferenciálu oblouku křivky ležící na ploše Π dostáváme z elementárního vzorce v souřadnicích x^i vyjádření

$$\mathrm{d}s^2 = \sum_{i=1}^{3} \mathrm{d}x^i\, \mathrm{d}x^i \geqq 0\,.$$

Z rovnic (36) vychází pro diferenciály

$$\mathrm{d}x^i = \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\lambda}\, \mathrm{d}\xi^\lambda$$

a tedy

$$\mathrm{d}s^2 = a_{\lambda\mu}\, \mathrm{d}\xi^\lambda\, \mathrm{d}\xi^\mu\,, \tag{37}$$

kde

$$a_{\lambda\mu} = \sum_{i=1}^{3} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\mu} = a_{\mu\lambda}\,. \tag{38}$$

Protože v $\mathbf{E}_3$ je pro každý nenulový vektor vždy $\mathrm{d}s^2 > 0$, je metrický tensor $a_{\lambda\mu}$ plochy Π positivně definitní; tím je potvrzeno, že tato plocha je Riemannovým prostorem $\mathbf{R}_2$.

Z tensoru $a_{\lambda\mu}$ tvoříme Christoffelovy symboly i tensor $R^{\nu}_{\omega\lambda\mu}$ plochy Π způsobem popsaným v předcházejících odstavcích; v důsledku symetrie $a_{\lambda\mu} = a_{\mu\lambda}$ metrického tensoru jsou i Christoffelovy symboly v dolních indexech symetrické tj. platí $\{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\} = \{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\}$. Vedle prvního metrického tensoru $a_{\lambda\mu}$ zavádíme na ploše Π ještě druhý tensor $b_{\lambda\mu}$; k jeho konstrukci užijeme normály plochy Π. Směrové kosiny této normály v soustavě souřadnic x^i označme n^i, jsou tedy n^i složky jednotkového vektoru v $\mathbf{E}_3$ a je

$$n^1 : n^2 : n^3 = \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1}, & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1}, & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2}, & \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2} \end{vmatrix} : \begin{vmatrix} \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1}, & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2} \end{vmatrix}.$$

Orientujme tento vektor tak, aby bylo

$$\begin{vmatrix} n^1, & n^2, & n^3 \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^1}, & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^1}, & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^1} \\ \dfrac{\partial x^1}{\partial \xi^2}, & \dfrac{\partial x^2}{\partial \xi^2}, & \dfrac{\partial x^3}{\partial \xi^2} \end{vmatrix} > 0 . \tag{39}$$

Pak lze konstrukci tensoru $b_{\lambda\mu}$ popsat jednoduše formulemi

$$b_{\lambda\mu} = -\sum_{i=1}^{3} \frac{\partial n^i}{\partial \xi^\lambda} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\mu} = \sum_{i=1}^{3} n^i \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} = b_{\mu\lambda} , \tag{40}$$

jak se čtenář dočte v běžných učebnicích diferenciální geometrie. V důsledku nerovnosti (39) lze vektory n^i, $\dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^1}$, $\dfrac{\partial x^i}{\partial \xi^2}$ zvolit za basi příslušného vektorového prostoru a každý další vektor v $\mathbf{E}_3$ vyjádřit jako jejich lineární kombinaci. Zvláště platí

$$\frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} = \begin{Bmatrix} \alpha \\ \lambda\mu \end{Bmatrix} \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} + b_{\lambda\mu} n^i . \tag{41}$$

To jsou tzv. rovnice Gaussovy[14]) (nezapomeňme, že se zde sčítá podle α).

Připomeňme si dále, že plochy rozvinutelné na rovinu (isometrické s rovinou) nazýváme stručně plochami rozvinutelnými a že jsou charakterisovány rovnicemi $R^{\nu}_{\omega\mu\lambda} = 0$. Na základě slavné věty Gaussovy (teorema egregium) je tato podmínka ekvivalentní s podmínkou

$$b_{11}b_{22} - b_{12}^2 = 0 .$$

Integrací této rovnice[15]) vychází, že rozvinutelné plochy v $\mathbf{E}_3$ jsou ty plochy, které jsou obálkou jednoparametrického systému rovin, tedy kužele, válce a plochy tečen prostorových křivek a samozřejmě i rovina sama. Z věty 4 plyne:

Věta 5. *Na rozvinutelné ploše je paralelní přenos nezávislý na cestě.*

Rozvinutelnou plochu lze zobrazit na rovinu tak, že při vhodných volbách souřadnic ξ^λ v ploše i v rovině složky $a_{\lambda\mu}$ metrického tensoru této plochy i složky metrického tensoru roviny jsou v přiřazených si bodech sobě rovny. Toto zobrazení se nazývá rozvinutí plochy na rovinu. Protože metrický tensor $a_{\lambda\mu}$ se při rozvinutí nemění, nemění se ani všechny ty vlastnosti, které lze pomocí metrického tensoru popsat. S tensorem $a_{\lambda\mu}$ zachovají se i Christoffelovy symboly a tedy i rovnice geodetických čar. Geodetickou čarou v rovině je ovšem přímka. Platí tedy:

Věta 6. *Geodetická křivka rozvinutelné plochy přejde při rozvinutí této plochy na rovinu do přímky.*

Obě poslední věty 5 a 6 dostatečně charakterisují paralelismus na rozvinutelných plochách. Je-li u^λ tečný vektor geodetické křivky a v^λ jiný vektor, který paralelně posouváme podél této geodetické křivky, zachová se v dů-

[14]) Hlavatý str. 262; Kagan, I. díl, str. 374; Eisenhart str. 216.
[15]) Hlavatý, str. 233; Kagan, I. díl, str. 273—4 a 283.

sledku věty 2 úhel obou těchto vektorů u^λ, v^λ; v rozvinutí do roviny to podle vět 5 a 6 znamená, že vektor v^λ svírá s přímkou, podél níž se posouvá, stále týž úhel; je tedy tento paralelismus identický s pojmem klasické rovnoběžnosti v rovině. (Mechanicky se ovšem rozvinutí plochy rozvinutelné Π na rovinu nejsnáze interpretuje valením plochy Π po té rovině, tečné roviny plochy splývají přitom postupně s danou rovinou.)

Obraťme se nyní k ostatním, nikoli nutně rozvinutelným plochám. Budiž Π libovolná plocha a budiž C křivka na této ploše ležící. Zvolme parametry ξ^λ na ploše Π tak, aby křivka C byla parametrickou křivkou o rovnicích

$$\xi^1 = s\,, \quad \xi^2 = 0\,, \tag{42}$$

kde s je oblouk křivky C a aby parametrická síť byla tvořena křivkami sdruženými vzhledem k druhému tensoru $b_{\lambda\mu}$ plochy Π[16]). K tomu je nutné a stačí, aby bylo

$$b_{\lambda\mu} j^\lambda i^\mu = 0\,, \tag{43}$$

kde i^λ, j^λ jsou kontravariantní složky tečných vektorů parametrických křivek. Označení zvolme tak, aby tečný vektor křivky C byl i^λ; ze (42) pak plyne, že v bodech křivky C je při této volbě

$$i^1 = \frac{\mathrm{d}\xi^1}{\mathrm{d}s} = 1\,, \quad i^2 = \frac{\mathrm{d}\xi^2}{\mathrm{d}s} = 0\,. \tag{44}$$

Píšeme-li rovnice křivky C v prostoru ve tvaru

$$x^i = f^i(s)\,, \tag{45}$$

jsou $f^i(s)$ funkce oblouku s, které vzniknou dosazením z rovnic (42) do funkcí $x^i(\xi^\lambda)$ z rovnic (36) plochy Π. Jest pak při podmínkách (44)

$$\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda}\frac{\mathrm{d}\xi^\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^1}\,. \tag{46}$$

Vyšetřování paralelismu na ploše Π podél křivky C převedeme nyní na známý nám už případ, totiž na vyšetřování paralelismu na ploše rozvinutelné. Sestrojíme prostě rozvinutelnou plochu $^*\Pi$, která se plochy Π v bodech křivky C dotýká. Taková plocha $^*\Pi$ je jediná, je to obálka jednoparametrického systému rovin, totiž tečných rovin dané plochy Π v bodech křivky C. Z teorie ploch je známo, že povrchové přímky plochy $^*\Pi$ jsou tečnami křivek sdružených s křivkou C na ploše Π podle tensoru $b_{\lambda\mu}$[17]). Zvolíme-li křivku C o rovnicích (45) za křivku řídicí plochy $^*\Pi$, budou rovnice této přímkové plochy mít tvar

$$^*x^i = f^i(s) + t g^i(s)\,; \tag{47}$$

funkce $g^i = g^i(s)$ jsou úměrné směrovým kosinům povrchových přímek plochy $^*\Pi$ a jsou samozřejmě závislé na s. Plocha $^*\Pi$ je tak vztažena k parametrům

$$^*\xi^1 = s\,, \quad ^*\xi^2 = t\,. \tag{48}$$

Při pevném s a proměnném t dávají rovnice (47) povrchovou přímku plochy $^*\Pi$. Tato přímka je podle předpokladu tečnou parametrické křivky plochy Π

[16]) V našich výpočtech tedy předpokládáme, že křivka C není křivkou asymptotickou plochy Π. Pro geometrickou interpretaci, kterou sledujeme, nehraje toto omezení žádnou roli.

[17]) Viz např. Hlavatý, str. 303, věta (2,3); Eisenhart, str. 231, § 42.

sdružené s křivkou C; směr této tečny je v prostoru $\mathbf{E}_3$ určen funkcemi $g^i(s)$ a v ploše Π vektorem j^λ, vyhovujícím rovnici (43), je tedy

$$g^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} j^\lambda . \tag{49}$$

Pro paralelní přenos na ploše $^*\Pi$ je třeba určit potřebné elementy této plochy z rovnic (47). Označíme je stejnými znaky jako u plochy Π, připojíme k nim jen naši hvězdičku vlevo nahoře. Značí tedy $a_{\lambda\mu}$, $\{^{\nu}_{\lambda\mu}\}$ ... atd. veličiny plochy Π a $^*a_{\lambda\mu}$, $^*\{^{\nu}_{\lambda\mu}\}$ ... atd. obdobné veličiny plochy $^*\Pi$. Ale napřed provedeme ještě pomocný výpočet. Derivací rovnic (49) podle s dostaneme:

$$\frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu} \frac{\mathrm{d}\xi^\mu}{\mathrm{d}s} j^\lambda + \frac{\partial x^i}{\eta \xi^\lambda} \frac{\mathrm{d}j^\lambda}{\mathrm{d}s} .$$

Dosadíme-li sem za $\dfrac{\partial^2 x^i}{\partial \xi^\lambda \partial \xi^\mu}$ z Gaussových rovnic (41) a užijeme-li vztahů (30), (43) a (44), máme po jednoduchém počtu výsledek

$$\frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\mathrm{D}j^\alpha}{\mathrm{d}s} . \tag{50}$$

Z rovnic (47) plochy $^*\Pi$ vychází se zřetelem k (48) přímo

$$\frac{\partial^* x^i}{\partial^* \xi^1} = \frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s} + t \frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s} , \quad \frac{\partial^* x^i}{\partial^* \xi^2} = g^i .$$

Odtud pro metrický tensor $^*a_{\lambda\mu}$ plochy $^*\Pi$ dostáváme (srovnej se vzorci (38)):

$$\left.\begin{aligned} {}^*a_{11} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s} + t \frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s}\right)\left(\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s} + t \frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s}\right) \\ {}^*a_{12} = {}^*a_{21} &= \sum_{i=1}^{3} \left(\frac{\mathrm{d}f^i}{\mathrm{d}s} + t \frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s}\right) g^i \\ {}^*a_{22} &= \sum_{i=1}^{3} g^i g^i . \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Tyto vzorce se zjednoduší vlivem naší speciální volby parametrů na ploše Π.

Vektor ležící v tečné rovině plochy Π je na ploše Π určen kontravariantními složkami v^λ ($\lambda = 1, 2$) a v prostoru $\mathbf{E}_3$ složkami v^i ($i = 1, 2, 3$), jejichž vzájemná souvislost je dána rovnicemi

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} v^\lambda . \tag{52}$$

Pro tečný vektor parametrické křivky $\xi^1 =$ konst. plochy Π můžeme psát v souhlase s označením zavedeným v rovnici (43)

$$v^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^2} , \quad v^\lambda = j^\lambda .$$

Z rovnic (52) pak vychází na ploše Π pro kontravariantní složky tečného vektoru křivek sdružených s křivkou C

$$j^1 = 0 , \quad j^2 = 1 . \tag{53}$$

Pak se rovnice (49) zjednoduší na tvar

$$g^i = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^2}\,. \tag{54}$$

Pro absolutní derivaci vektoru j^λ dostáváme [za těchto podmínek (53)]

$$\frac{\mathrm{D}j^\lambda}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}j^\lambda}{\mathrm{d}s} + \begin{Bmatrix}\lambda\\ \mu\nu\end{Bmatrix} j^\mu \frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s} = \begin{Bmatrix}\lambda\\ 2\nu\end{Bmatrix}\frac{\mathrm{d}\xi^\nu}{\mathrm{d}s}\,.$$

Podél křivky C, kde absolutní derivaci počítáme, je pak vlivem (44)

$$\frac{\mathrm{D}j^\lambda}{\mathrm{d}s} = \begin{Bmatrix}\lambda\\ 21\end{Bmatrix}.$$

Na základě rovnic (50) to znamená, že v bodech křivky C máme

$$\frac{\mathrm{d}g^i}{\mathrm{d}s} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha}\begin{Bmatrix}\alpha\\ 21\end{Bmatrix}.$$

Se zřetelem k této rovnici a k rovnicím (46) a (54) dostáváme ze vzorců (51)

$$\left.\begin{aligned} {}^*a_{11} &= a_{11} + 2tM + t^2\left[\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix} N\right],\\ {}^*a_{12} &= {}^*a_{21} = a_{12} + tN\,,\\ {}^*a_{22} &= a_{22}\,,\end{aligned}\right\} \tag{55}$$

kde jsme pro stručnost položili

$$M = a_{11}\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix} + a_{12}\begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix},\quad N = a_{12}\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix} + a_{22}\begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix}.$$

Elementy $a_{\lambda\mu}$, $\{{}^{\nu}_{\mu\lambda}\}$ plochy Π jsou zde počítány v příslušných bodech křivky C. Metrický tensor ${}^*a_{\lambda\mu}$ plochy ${}^*\Pi$ je tedy v rovnicích (55) vyjádřen pomocí elementů plochy Π počítaných v těch bodech, v nichž příslušné površky plochy ${}^*\Pi$ protínají křivku C. Chci-li tedy ${}^*a_{\lambda\mu}$ určit v bodě ${}^*\xi_1 = s$, ${}^*\xi_2 = t$ plochy ${}^*\Pi$, píšu ve vzorcích (55) elementy $a_{\lambda\mu}$ a $\{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\}$ plochy Π vypočítané v bodě $\xi^1 = s$, $\xi^2 = 0$. Stejný význam mají elementy plochy Π a jejich derivace podle $\xi^1 = s$ i v dalších vzorcích.

Zbývá ještě určit symboly ${}^*\{{}^{\nu}_{\lambda\mu}\}$ plochy ${}^*\Pi$ v bodech křivky C, podél níž paralelní přenos sledujeme. Derivováním vzorců (55) podle ${}^*\xi^1 = s = \xi^1$ dostáváme

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^*a_{11}}{\partial {}^*\xi_1} &= \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} + 2t\frac{\partial M}{\partial \xi^1} + t^2\frac{\partial}{\partial \xi^1}\left[\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix} N\right],\\ \frac{\partial {}^*a_{12}}{\partial {}^*\xi^1} &= \frac{\partial a_{12}}{\partial \xi^1} + t\frac{\partial N}{\partial \xi}\,,\\ \frac{\partial {}^*a_{22}}{\partial {}^*\xi^1} &= \frac{\partial a_{22}}{\partial \xi^1}\,.\end{aligned}$$

Podobně derivováním ${}^*a_{\lambda\mu}$ podle ${}^*\xi^2 = t$ vychází

$$\begin{aligned} \frac{\partial {}^*a_{11}}{\partial {}^*\xi^2} &= 2\left(M + t\left[\begin{Bmatrix}1\\ 21\end{Bmatrix} M + \begin{Bmatrix}2\\ 21\end{Bmatrix} N\right]\right),\\ \frac{\partial {}^*a_{12}}{\partial {}^*\xi^2} &= N\,,\quad \frac{\partial {}^*a_{22}}{\partial {}^*\xi^2} = 0\,.\end{aligned}$$

Pro další výpočet je důležité si všimnout, že z první rovnice (24) vychází pro plochu Π

$$\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2} = 2\begin{Bmatrix}\lambda\\12\end{Bmatrix} a_{\lambda 1} = 2M\,.$$

Proto v bodech křivky C, tj. bv bodech $^*\xi^1 = s$, $^*\xi^2 = t = 0$, jest

$$\frac{\partial {}^*a_{11}}{\partial {}^*\xi^2} = \frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2}\,. \tag{56}$$

Po jednoduchém určení kontravariantních složek $^*a^{\lambda\mu}$ metrického tensoru plochy $^*\Pi$ vychází ze vzorců (22) pro plochu $^*\Pi$

$$^*\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix} = \frac{1}{2{}^*a}\left[{}^*a_{22}\frac{\partial {}^*a_{11}}{\partial {}^*\xi^1} - 2{}^*a_{12}\frac{\partial {}^*a_{12}}{\partial {}^*\xi^1} + {}^*a_{12}\frac{\partial {}^*a_{11}}{\partial {}^*\xi^2}\right],$$

kde

$$^*a = \begin{vmatrix} {}^*a_{11}, & {}^*a_{12} \\ {}^*a_{21}, & {}^*a_{22}\end{vmatrix}\,.$$

V bodech křivky C máme po dosazení $^*\xi^1 = s$, $^*\xi^2 = t = 0$ do vzorců (55) a jejich derivací s použitím rovnice (56)

$$^*\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix} = \frac{1}{2a}\left[a_{22}\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^1} - 2a_{12}\frac{\partial a_{12}}{\partial \xi^1} + a_{12}\frac{\partial a_{11}}{\partial \xi^2}\right],$$

kde jsme zase položili

$$a = \begin{vmatrix} a_{11}, & a_{12} \\ a_{21}, & a_{22}\end{vmatrix}\,.$$

Platí tedy v bodech křivky C rovnice $^*\begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix}1\\11\end{Bmatrix}$.

Podobně lze rovnost Christoffelových symbolů ploch Π a $^*\Pi$ v bodech křivky C dokázat i pro ostatní $\begin{Bmatrix}\nu\\\lambda\mu\end{Bmatrix}$ s výjimkou případů $\begin{Bmatrix}2\\22\end{Bmatrix}$ a $\begin{Bmatrix}1\\22\end{Bmatrix}$, kde tato rovnost nastat nemusí. Platí tedy:

Věta 7 *(pomocná). Při výše zvolené soustavě parametrů platí pro Christoffelovy symboly ploch Π a $^*\Pi$ v bodech křivky C rovnice*

$$\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu 1\end{Bmatrix} = {}^*\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu 1\end{Bmatrix}, \quad (\lambda, \mu = 1, 2)\,.$$

Christoffelovy symboly z věty 7 jsou právě ty, které vystupují v rovnicích paralelního přenosu podél křivky C při naší volbě soustavy parametrů. Na ploše Π vychází pro křivku C $\mathrm{d}\xi^1 = \mathrm{d}s$, $\mathrm{d}\xi^2 = 0$ a tedy dosazením toho do rovnic (33) dostáváme pro paralelismus vektorů v^λ podél křivky C na ploše Π podmínku

$$\mathrm{D}v^\lambda \equiv \mathrm{d}v^\lambda + \begin{Bmatrix}\lambda\\\mu 1\end{Bmatrix} v^\mu\,\mathrm{d}s = 0\,. \tag{57}$$

Podobně na ploše $^*\Pi$ dostáváme pro paralelní posun vektorů $^*v^\lambda$ podél křivky C podmínku

$$^*\mathrm{D}\,{}^*v^\lambda \equiv \mathrm{d}{}^*v^\lambda + {}^*\begin{Bmatrix}\lambda\\\mu 1\end{Bmatrix} {}^*v^\mu\,\mathrm{d}s = 0\,. \tag{58}$$

Ale pro vyjádření téhož vektoru na obou plochách Π a $^*\Pi$ dostáváme z rovnic (52) a jim obdobných na ploše $^*\Pi$ vztahy

$$\frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda} v^\lambda = \frac{\partial^* x^i}{\partial^* \xi^\lambda} {}^*v^\lambda .$$

Při naší volbě parametrů je na křivce C v důsledku rovnic (47), (46) a (54) $\frac{\partial^* x^i}{\partial^* \xi^\lambda} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\lambda}$, tudíž pro každý vektor je zde také $v^\lambda = {}^*v^\lambda$. Protože v důsledku věty 7 platí podél křivky C i rovnice $\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu 1 \end{matrix} \right\} = {}^*\left\{ \begin{matrix} \lambda \\ \mu 1 \end{matrix} \right\}$, jsou rovnice (57) a (58) totožné. To znamená, že paralelní posun téhož vektoru podél křivky C dává na obou plochách Π a $^*\Pi$ též výsledek. Můžeme tedy říci:

Věta 8. *Paralelní přenos vektoru na ploše podél křivky C (která není asymptotická) je shodný s paralelním přenosem téhož vektoru na rozvinutelné ploše, která se dané plochy dotýká v bodech křivky C.*

Odtud je už patrná známá Levi-Civitova interpretace paralelismu na křivých plochách. Chci-li vektor $\underset{\circ}{v}^\lambda$ paralelně přenést na ploše Π podél křivky C z bodu P do bodu Q, sestrojím nejdřív rozvinutelnou plochu $^*\Pi$, která se plochy Π dotýká v bodech křivky C. Tuto rozvinutelnou plochu rozvinu pak do roviny. Body P, Q přijdou přitom v rovině do bodů P_1, Q_1, vektor $\underset{\circ}{v}^\lambda$ přejde do úsečky $\underset{\circ}{v}$ v bodě P_1; v bodě Q_1 sestrojím úsečku v rovnoběžnou s $\underset{\circ}{v}$, stejně dlouhou a stejně orientovanou; tu pak navinu zpět na plochu $^*\Pi$ a tedy i na plochu Π jako vektor v^λ sestrojený v bodě Q. Vektor v^λ tak sestrojený je výsledkem paralelního přenosu vektoru $\underset{\circ}{v}^\lambda$ z bodu P do bodu Q.

Zachováme-li při tomto postupu body P, Q i vektor $\underset{\circ}{v}^\lambda$ na ploše Π a změníme-li křivku C, po níž vektor přenášíme, změní se i plocha $^*\Pi$ a ovšem i celé její rozvinutí do roviny. Výsledek přenosu vektoru $\underset{\circ}{v}^\lambda$ do bodu Q je na tom samozřejmě také závislý. Čtenář se o tom snadno přesvědčí na příkladě plochy kulové, kde danými body P, Q prochází nekonečně mnoho kružnic; podle každé té kružnice dotýká se dané koule Π rotační kužel $^*\Pi$ a jeho rozvinutí je velmi názorné. Proto poskytuje pro paralelní přenos dobré příklady.

Hloubka myšlenky T. Levi-Civity při zavedení paralelismu na křivých útvarech spočívá v tom, že vhodnou definicí paralelismu se mu podařilo docílit toho, že geodetické křivky jsou při tom autoparalelní (viz větu 3), takže jsou nejen čarami „nejkratší délky“ ale i čarami „stejného směru“. Vhodnou definicí paralelismu stávají se tedy geodetické křivky dokonalou analogií přímek z prostoru euklidovského.

Dotýkají-li se dvě plochy Π_1, Π_2 navzájem podél křivky C, mají v bodech této křivky společné tečné roviny a tedy i společnou rozvinutelnou plochu $^*\Pi$ dotýkající se každé z nich podél křivky C. Z věty 8 plyne:

Věta 9. *Dotýkají-li se dvě plochy podél křivky C, pak paralelní přenos podél křivky C je na obou plochách stejný.*

Této věty se obvykle v literatuře užívá k odvození věty 8.

Literatura:

T. Levi-Civita: *Der absolute Differentialkalkül.* Z italštiny do němčiny přeložil A. Duschek. (J. Springer, Berlín 1928).
A. Duschek — W. Mayer: *Lehrbuch der Differentialgeometrie.* Dva díly. (B. G. Teubner, Lipsko—Berlín 1930).
V. Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet.* (JČMF, Praha 1937).
L. P. Eisenhart: *An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus.* (Princeton University Press, Princeton 1940).
V. F. Kagan: *Osnovy těorii poverchnostěj v tensornom izloženiji.* Dva díly. (OGIZ, Moskva—Leningrad, I. díl 1947, II. díl 1948).
N. A. Kilčevskij: *Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice.* Z ruštiny přeložil I. Černý, (SNTL, Praha 1956).
E. Kraemer: *Analytická geometrie lineárních útvarů.* (ČSAV, Praha 1956; II. vydání).

VÝHODNÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC 3. AŽ 5. STUPNĚ (S REÁLNÝMI KOEFICIENTY)

JOSEF SCHMIDTMAYER

Katedra matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT, Praha

Je vyložena jednoduchá graficko-numerická metoda, vedoucí rychle k výsledkům značné přesnosti. Její výhodou je, že není vázána na žádná pomocná vyšetřování a různé předpoklady (jako je např. stabilita či nestabilita rovnice, počet reálných kořenů, odhad absolutních hodnot kořenů apod.).

1. Úvod

V technické literatuře nejrůznějších oborů se často setkáváme s rozmanitými úpravami numerických a grafických postupů pro řešení algebraických rovnic (s reálnými koeficienty) stupňů vyšších než 2. To nasvědčuje, že nutnost řešení těchto rovnic je v technických vědách jedním ze základních nároků na matematiku. I když je to z hlediska matematiky nárok celkem elementární, jeho význam z hlediska využití matematiky v technických vědách a v praxi s časem spíše roste.

Odmyslíme-li si možnost výskytu nelineárních algebraických rovnic již při řešení v sobě uzavřených jednoduchých úloh, např. ze stereometrie, nevyhneme se jim v žádném případě — jakožto dílčímu problému — při vyšetřování charakteristických veličin mechanických [5] či elektrických soustav [3], [6], při vyšetřování stabilitních problémů [5]. Zejména v teorii servomechanismů [10], [14], pokud jde o elektrotechniku, a v souvislosti s dynamickými jevy ovlivněnými především aeroelasticitou, — abychom jmenovali alespoň dva obory, jejichž význam den ode dne roste — je řešení algebraických rovnic i velmi vysokých stupňů zcela samozřejmou nutností.

V praxi nelze se spokojit zjištěním, že jistý problém má řešení (i když takové vyšetření nesmí být opomíjeno), ani zajištěním n ě j a k é metody pro řešení. Je nutno hledat metodu co nejhospodárnější, nejrychlejší, ale bez úlevy na požadavku přesnosti.

Takovými hledisky je motivován tento článek. Historické podklady a zhodnocení budou shrnuty v závěru. Všímáme si zde jen rovnic 3., 4. a 5. stupně proto, že se v praxi nejčastěji vyskytují. Metodika řešení rovnic vyšších stupňů je odlišná (tj. musí být odlišná, má-li být hospodárná); vrátíme se k ní jindy.

Předpokladem úspěšného použití popsané metody je výkonný počítací stroj. Při řešení numerických příkladů bylo použito elektrického počítacího stroje Mercedes R 38 SM.