Josef Schmidtmayer

Výhodné řešení algebraických rovnic 3. až 5. stupně (s reálnými koeficienty)

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 6, 659--671

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/138048

Literatura:

T. Levi-Civita: *Der absolute Differentialkalkül.* Z italštiny do němčiny přeložil A. Duschek. (J. Springer, Berlín 1928).
A. Duschek — W. Mayer: *Lehrbuch der Differentialgeometrie.* Dva díly. (B. G. Teubner, Lipsko—Berlín 1930).
V. Hlavatý: *Diferenciální geometrie křivek a ploch a tensorový počet.* (JČMF, Praha 1937).
L. P. Eisenhart: *An Introduction to Differential Geometry with Use of the Tensor Calculus.* (Princeton University Press, Princeton 1940).
V. F. Kagan: *Osnovy těorii poverchnostěj v tensornom izloženiji.* Dva díly. (OGIZ, Moskva—Leningrad, I. díl 1947, II. díl 1948).
N. A. Kilčevskij: *Základy tensorového počtu a jeho použití v mechanice.* Z ruštiny přeložil I. Černý, (SNTL, Praha 1956).
E. Kraemer: *Analytická geometrie lineárních útvarů.* (ČSAV, Praha 1956; II. vydání).

VÝHODNÉ ŘEŠENÍ ALGEBRAICKÝCH ROVNIC 3. AŽ 5. STUPNĚ (S REÁLNÝMI KOEFICIENTY)

JOSEF SCHMIDTMAYER
Katedra matematiky a deskriptivní geometrie elektrotechnické fakulty ČVUT, Praha

Je vyložena jednoduchá graficko-numerická metoda, vedoucí rychle k výsledkům značné přesnosti. Její výhodou je, že není vázána na žádná pomocná vyšetřování a různé předpoklady (jako je např. stabilita či nestabilita rovnice, počet reálných kořenů, odhad absolutních hodnot kořenů apod.).

1. Úvod

V technické literatuře nejrůznějších oborů se často setkáváme s rozmanitými úpravami numerických a grafických postupů pro řešení algebraických rovnic (s reálnými koeficienty) stupňů vyšších než 2. To nasvědčuje, že nutnost řešení těchto rovnic je v technických vědách jedním ze základních nároků na matematiku. I když je to z hlediska matematiky nárok celkem elementární, jeho význam z hlediska využití matematiky v technických vědách a v praxi s časem spíše roste.

Odmyslíme-li si možnost výskytu nelineárních algebraických rovnic již při řešení v sobě uzavřených jednoduchých úloh, např. ze stereometrie, nevyhneme se jim v žádném případě — jakožto dílčímu problému — při vyšetřování charakteristických veličin mechanických [5] či elektrických soustav [3], [6], při vyšetřování stabilitních problémů [5]. Zejména v teorii servomechanismů [10], [14], pokud jde o elektrotechniku, a v souvislosti s dynamickými jevy ovlivněnými především aeroelasticitou, — abychom jmenovali alespoň dva obory, jejichž význam den ode dne roste — je řešení algebraických rovnic i velmi vysokých stupňů zcela samozřejmou nutností.

V praxi nelze se spokojit zjištěním, že jistý problém má řešení (i když takové vyšetření nesmí být opomíjeno), ani zajištěním n ě j a k é metody pro řešení. Je nutno hledat metodu co nejhospodárnější, nejrychlejší, ale bez úlevy na požadavku přesnosti.

Takovými hledisky je motivován tento článek. Historické podklady a zhodnocení budou shrnuty v závěru. Všímáme si zde jen rovnic 3., 4. a 5. stupně proto, že se v praxi nejčastěji vyskytují. Metodika řešení rovnic vyšších stupňů je odlišná (tj. musí být odlišná, má-li být hospodárná); vrátíme se k ní jindy.

Předpokladem úspěšného použití popsané metody je výkonný počítací stroj. Při řešení numerických příkladů bylo použito elektrického počítacího stroje Mercedes R 38 SM.

2. Rovnice třetího stupně

Pro lepší přehlednost a snazší použití při praktickém výpočtu budeme formulovat získané poznatky ve větách s podrobně provedenými důkazy.

Věta 1. Je dána algebraická rovnice 3. stupně

$$x^3 + d_2x^2 + d_1x + d_0 = 0\,, \tag{1}$$

kde d_2, d_1, $d_0 \neq 0$ jsou reálná čísla.

Tři kořeny x_k rovnice (1) jsou:

$$x_k = y_k - 0{,}\bar{3}d_2\,, \quad k = 1, 2, 3\,. \tag{2}$$

Přitom y_1 je reálný kořen rovnice

$$y^3 + h_1y + h_0 = 0\,, \tag{3}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= d_1 - 0{,}\bar{3}d_2^2\,, \\ h_0 &= d_0 - 0{,}\bar{3}d_1d_2 + 0{,}\overline{074}d_2^3\,; \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

y_1 se určí graficko-numerickým zpřesňováním.

Čísla y_2, y_3 jsou kořeny kvadratické rovnice

$$y^2 + p_1y + p_0 = 0\,, \tag{5}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= y_1\,, \\ p_0 &= h_1 + y_1^2 = -\frac{h_0}{y_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Důkaz.

Rovnici (1) převedeme známou substitucí

$$x = y - \frac{d_2}{3} \tag{7}$$

na tvar

$$y^3 + h_1y + h_0 = 0\,, \tag{8}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= d_1 - \tfrac{1}{3}d_2^2\,, \\ h_0 &= d_0 - \tfrac{1}{3}d_1d_2 + \tfrac{2}{27}d_2^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

Tím dostáváme vlastně vztahy (2) až (4). Rozdíl je jen v tom, že koeficienty ve (2) až (4) jsou vyjádřeny desetinnými čísly — pro lepší použitelnost při práci na počítacím stroji.

Píšeme-li rovnici (8) ve tvaru

$$y^3 = -h_1y - h_0\,, \tag{10}$$

lze jeden její reálný kořen určit (přibližně) graficky jako úsečku průsečíku dvou čar: grafu funkce y^3 (kubická parabola) a grafu funkce $-h_1y - h_0$ (přímka). Jeden reálný průsečík existuje vždy. Z rovnice (10) vyplývá, že se výhodně uplatní jednou provždy přesně nakreslený graf funkce y^3. Vkreslením přímky, jež je grafem funkce $-h_1y - h_0$, určíme potřebný průsečík a jeho úsečku pak graficko-numericky zpřesníme (viz příklad).

Je-li y_1 jedním kořenem rovnice (8), lze její levou stranu psát jako součin lineárního kořenového činitele $y - y_1$ a kvadratického trojčlenu, tj. musí platit

$$y^3 + h_1y + h_0 = (y^2 + p_1y + p_0)(y - y_1) = 0\,, \tag{11}$$

odkud

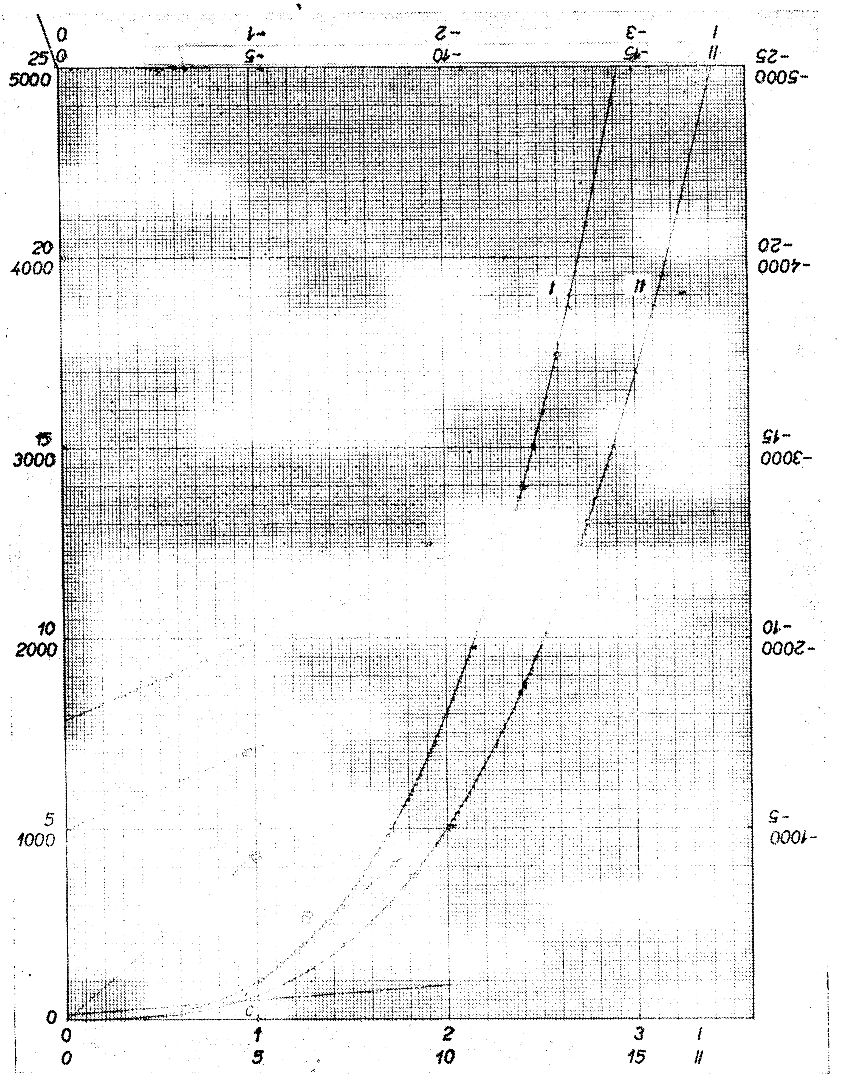
$$\left.\begin{aligned} p_1 - y_1 &= 0\,, \\ p_0 - p_1 y_1 &= h_1\,, \\ -p_0 y_1 &= h_0\,, \end{aligned}\right\} \Rightarrow \quad \begin{aligned} p_1 &= y_1\,, \\ p_0 &= h_1 + y_1^2 = -\frac{h_0}{y_1}\,, \end{aligned}$$

což jsou vzorce (6). Zbývající kořeny $y_{2,3}$ jsou podle (11) řešením rovnice $y^2 + p_1 y + p_0 = 0$, tj. rovnice (5). Tím je věta dokázána.

Příklad 1.

Řešit rovnici

$$x^3 - 10{,}29x^2 + 33{,}188x - 25{,}2444 = 0\,. \tag{α}$$



Obr. 1. Graf funkce x^3 (nezávisle proměnná ani funkce není u stupnic označena) v intervalu $\langle 0; 3\rangle$ (křivka *I* a horní čísla stupnic) a v intervalu $\langle 0; 17\rangle$ (křivka *II* a dolní čísla stupnic).

Zde je

$$d_2 = -10{,}29\,; \quad d_1 = 33{,}188\,; \quad d_0 = -25{,}2444\,.$$

Podle (4) je dále

$$h_1 = -\,2{,}106\;347\,; \quad h_0 = 7{,}882\;161\,.$$

Rovnice (3) zní:

$$G(y) \equiv y^3 - 2{,}106\;347y + 7{,}882\;161 = 0 \tag{β}$$

nebo

$$y^3 = 2{,}106\;347y - 7{,}882\;161\,. \tag{γ}$$

Jeden kořen této rovnice určíme graficky (obr. 1) jako úsečku průsečíku A paraboly I (graf funkce na levé straně (γ)) s čárkovanou přímkou (graf funkce na pravé straně (γ)).

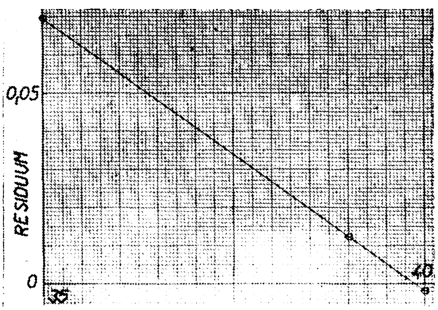
Obr. 1 obsahuje graf funkce y^3 jednak pro $0 \leqq |y| \leqq 3$ (křivka I), jednak pro $0 \leqq |y| \leqq 17$ (křivka II), a to pro $y \leqq 0$ i pro $y \geqq 0$. Stupnice nejsou úmyslně pojmenovány, neboť označení se může měnit. Graf lze číst ze dvou stran. Konstrukce přímek je naznačena tečkovanými přímkami udávajícími směr.

Tab. 1.

y_1	$G(y_1)$
$-2{,}340$	$-0{,}00189$
$-2{,}335$	$+0{,}06953$
$-2{,}339$	$+0{,}01243$
$-2{,}33987$	$-0{,}00002$

Z grafu je zřejmé, že první přiblížení kořene y_1 je $y_1 = -2{,}340$, pravděpodobně méně.*) Zpřesnění provedeme graficko-numericky, a to zobrazením průběhu residuí $G(y_1)$, viz tab. 1.

Nejprve stanovme $G(-2{,}340)$ a např. $G(-2{,}335)$, tj. pro y_1 o něco menší. Residua mají různá znaménka, kořen tedy leží mezi oběma dosavadními odhady pro y_1. Zkusme proto ještě určit $G(-2{,}339)$. Vyneseme-li nyní průběh residuí v závislosti na dvojciferných koncovkách udávajících setiny a tisíciny odhadů pro y_1 (viz obr. 2), dostaneme interpolací (zde prakticky lineární) přesnější odhad $y_1 = -2{,}33987$. Příslušné residuum je již tak malé, že můžeme zpřesňování ukončit.



Obr. 2. Stanovení přibližné hodnoty $y_1 = -2{,}33987$.

Je tedy $y_1 \doteq -2{,}33987$.

Podle (6) dostáváme:

$$p_1 = -2{,}33987\,,$$

$$p_0 = \frac{7{,}88216}{2{,}33987} = 3{,}36863\,.$$

Rovnice (5) pro $y_{2,3}$ je tedy

$$y^2 - 2{,}33987y + 3{,}36863 = 0\,.$$

Odkud

$$\begin{aligned} y_{2,3} &= +\,1{,}16993 \pm \sqrt{1{,}36875 - 3{,}36863} = \\ &= +\,1{,}16993 \pm \sqrt{-2{,}00012} = \\ &= +\,1{,}16993 \pm \mathrm{j}\sqrt{2{,}00012}\,. \end{aligned}$$

Podle (2) jsou konečně

$$x_1 \doteq -2{,}33987 + 3{,}43 = 1{,}09013\,,$$

$$x_{2,3} \doteq +\,1{,}16993 \pm \mathrm{j}\sqrt{2{,}00012} + 3{,}43 = +\,4{,}59993 \pm \mathrm{j}\sqrt{2{,}00012}\,.$$

*) Znak y_1 vyjadřuje, že jde o první kořen rovnice (γ). Pro jednoduchost nebudeme označovat jednotlivá přiblížení pořadovými indexy. Nebudeme také všude užívat znaku $\doteq$ pro přibližnou rovnost.

Zaokrouhlením na dvě desetinná místa — jež se z praktického hlediska samo nabízí — dostáváme:

$$x_1 = 1{,}09\,; \quad x_{2,3} = 4{,}60 \pm \mathrm{j}\sqrt{2}\,. \tag{δ}$$

Dosazením do původní rovnice (α) se přesvědčíme, že výsledky (δ) jsou právě jejími přesnými kořeny.

3. Rovnice čtvrtého stupně

Věta 2. Je dána algebraická rovnice 4. stupně

$$x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0\,. \tag{12}$$

kde $b_3, b_2, b_1, b_0, \neq 0$ jsou reálná čísla. Čtyři kořeny rovnice (12) jsou:

$$x_k = y_k - 0{,}25b_3\,, \quad k = 1, 2, 3, 4\,. \tag{13}$$

Přitom y_k jsou kořeny dvou kvadratických rovnic

$$y^2 + p_1y + p_0 = 0\,, \tag{14}$$

$$y^2 + q_1y + q_0 = 0\,. \tag{15}$$

O koeficientech rovnic (14) a (15) platí:

$$p_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) - \frac{c_1}{p_1}\right], \tag{16}$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) + \frac{c_1}{p_1}\right], \tag{17}$$

$$q_1 = -p_1\,, \tag{18}$$

při čemž

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= b_2 - 0{,}375b_3^2\,,\\ c_1 &= b_1 - 0{,}5b_2b_3 + 0{,}125b_3^3\,,\\ c_0 &= b_0 - 0{,}25b_1b_3 + 0{,}0625b_2b_3^2 - 0{,}0117188b_3^4\,, \end{aligned}\right\} \tag{19}$$

$$p_1^2 = v_1 - 0{,}\overline{6}c_2\,. \tag{20}$$

Číslo v_1 je největší kořen rovnice

$$v^3 + h_1v + h_0 = 0\,, \tag{21}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} h_1 &= -4c_0 - 0{,}\overline{3}c_2^2\,,\\ h_0 &= -c_1^2 + 2{,}\overline{6}c_0c_2 - 0{,}\overline{074}c_2^3\,. \end{aligned}\right\} \tag{22}$$

Kořen v_1 se určí graficko-numericky.

Důkaz.

Rovnici (12) převedeme známou substitucí

$$x = y - \frac{b_3}{4} \tag{23}$$

na tvar bez třetí mocniny neznámé, tj.

$$y_4 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = 0\,, \tag{24}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} c_2 &= b_2 - \tfrac{3}{8}b_3^2\,,\\ c_1 &= b_1 - \tfrac{1}{2}b_2b_3 + \tfrac{1}{8}b_3^2\,,\\ c_0 &= b_0 - \tfrac{1}{4}b_1b_3 + \tfrac{1}{16}b_2b_3^2 - \tfrac{3}{256}b_3^4\,. \end{aligned}\right\} \tag{25}$$

Z lineárních kořenových činitelů rovnice (24) lze vždy vytvořit dvě dvojice tak, že součin činitelů v každé dvojici je reálný kvadratický trojčlen, takže lze psát

$$y^4 + c_2y^2 + c_1y + c_0 = (y^2 + p_1y + p_0)(y^2 + q_1y + q_0) = 0 . \qquad (26)$$

Odtud

$$p_1 + q_1 = 0 , \qquad q_1 = -p_1 , \qquad (27)$$

$$p_0 + q_0 + p_1q_1 = c_2 , \qquad p_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) - \frac{c_1}{p_1}\right] , \qquad (28)$$

$$p_0q_1 + p_1q_0 = c_1 , \qquad q_0 = \frac{1}{2}\left[(c_2 + p_1^2) + \frac{c_1}{p_1}\right] , \qquad (29)$$

$$p_0q_0 = c_0 , \qquad c_0 = \frac{1}{4}\left[(c_2 + p_1^2)^2 - \frac{c_1^2}{p_1^2}\right] . \qquad (30)$$

Vztahy (27), (28), (29) a vzorce (25) a (23) odpovídají postupně vztahům (18), (16), (17), (19), (13) z věty 2; jen ve (13) a (19) jsou koeficienty vyjádřeny desetinnými čísly.

Označíme-li ve vztahu (30)

$$p_1^2 = z , \qquad (31)$$

lze jej přepsat ve tvaru

$$z(c_2 + z)^2 = 4c_0z + c_1^2 . \qquad (32)$$

Lze ukázat, že při $c_1 \neq 0$, tj. není-li rovnice (24) bikvadratická, má rovnice (32) vždy alespoň jeden kladný kořen z_1, takže lze určit**)

$$0 < p_1 = \sqrt{z_1} .$$

Pak mají smysl vztahy (27) až (29) a kořeny y_k vypočteme podle (26) z rovnic

$$y^2 + p_1y + p_0 = 0 ,$$
$$y^2 + q_1y + q_0 = 0 ,$$

což jsou rovnice (14), (15) z věty 2.

**) Skutečnost že rovnice

$$z(c_2 + z)^2 = c_1^2 + 4c_0z \qquad (32)$$

má vždy alespoň jeden **kladný** kořen z_1 (při $c_1 \neq 0$), ukážeme takto: Hledejme kořeny rovnice (32) jako úsečky průsečíků dvou čar: grafů funkcí

$$f(z) \equiv z(c_2 + z)^2 \quad \text{a} \quad g(z) \equiv c_1^2 + 4c_0z .$$

Graf funkce $g(z)$ je přímka, jejíž úsek na ose pořadnic je vždy kladný ($c_1^2 > 0$, pokud $c_1 \neq 0$) Graf funkce $f(z)$ je parabola 3. stupně, probíhající buď jako v obr. 3a (při $c_2 < 0$) nebo jako v obr. 3b (při $c_2 > 0$). Podklady pro toto tvrzení jsou:

$$f'(z) = 3z^2 + 4c_2z + c_2^2 \text{ má nulové body } z_{2s} = -\frac{c_2}{3} , z_{1s} = -c_2,$$

$$f''(z) = 6z + 4c_2 \text{ má nulový bod } z_i = -\frac{2}{3}c_2 ,$$

$$f'''(z) = 6 .$$

Body z_{1s}, z_{2s} jsou stacionárními body funkce $f(z)$. Protože pro $c_2 > 0$

$f''(z_{1s}) < 0$, nastává v z_{1s} ostré lokální maximum,

$f''(z_{2s}) > 0$, nastává v z_{2s} ostré lokální minimum,

$f'''(z_i) > 0$, nastává v z_i inflexe, při čemž průběh konkávní přechází v z_i v průběh konvexní (obr. 3b).

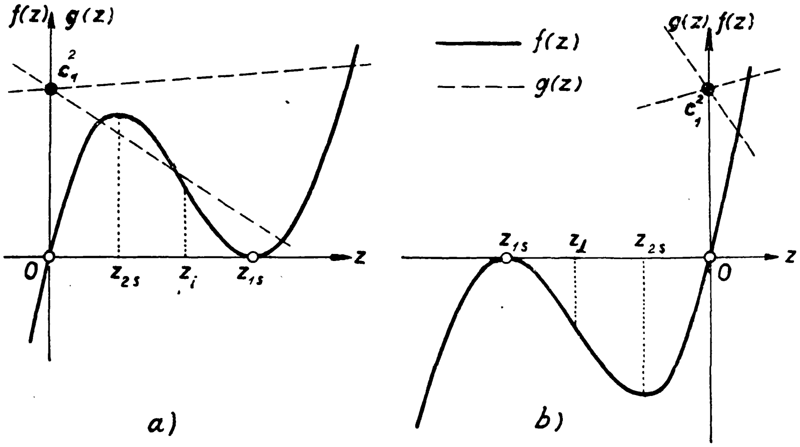
Podobně pro $c_2 < 0$. V každém případě však platí: přímka, jež je grafem funkce $g(z)$, protne graf funkce $f(z)$ při $c_1 \neq 0$ vždy alespoň v jednom bodě, majícím kladnou souřadnici z. Rovnice (32) tedy má vždy alespoň jeden kladný kořen. Má-li víc kladných kořenů, bereme největší z nich.

Zbývá ještě vysvětlit určení největšího kořene rovnice (32). Nebudeme jej vyšetřovat přímo, ale opět pomocí redukce rovnice (32) na tvar neobsahující druhou mocninu neznámé. Rovnici (32) lze psát i ve tvaru

$$z^3 + d_2 z^2 + d_1 z + d_0 = 0 \,, \tag{33}$$

kde

$$\left.\begin{aligned} d_2 &= 2c_2 \,, \\ d_1 &= c_2^2 - 4c_0 \,, \\ d_0 &= -c_1^2 \,. \end{aligned}\right\} \tag{34}$$



Obr. 3. Schematické průběhy funkcí $f(z) \equiv z(c_2 + z)^2$ a $g(z) \equiv c_1^2 + 4c_0 z$ pro a) $c_2 < 0$, b) $c_2 > 0$.

Substitucí

$$z = v - \frac{d_2}{3} \tag{35}$$

se změní (33) v rovnici

$$v^3 + h_1 v + h_0 = 0 \,, \tag{36}$$

kde [viz (4) a (34)]

$$\begin{aligned} h_1 &= d_1 - \tfrac{1}{3} d_2^2 &&= -\,4c_0 - \tfrac{1}{3} c_2^2 \,, \\ h_0 &= d_0 - \tfrac{1}{3} d_1 d_2 + \tfrac{2}{27} d_2^3 &&= -\,c_1^2 + \tfrac{3}{8} c_0 c_2 - \tfrac{2}{27} c_2^2 \,; \end{aligned}$$

vyjádříme-li koeficienty v posledních vztazích desetinnými čísly, dostaneme právě vzorce (22).

Po určení největšího kořene v_1 rovnice (36) opět graficko-numerickým zpřesňováním — viz dříve — dostaneme [viz (35) a (34)] potřebné $z_1 = v_1 - d_2/3 = v_1 - 0{,}\bar{6}c_2$ a podle (31) konečně $p_1 = \sqrt{z_1} = \sqrt{v_1 - 0{,}\bar{6}c_2}$. Tím jsme ověřili i správnost vzorců (20) až (22) z věty 2. Celá věta je tedy dokázána.

Příklad 2.

Řešit rovnici

$$x^4 + 5x^3 + 11x^2 + 12x + 6 = 0 \,. \tag{α}$$

Zde je:

$$b_3 = 5 \,; \quad b_2 = 11 \,; \quad b_1 = 12 \,; \quad b_0 = 6 \,.$$

Podle (19) a (22) připravíme koeficienty

$$c_2 = 1{,}625\,; \quad c_1 = 0{,}125\,; \quad v_0 = 0{,}8625\,;$$
$$h_1 = -4{,}330201\,; \quad h_0 = 3{,}404022\,.$$

Nejprve řešíme rovnici (21), tj.

$$G(v) \equiv v^3 - 4{,}330201v + 3{,}404022 = 0\,, \tag{β}$$

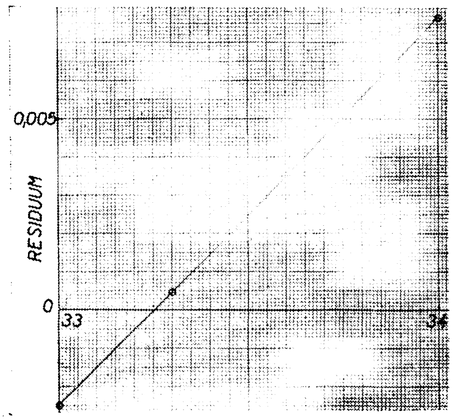
a to ve tvaru

$$v^3 = 4{,}330201v - 3{,}404022\,. \tag{γ}$$

Graf funkce $4{,}330201v - 3{,}404022$ vykreslený na obr. 1 protne graf funkce v^3 (pozor na stupnice!) nejdále v bodě B. I při celkem špatné čitelnosti (malý úhel křivek, přímka skoro tečnou) odečteme zhruba $v_1 = 1{,}33$ a můžeme se domnívat – podle obrázku –, že správná hodnota kořene bude o něco větší. Stanovíme proto residua $G(v_1)$ pro dvě hodnoty neznámé v, a to 1,33 a např. 1,34. Příslušná residua viz v tab. 2. Protože residua mají různá znaménka, určíme ještě residuum v libovolném bodě mezi 1,33 a 1,34, např. v 1,333. Průběh residuí, opírající se o tři body, vyneseme v obr. 4. Příslušný oblouk, který se tentokrát dosti liší od přímky, určí novou přibližnou hodnotu $v_1 = 1{,}33254$. Odpovídající residuum je tak malé, že lze považovat naposled získanou hodnotu za dostatečně vyhovující aproximaci.

Tab. 2.

v_1	$G(v_1)$
1,33	−0,00251
1,34	+0,00765
1,333	+0,00046
1,33254	−0,0000067



Obr. 4. Stanovení přibližné hodnoty $v_1 = 1{,}33254$.

Podle (20) je pak

$$p_1^2 = 1{,}33254 - 0{,}6\,.\,1{,}625 = 0{,}249207\,,$$
$$p_1 = 0{,}499205\,.$$

Z (16), (17), (18) určíme

$$p_0 = 0{,}5\left[1{,}625 + 0{,}249207 - \frac{0{,}125}{0{,}499205}\right] = 0{,}811904\,,$$

$$q_0 = 0{,}5\left[1{,}625 + 0{,}249207 + \frac{0{,}125}{0{,}499205}\right] = 1{,}062302\,,$$

$$q_1 = -0{,}499205\,.$$

Zbývá řešit rovnice (14) a (15):

Rovnice (14):

$$y^2 + 0{,}499205y + 0{,}811904 = 0\,,$$
$$y_{1,2} = -0{,}249602 \pm \sqrt{-0{,}749602}\,,$$
$$y_{1,2} = -0{,}249602 \pm \mathrm{j}\,0{,}865796\,.$$

Rovnice (15): $$y^2 - 0{,}499205y + 1{,}062302 = 0\,,$$
$$y_{3,4} = 0{,}249602 \pm \sqrt{-1{,}000001}\,,$$
$$y_{3,4} = 0{,}249602 \pm \mathrm{j}\,.$$
Podle (13) jsou konečně
$$x_{1,2} = y_{1,2} - 1{,}25\,; \quad x_{3,4} = y_{3,4} - 1{,}25\,,$$
tj.
$$\left.\begin{aligned} x_{1,2} &\doteq -1{,}499602 \pm \mathrm{j}\,0{,}865796\,,\\ x_{3,4} &\doteq -1{,}000398 \pm \mathrm{j}\,. \end{aligned}\right\} \qquad (\delta)$$
Pro porovnání přesnosti výpočtu: přesné hodnoty kořenů jsou
$$x_{1,2} = -\,1{,}5 \pm \mathrm{j}\,0{,}5\sqrt{3};\ x = -\,1 \pm \mathrm{j}\,.$$
Chyba v reaálných a imaginárních částech přibližných hodnot kořenů je menší jež $\pm 5\,.\,10^{-4}$, což je u čísel řádu 10° vyhovující přesnost.

Protože obvykle nemáme o kořenech rovnice žádné představy, měli bychom se vždy přesvědčit o kvalitě výsledků (δ) dosazením do původní rovnice (α).

4. Rovnice pátého stupně.

Věta 3. Je dána algebraická rovnice 5. stupně
$$x^5 + a_4x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0\,, \tag{37}$$
kde $a_4, a_3, a_2, a_1, a_0 \neq 0$ jsou reálná čísla.

Jeden reálný kořen x_1 určíme přímo postupným graficko-numerickým zpřesňováním. Ostatní čtyři kořeny dostaneme řešením rovnice
$$x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0\,, \tag{38}$$
kde
$$\left.\begin{aligned} b_3 &= a_4 + x_1\,,\\ b_2 &= a_3 + b_3x_1\,,\\ b_1 &= a_2 + b_2x_1\,,\\ b_0 &= a_1 + b_1x_1 = -\frac{a_0}{x_1}\,. \end{aligned}\right\} \tag{39}$$
Důkaz.

Algebraická rovnice lichého stupně má vždy alespoň jeden reálný kořen. Určíme jej graficko-numerickým zpřesňováním. Známe-li jeden kořen x_1, můžeme psát levou stranu rovnice (37) ve tvaru $(x - x_1)(x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0)$. Porovnáním s (37) dostáváme vztahy (39) určující jednoznačně koeficienty b_3 až b_0. Zbývající čtyři kořeny jsou pak řešením rovnice $x^4 + b_3x^3 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = 0$. Tím je věta dokázána.

Příklad 3.

Řešit rovnici
$$F(x) \equiv x^5 + 3{,}1x^4 - 22{,}73x^3 - 0{,}407x^2 + 621{,}526x + 1266{,}325 = 0\,. \tag{α}$$
Zde je
$$a_4 = 3{,}1\,;\ a_3 = -22{,}73\,;\ a_2 = -0{,}407\,;\ a_1 = 621{,}526\,;\ a_0 = 1266{,}325\,.$$
Rovnice (α) má nejméně jeden reálný kořen. Určíme jej (přibližně) graficko-numericky. Ukážeme, jak celkem hrubý postup vede rychle k cíli.

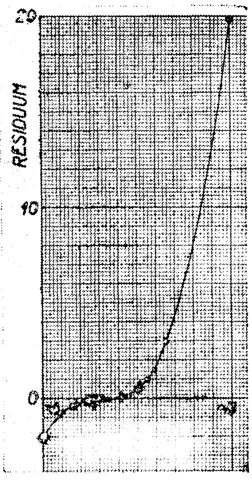
Z rovnice (α) je především zřejmé, že $F(0) > 0$. Protože pro všechna $x > \xi > 0$, kde ξ je dostatečně velké, je trvale $F(-x) < 0$, musí mít rovnice (α) alespoň jeden záporný kořen. Určeme tedy namátkou residuum $F(-5) = -198$ (viz tab. 3). Hledaný kořen je tedy v intervalu $(-5; 0)$. Vypočtěme ještě $F(-3)$ a $F(-4)$. Zjišťujeme, že kořen je v intervalu $(-4; -3)$. Spočítáme tedy ještě $F(-3{,}5)$ a vyneseme v obr. 5 residua v bodech -4; $-3{,}5$; -3. Uvědomíme-li si hodnoty residuí v bodech 0 a -5, vzniká značná pochybnost o tom, jak proložit graf funkce $F(x)$ mezi body $-3{,}5$ a -4. Vypočteme tedy ještě $F(-3{,}75)$ — tj. pro střed intervalu $(-3{,}5; -4)$ — a sestrojíme oblouk co nejplynuleji probíhající získanými čtyřmi body. Hledaný kořen bude jistě v intervalu $(-3{,}75; -3{,}5)$. Podle obr. 5 by to mohlo být asi číslo $-3{,}64$. Protože však průběh křivky mezi vnitřními dvěma body je značně problematický, určíme ještě residua v bodech $-3{,}7$ a $-3{,}6$, mezi nimiž — jak se zdá — probíhá graf funkce téměř přímočaře. Jsme však příjemně překvapeni: $F(-3{,}7) = 0$. Hledaný kořen je

$$x_1 = -3{,}7\,.$$

Řešení rovnice (α) se tedy redukuje podle (38) a (39) na řešení rovnice

Tab. 3.

x_1	$F(x_1)$
0	$+1266$
-5	$-\ 198$
-3	$+\ 19{,}89$
-4	$-\ 1{,}97$
$-3{,}5$	$+\ 0{,}5227$
$-3{,}75$	$-\ 0{,}0086$
$-3{,}7$	0



Obr. 5. Hrubá skica průběhu funkce $F(x)$ z př. 3.

$$x^4 - 0{,}6x^3 - 20{,}51x^2 + 75{,}48\,x + 342{,}25 = 0\,, \qquad (\beta)$$

kde je

$$b_3 = -0{,}6\,; \quad b_2 = -20{,}51\,; \quad b_1 = 75{,}48\,; \quad b_0 = 342{,}25\,.$$

Na rovnici (β) aplikujeme postup pro rovnice 4. stupně.

Podle (19) určíme nejprve koeficienty

$$c_2 = -20{,}645\,; \quad c_1 = +69{,}300\,; \quad c_0 = +353{,}109\,.$$

Z nich podle (22)

$$h_1 = -1554{,}50658\,; \quad h_0 = -23590,\,52679\,.$$

Největší reálný kořen rovnice (21), tj. rovnice

$$G(v) \equiv v^3 - 1554{,}50658v - 23590 = 0\,, \qquad (\gamma)$$

stanovíme opět graficko-numericky. První přiblížení získáme graficky na obr. 1. Užijeme křivky *II*, ale tak, že čísla příslušné vodorovné stupnice zdesateronásobíme (odpovídající spodní čísla svislé stupnice se zvětší tisíckrát); v obrázku tato změna není vyznačena. Průsečík *C* paraboly *II* s grafem funkce $1554{,}50658v + 23590{,}52579$ dává přibližnou hodnotu kořenu 45. Protože $G(45) < 0$ (viz tab. 4), leží kořen vpravo od 45. Spočtěme proto $G(46) > 0$. Kořen leží v intervalu $(45; 46)$. Stanovíme ještě $G(45{,}5)$ a vyneseme (obr. 6a) residua v bodech 45; 45,5; 46. Grafickou interpolací získáme novou přibližnou hodnotu: 45,525. Další postup je zřejmý z tab. 4 a z obr. 6b, 6c. Na vodorovných stupnicích jsou psány vždy jen poslední číslice neznámé v.

Za vyhovující přibližnou hodnotu vezmeme

$$v_1 = 45{,}526654\,.$$

Podle (20) je pak

$$p_1^2 = 45{,}526654 + 0{,}\bar{6}\,.\,20{,}645 = 59{,}289994\,,$$

$$p_1 = 7{,}699999\,.$$

Zde je zřejmě na místě zaokrouhlení

$$p_1^2 = 59{,}29\,; \quad p_1 = 7{,}7\,.$$

Podle vzorců (16) až (18) je dále

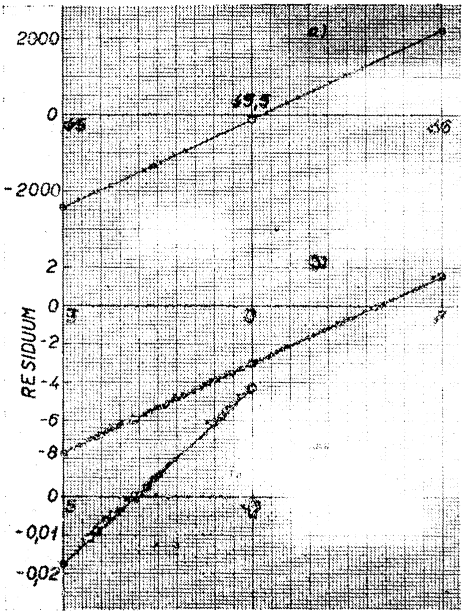
$$q_1 = -7{,}7\,,$$

$$p_0 = \frac{1}{2}\left[-20{,}645 + 59{,}29 - \frac{69{,}3}{7{,}7}\right] = 14{,}8225\,,$$

$$q_0 = \frac{1}{2}\left[-20{,}645 + 59{,}29 + \frac{69{,}3}{7{,}7}\right] = 23{,}8225\,.$$

Tab. 4.

v_1	$G(v_1)$
45,0	−2418 a)
46,0	+2239
45,5	−124
45,525	− 7,711 b)
45,526	− 3,650
45,527	+ 1,611
45,52666	+ 0,0285 c)
45,52665	− 0,0176
45,526654	+ 0,0023



Obr. 6. Postupné zpřesňování přibližné hodnoty $v_1 = 45{,}526654$.

Zbývá řešit rovnice (14) a (15):

Rovnice (14): $\quad y_2 + 7{,}7y + 14{,}8225 = 0\,,$

$$y_{2,3} = -3{,}85\,.$$

Rovnice (15): $\quad y^2 - 7{,}7y + 23{,}8225 = 0\,,$

$$y_{4,5} = +3{,}85 \pm \sqrt{9} = +3{,}85 \pm 3\,\mathrm{j}\,.$$

Podle vztahu (13) je konečně

$$x_{2,3} = -3{,}85 + 0{,}25\,.\,0{,}6 = -3{,}7\,,$$

$$x_{4,5} = +3{,}85 \pm 3\,\mathrm{j} + 0{,}25\,.\,0{,}6 = 4 \pm 3\,\mathrm{j}\,.$$

Získali jsme celkem tyto výsledky: Daná rovnice (α) má kořeny

$$x_1 = x_2 = x_3 = -3{,}7\,; \quad x_{4,5} = 4 \pm 3\,\mathrm{j}\,.$$

Je ovšem třeba provést kontrolu dosazením do (α). Zde se to týká jen kořenů $x_{4,5}$. Ostatní bylo zjištěno již dříve. Kontrolu ponecháváme čtenáři. Pokud však jde o trojnásobný kořen $-3{,}7$, nelze se s touto skutečností spokojit bez dalšího ověření, neboť naše výsledky byly získány přibližnými metodami. Chceme-li mít i kontrolu násobnosti, užijeme jednoduchého kriteria známého z algebry (viz [7], str. 363): má-li rovnice (α) právě trojnásobný kořen $-3{,}7$, musí ještě platit: $F'(-3{,}7) = F''(-3{,}7) = 0,\ F'''(-3{,}7) \neq 0\,,$ (δ)
kde

$$\left.\begin{aligned} F'(x) &= 5x^4 + 12{,}4x^3 - 68{,}19x^2 - 0{,}814x + 621{,}525\,,\\ F''(x) &= 20x^3 + 37{,}2x^2 - 136{,}38x - 0{,}814\,;\\ F'''(x) &= 60x^2 + 74{,}4x - 136{,}38\,. \end{aligned}\right\} \qquad (\varepsilon)$$

Dosazením do (ε) se přesvědčíme, že podmínky (δ) jsou vskutku splněny, takže rovnice (α) má trojnásobný kořen $-3{,}7$. Graf funkce $F(x)$ má v tomto bodě inflexi s tečnou v ose x.

5. Závěr

Metod pro řešení algebraických rovnic vyšších stupňů bylo již vypracováno nepřehledné množství. Z řady kompendií o tomto problému uvádíme Matthiessenovu práci [9], která již v r. 1878 přinesla tisícistránkový přehled o oněch metodách.

Dnes jsou leckde k disposici dostatečně přesně pracující strojové pomůcky (i pro řešení rovnic s komplexními koeficienty). Přesto se zdá, že potřeba rovnice do 5. stupně je tak častá, že je nutno se s ní vyrovnávat ponejvíce na pracovištích, kde je po ruce nejvýše počítací stroj. Proto bylo zpracování popsané v tomto článku zaměřeno na optimální využití grafu a stroje. Hlavní zásady, o něž se toto zpracování opírá, jsou:

1. Redukce rovnice 3. st. na tvar bez kvadratického členu [viz (1) až (3)] a redukce rovnice 4. st. na tvar bez členu třetího stupně [viz (12), (23), (24)]. Tuto úpravu provedl u rovnice 3. st. poprvé již Cardano ([2], viz také [1], díl II, str. 504). Obdobné odstranění členu ($n - 1$) stupně formuloval obecně poprvé Vieta ([12], viz také [1], díl II, str. 637).

2. Určení jednoho reálného kořene rovnice lichého stupně vždy graficko-numerickou aproximací. Speciálně určení největšího reálného kořene rovnice 3. stupně pomocí grafu funkce x^3.

3. Rozklad levé strany anulované rovnice 4. stupně na součin dvou kvadratických trojčlenů [viz (26)], a to vždy po předchozí redukci rovnice 4. stupně na tvar bez třetí mocniny neznámé. Úprava vede na rovnici 3. stupně [viz (32)]. Tento obrat se vyskytuje poprvé u Descartesa ([4], viz také [9], [11], [13]).

Na důsledně graficko-numerickém určení jednoho kořene rovnice lichého stupně trváme proto, že vede rychleji k výsledku požadované přesnosti než metody ryze numerické (regula falsi, Newtonova, numerická iterace a pod.). Poměrně velmi přesné určení jednoho reálného kořene redukované rovnice dovoluje určit další dva kořeny rovnice 3. stupně z kvadratické rovnice (5), jejíž koeficienty jsou jednoduchými funkcemi prvního kořenu. Pro praktické užití je důležitý přesně nakreslený graf funkce x^3 ve vhodném měřítku resp. v různých měřítkách; urychlí se výpočet.

Velká pozornost se dnes věnuje rovnicím 4. stupně, jež jsou běžným jevem v technických vědách. V teorii servomechanismů bývá v této souvislosti uváděna jako velmi vhodná metoda, nazývaná Porterova [14]. Její hlavní myšlenka je tato: Pišme rovnici

$$x^4 + a_3x^3 + a_2x^2 + a_1x + a_0 = 0$$

ve tvaru

$$(x^2 + b_1x + b_0)(x^2 + c_1x + c_0) = 0\,.$$

Mezi koeficienty a_k, $k = 0, 1, 2, 3$ a b_i, c_i, $i = 0, 1$ platí vztahy

$$a_3 = b_1 + c_1\,, \tag{α}$$

$$a_2 = b_0 + b_1c_1 + c_0\,, \tag{β}$$

$$a_1 = b_1c_0 + b_0c_1\,, \tag{γ}$$

$$a_0 = b_0c_0\,. \tag{δ}$$

Zvolíme libovolné $b_1^{(1)}$ a z (α) určíme $c_1^{(1)}$. Dosazením do (β) a (γ) vypočteme $b_0^{(1)}$, $c_0^{(1)}$, jež pak dosadíme do (δ). Rovnosti (δ) velmi pravděpodobně nevyhovíme. Zkusíme proto jinou hodnotu $b_1^{(2)}$ a pokračujeme tak dlouho, až rovnosti (δ) vyhovíme uspokojivým způsobem. Podle kvality koeficientů a_k lze celý postup uspořádat různými způsoby tak, aby se výpočet usnadnil. Je zřejmé, že takové řešení není ani příliš rychlé, ani příliš přehledné.

Myšlenka Porterovy metody se blíží již zmíněnému Descartesovu postupu. Dovedeme-li Descartesovu úpravu směřující k rovincím (32) až do konce způsobem užitým zde pro řešení rovnic 3. stupně, dostáváme způsob popsaný v tomto článku; je rychlý a přitom velmi přesný. S uvedenými obraty pak vystačíme i u rovnic 5. stupně. Výhodou popsaného postupu je také, že se nemusíme starat o to, zda je daná rovnice stabilní či nikoli (tj. jsou-li reálné části kořenů vesměs záporné či nikoli), jak je tomu např. u Porterovy metody i jinde [10]. Také otázka reálnosti a násobnosti kořenů není pro náš postup podstatná. Víme, že u některých metod, např. Lobačevského (Graeffe-Enckeovy, [8]) násobnost či imaginárnost kořenů ovlivňuje konkrétní postup. Jestliže ovšem numerické výsledky vedou k závěru, že daná rovnice má (asi) vícenásobné kořeny, je třeba tuto věc ověřit příslušným kriteriem (viz př. 3).

Popsaná metoda se zdá pro praxi vhodnou.

Literatura

[1] Cantor M.: *Vorlesungen über Geschichte der Mathematik, I—III.* Teubner, Leipzig 1900.
[2] Cardano, H.: *Artis magnae sive de regulis algebraicis liber unus,* Nürnberg 1545.
[3] Čajka, J.: *Přibližné řešení algebraických rovnic vyšších stupňů.* Slaboproudý obzor 19 (1958), č. 4, str. P 9—P 12.
[4] Descartes, R.: *La géometrie, liv. III.* Leyden 1637, Paris 1664.
[5] Frazer, R. A., Duncan, W. J., Collar, A. R.: *Elementary matrices (and some applications to dynamics and differential equations).* Cambridge a New York 1955.
[6] Janáč, K.: *Methody k řešení algebraických rovnic vyšších stupňů.* Slaboproudý obzor 14 (1953), č. 6, str. P 35—P 40.
[7] Kořínek, Vl.: *Základy algebry.* NČSAV, Praha 1953.
[8] Láska, V., Hruška, V.: *Teorie a prakse numerického počítání.* JČMF, Praha 1934.
[9] Matthiessen, L.: *Grundzüge der antiken und modernen Algebra der litteralen Gleichungen.* Teubner, Leipzig 1878. (1000 stran, 38 stran poznámek o literatuře.)
[10] Oldenburger, R.: *Ein schnelles Lösungsverfahren für algebraische Gleichungen.* Regelungstechnik 4 (1956), str. 261—266, 5 (1957), str. 15—19.
[11] Petersen, J.: *Théorie des équations algébriques.* Gauthier-Villars, Paris 1897.
[12] Vieta, F.: *De euqationum recognitione et emendatione libri duo,* Paris 1615.
[13] Todhunter, I.: *An elementary treatise on the theory of equations,* Cambridge a London 1867.
[14] Trnka, Z.: *Servomechanismy,* SNTL, Praha 1954.