Mihalis Yannakakis

Analýza problémov lokálneho prehľadávania a ich heuristík

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 1, 12--30

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/138031`

Analýza problémov lokálneho prehľadávania a ich heuristík

Mihalis Yannakakis, Murray Hill, U.S.A.

1. Úvod

Lokálne prehľadávanie predstavuje veľmi často používaný všeobecný prístup na riešenie ťažkých optimalizačných problémov. Optimalizačný problém má množinu *riešení* a účelovú funkciu, ktorá každému riešeniu priraďuje nejakú číselnú hodnotu (cenu). Cieľom optimalizácie je nájsť *optimálne* riešenie; t.j. také riešenie, ktoré má minimálnu (alebo maximálnu) cenu. Na získanie heuristiky lokálneho prehľadávania pre nejaký optimalizačný problém sa na množine jeho riešení zavádza *štruktúra susednosti*, t.j. pre každé riešenie daného problému sa špecifikuje množina k nemu „susedných" riešení (okolie). Heuristika začína v istom počiatočnom riešení, ktoré sa buď zostrojí pomocou nejakého iného algoritmu, alebo sa vyberie náhodne a ďalej pokračuje tak, že od daného riešenia prechádza k nejakému lepšiemu susednému riešeniu a tento postup opakuje tak dlho, kým také riešenia existujú. Heuristika napokon skončí v riešení, ktoré vo svojom okolí nemá lepšieho suseda; t.j. v *lokálne optimálnom* riešení.

Táto schéma sa úspešne uplatňuje pri riešení viacerých problémov. S heuristikami lokálneho prehľadávania súvisia dve dôležité otázky, a to (1) kvalita získaného riešenia, t.j. nakoľko dobré sú získané optimá pre zvolenú štruktúru susednosti a v akom vzťahu sú lokálne ku globálnym optimám a (2) aká je zložitosť heuristík lokálneho prehľadávania, t.j. ako rýchlo môžeme nájsť lokálne optimá. Vo výbere štruktury susednosti je jasný trade-off: čím väčšie je okolie, tým lepšie budú lokálne optimá, ale na druhej strane však môže byť ťažšie tieto lokálne optimá vypočítať. Návrh dobrej heuristiky lokálneho prehľadávania preto obsahuje aj výber takej susednosti, ktorej sa v tomto ohľade podarí dosiahnuť vhodnú rovnováhu. Napriek tomu, že sa už našlo zopár princípov a techník na vytváranie heuristík, zostáva až dodnes návrh a analýza dobrej heuristiky lokálneho prehľadávania hlavne vecou experimentálnej zručnosti.

Za posledných pár rokov sa obnovila aktivita v oblasti lokálneho prehľadávania, a to na experimentálnom, ako aj na teoretickom fronte. Experimentálny výskum sa zameriava na návrh rýchlych algoritmov, ktoré hľadajú v rozumnom čase rozumné riešenia pre veľmi veľké prípady takých klasických optimalizačných problémov, ako je napríklad problém obchodného cestujúceho; zatiaľ čo v teoretickom výskume sa

---

MIHALIS YANNAKAKIS: *The Analysis of Local Search Problems and their Heuristics.* Proc. 1990 Symp. Theoretical Aspects of Comp. Science (Ed. C. CHOFFRUT). Lecture Notes of Computer Science, Vol. 415, pp. 298–311.

rozvíja teória zložitosti lokálneho prehľadávania. V tomto článku podáme prehľad časti teoretického výskumu v oblasti lokálneho prehľadávania.

Lokálna optimalizácia sa používa rovnako v súvislosti so spojitými, ako aj s diskrétnymi optimalizačnými problémami. V druhej časti tohto článku sa budeme veľmi stručne zaoberať prípadom spojitých problémov. V zbývajúcich častiach článku sa potom budeme venovať už len diskrétnym a kombinatorickým problémom. V tretej časti opíšeme niektoré z klasických kombinatorických optimalizačných problémov a štruktúry susednosti, ktoré sú s týmito problémami spojené v heuristikách lokálneho prehľadávania. Existuje mnoho iných problémov lokálneho prehľadávania, ktoré nepochádzajú síce priamo z optimalizácie, ale napriek tomu ich možno prirodzene vyjadriť ako prípady lokálneho prehľadávania. Jedným takým príkladom je problém nájdenia stabilných konfigurácií v neurónových sietiach. Popíšeme tento i ďalšie podobné problémy lokálneho prehľadávania, v ktorých je cieľom nájsť lokálne optimum nejakej vhodne definovanej účelovej funkcie.

Počet a kvalita lokálne optimálnych riešení a ich vzťah ku globálnym optimám závisí od zložitosti daného optimalizačného problému. Známe výsledky formalizujúce túto závislosť uvádzame v štvrtej časti.

V 5. časti pojednávame o zložitosti problémov a príslušných heuristík lokálneho prehľadávania. Skúsenosti ukazujú, že heuristiky lokálneho prehľadávania konvergujú dosť rýchlo, v čase, ktorý možno ohraničiť polynómom nízkeho stupňa. Analytických výsledkov, ktoré by podporovali tieto experimentálne pozorovania však nie je veľa a analyzovať hoci len zložitosť najhoršieho prípadu heuristík je často netriviálna úloha. Dokonca ani vtedy, ak má heuristika lokálneho prehľadávania exponenciálnu zložitosť (najhoršieho prípadu) nie je vylúčené, že lokálne optimá možno nájsť rýchlejšie pomocou iných, možno nie iteračných metód. Zaujímavým príkladom je v tomto ohľade lineárne programovanie, na ktoré sa možno pozerať ako na problém lokálneho prehľadávania: vrcholy polytopu*) predstavujú riešenia a hrany polytopu určujú štruktúru susednosti. V tomto prípade sa lokálna optimálnosť zhoduje s globálnou a štandardným algoritmom lokálneho prehľadávania je simplexová metóda, ktorá si v najhoršom prípade (a pre väčšinu pivotných pravidiel) vyžaduje exponenciálny počet iterácií. Ale lineárne programovanie možno vyriešiť v polynomickom čase pomocou iných priamych metód, ako je metóda elipsoidov alebo Karmarkarov algoritmus (ktoré dokonca ani nepracujú s vrcholmi polytopu) [Kh, Ka].

Zložitosť nájdenia lokálne optimálnych riešení zostáva pre mnohé zaujímavé problémy otvorená. Preto Johnson, Papadimitriou a Yannakakis zaviedli v [JPY] istú zložitostnú triedu. Táto trieda, ktorú nazvali PLS (čo znamená Polynomial-time Local Search — lokálne prehľadávanie v polynomickom čase) leží kdesi medzi triedami P a NP. Súčasné výsledky ukázali, že mnohé dôležité problémy lokálneho prehľadávania sú PLS-úplné (vzhľadom na vhodne definovanú redukciu). To znamená, že PLS charakterizuje zložitosť problémov lokálneho prehľadávania v tom istom zmysle, v akom

*) Autor používa pojem polytop na označenie polyedrickej množiny a v niektorých prípadoch ním označuje polyéder, t.j. ohraničenú polyedrickú množinu. Pozn. prekl.

NP charakterizuje zložitosť (ťažkých) optimalizačných problémov. O týchto otázkach budeme hovoriť v 5. časti a zhrnieme ich v 6. časti článku.

2. Spojité problémy

Keď človek počuje o „lokálnej optimálnosti", prvé čo si predstaví, je optimalizačný problém v euklidovskom priestore R^n nejakej konečnej dimenzie s prirodzenou euklidovskou susednosťou. V spojitom optimalizačnom probléme sa hodnota $c(x)$ optimalizuje vzhľadom na (riešenie) $x \in S$. Množina riešení $S \subseteq R^n$ sa zvykne špecifikovať pomocou množiny ohraničení, ktoré majú tvar nerovností $g_1(x) \leqq 0, \ldots, g_m(x) \leqq 0$, kde výrazy $g_i(x)$ $(i = 1, \ldots, m)$ predstavujú vo všeobecnosti ľubovoľné n-árne reálne funkcie premenných $x \in R^n$. Riešenie $x \in S$ sa nazýva *lokálne optimálnym* riešením, ak v otvorenej guli so stredom v bode x neexistuje lepšie riešenie; to znamená, že existuje nejaké kladné číslo ε také, že pre všetky riešenia $y \in S$, ktoré nie sú od riešenia x vo vzdialenosti väčšej než ε, platí $c(x) \leqq c(y)$.

Najjednoduchším typom spojitých optimalizačných problémov sú úlohy *lineárneho programovania*. V problémoch lineárneho programovania sú aj účelová funkcia $c(x)$, aj funkcie $g_i(x)$ určujúce priestor prípustných riešení lineárne a lokálna optimálnosť sa zhoduje s globálnou, t.j. každé lokálne optimálne riešenie je zároveň aj globálne optimálnym riešením. To platí aj pre všeobecnejší prípad problémov *konvexného programovania*, ktoré sa vyznačujú tým, že ich účelová funkcia je konvexná a priestor prípustných riešení S tvorí konvexnú množinu (ak je priestor S určený tak ako v predchádzajúcom prípade pomocou funkcií g_i, tak potom sú tieto funkcie konvexné). Pomocou Chačijanovej metódy elipsoidov alebo pomocou Karmarkarovho algoritmu [Kh, K] možno problém lineárneho programovania vyriešiť v polynomickom čase. Aj úlohy konvexného programovania možno riešiť pomocou metódy elipsoidov v polynomickom čase za predpokladu, že máme k dispozícii algoritmus na riešenie problému „separácie": algoritmus separácie pre daný bod $x \in R^n$ rozhodne, či $x \in S$ a ak $x \notin S$, potom je výstupom algoritmu nadrovina, ktorá oddelí x od S (ďalšie podrobnosti možno nájsť v práci [GLS]).

Ak účelová funkcia nie je konvexná, optimalizačný problém je podstatne ťažší, a to aj v tom prípade, keď je prípustný priestor S polyedrický (t.j. keď sú funkcie g_i lineárne). Po prvé neplatí, že z lokálnej optimálnosti vyplýva globálna. Ďalej NP-ťažké problémy možno pomerne ľahko zakódovať pomocou kvadratickej účelovej funkcie. Uvažujme napríklad problém batoha (Knapsack alebo Subset Sum problem): sú dané prirodzené čísla $a_1, \ldots, a_n$ a prirodzené číslo b. Rozhodnite, či sa b rovná súčtu niektorých čísel a_i, t.j. či pre nejaké $I \subseteq \{1, \ldots, 3n\}$ platí $\sum_{i \in I} a_i = b$. Tento problém možno redukovať na problém minimalizácie účelovej funkcie $\sum_{i=1}^{n} x_i(1 - x_i)$ za podmienok $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ a $0 \leqq x_i \leqq 1$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$. Riešenie má najmenšiu možnú cenu (nulovú) práve vtedy, ak každá premenná x_i nadobúda hodnotu 0 alebo 1. Premenné, ktoré nadobudli hodnotu 1, tvoria riešenie problému batoha. To znamená, že problém (globálnej) optimalizácie je NP-ťažký.

Vo všeobecnosti zvyknú mávať algoritmy pre úlohy nekonvexného programovania iteratívny charakter; v každej iterácii vyberajú „dobrý" smer na prechod od aktuálneho bodu (riešenia) k nasledujúcemu bodu. Vo väčšine prípadov nemajú tieto algoritmy nádej na dosiahnutie globálnej optimálnosti a reálne sa môžu zamerať len na hľadanie lokálneho optima. Murtyho a Kabadiho, Pardalosove a Schnitgerove, ako aj Vergilisove, Steiglitzove a Dickinsonove [MK, PS, VSD] výsledky naznačujú, že dokonca aj tento skromný cieľ je vo všeobecnosti ťažký. Ukázali konkrétne, že aj testovanie, či je dané riešenie lokálne optimálne je NP-ťažké a že naviac táto skutočnosť platí aj pre dosť jednoduché typy úloh nekonvexného programovania.

Zaujímavý prípad, kedy možno nájsť lokálne optimá za polynomický čas, je konkávny problém batoha [MV]. Úlohou je minimalizovať hodnotu súčtu $\sum_{i=1}^{n} q_i(x_i)$ za predpokladov $\sum_{i=1}^{n} a_i x_i = b$ a $l_i \leqq x_i \leqq u_i$ pre všetky $i = 1, \ldots, n$, kde každá q_i je striktne konkávna diferencovateľná funkcia. Všimnite si, že problém batoha, ktorý sme formulovali vyššie, je zvláštnym prípadom tohoto problému, a preto je nájdenie globálneho optima NP-ťažké. Uvedomte si tiež, že ak budeme minimalizovať konkávnu funkciu definovanú na konvexnej množine S, môžeme obmedziť svoju pozornosť na extrémne body množiny S [MV]. Ak je potom S tak ako predtým polytop, potom sa možno na problém pozerať ako na spojitý alebo na diskrétny optimalizačný problém, ktorého riešením sú vrcholy polytopu.

3. Diskrétne problémy

Množina riešení je v tomto prípade diskrétna a konečná. Ako sme už spomenuli, medzi spojitými a diskrétnymi problémami nie je vždy ostrý rozdiel a v mnohých prípadoch môžeme ten istý problém chápať buď ako spojitý, alebo ako diskrétny. Napríklad na problémy lineárneho programovania sa môžeme pozerať ako na diskrétne problémy. Predpokladajme kvôli jednoduchosti, že prípustný priestor je (ohraničený) polytop, riešeniami (úlohy lineárneho programovania) sú vrcholy polytopu a susedmi vrcholu sú k nemu priľahlé vrcholy na polytope. Aj pri takejto formulácii majú problémy lineárneho programovania tú dôležitú vlastnosť, že z lokálnej optimálnosti vyplýva globálna optimálnosť.

Najprv popíšeme heuristiky lokálneho prehľadávania spojené s niektorými základnými problémami kombinatorickej optimalizácie. Potom sa budeme zaoberať niektorými problémami, ktoré možno formulovať v termínoch lokálneho prehľadávania.

Optimalizačné úlohy

Na rozdiel od spojitých problémov neexistuje v prípade diskrétneho optimalizačného problému nejaká „prirodzená“ susednosť. Pre ten istý optimalizačný problém môžeme zaviesť ľubovoľne veľa rozličných štruktúr susednosti. Nájdenie dobrej štruktúry susednosti zohráva v skutočnosti kľučovú úlohu v návrhu dobrej heuristiky lokálneho prehľadávania. Definujeme teraz zopár problémov a možné štruktúry susednosti.

Maximálny rez. Pre daný graf s ohodnotenými hranami nájdite také rozdelenie vrcholov na dve časti, pre ktoré je váha rezu, t.j. suma váh hrán spájajúcich vrcholy z týchto dvoch častí, maximálna. Pre tento problém možno najjednoduchšie definovať susednosť tak, že dve rozdelenia sa považujú za susedné vtedy, ak jedno možno dostať z druhého presunutím jediného vrcholu z jednej strany rozdelenia na stranu druhú.

Rozdelenie (bisekcia) grafu. Opäť máme daný graf s ohodnotenými hranami a chceme nájsť také rozdelenie vrcholov grafu na dve časti tentoraz *rovnakej veľkosti* V_1 a V_2, pre ktoré váha rezu nadobúda minimálnu (alebo maximálnu) hodnotu. (Minimalizačná verzia problému je ekvivalentná maximalizačnej verzii.) Najjednoduchšia susednosť v tomto prípade je výmenná susednosť: vymeň vrchol z jednej strany V_1 za vrchol z druhej strany V_2. Omnoho silnejšia susednosť a väčšie okolie sa používa v Kernighan-Linovej heuristike [KL]. V tomto prípade nie je okolie symetrické, ale závisí od váh jednotlivých hrán. Kernighan-Linova heuristika prechádza od jedného rozdelenia k susednému rozdeleniu tak, že vykoná postupnosť gradientných výmien, t.j. v každom kroku postupnosti sa na vzájomnú výmenu vyberie najlepšia možná dvojica vrcholov spomedzi tých, s ktorými sa nehýbalo v predchádzajúcich krokoch postupnosti. Pritom „najlepší“ v tomto prípade znamená, že výmeny vrcholov vedú k minimalizácii ceny rozdelenia, t.j. váha rezu sa (výmenou dvojice vrcholov) zmenší čo najviac alebo vzrastie čo najmenej. Susednými rozdeleniami daného rozdelenia sú potom tie rozdelenia, ktoré dostaneme po prvej, druhej, ..., n-tej výmene vo vyššie spomenutej postupnosti. Ukazuje sa, že táto základná myšlienka pripúšťajúca, aby krok z jedného riešenia do susedného riešenia pozostával z ľubovoľného počtu zmien, využívajúca gradientné kritérium na zvládnutie potenciálne exponenciálneho prehľadávania neohraničenej hĺbky, predstavuje fundamentálnu a veľmi úspešnú techniku lokálneho prehľadávania. Sú možné rozličné variácie základného algoritmu. V modifikácii, ktorú navrhli Fiduccia a Matheyeses [FM] sa každá výmena z postupnosti rozkladá na dva kroky. V prvom kroku sa vyberie najlepší (zatiaľ nepohnutý) vrchol a prenesie sa z jednej strany na druhú a potom sa (v druhom kroku) rozdelenie vyváži presunutím najlepšieho vrcholu z opačnej strany. Tieto heuristiky sa úspešne uplatnili v rozličných aplikáciách, napríklad pri ukladaní obvodov [DK]. Konvergujú prijateľne rýchlo k dostatočne kvalitným lokálne optimálnym riešeniam. Výsledky rozsiahlych experimentov a porovnanie so simulovaným žíhaním obsahuje práca [JAMS1].

Kernighan-Linovu heuristiku možno zovšeobecniť na rozdelenia vrcholov grafu na viac než na dve časti [GZ]. Barnes, Vanelli a Walker navrhli v [BVW] pre tento problém inú heuristiku s netriviálnou susednosťou. Táto heuristika rieši v každej iterácii dopravný problém, aby rozhodla, ktoré vrcholy prerozdeliť pri prechode od jedného rozdelenia k susednému rozdeleniu.

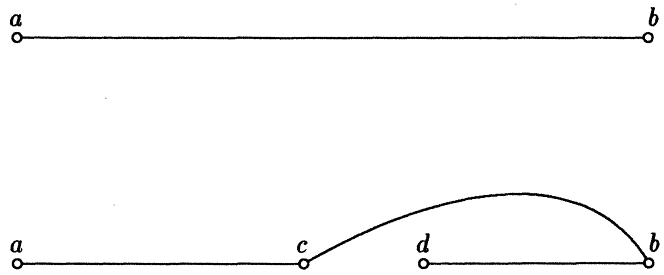
Problém obchodného cestujúceho. Máme dané ohodnotenia hrán úplného grafu na n vrcholoch („mestá") a našou úlohou je nájsť „najlacnejší" uzavretý sled, ktorý*) prechádza cez každé mesto práve raz. V špeciálnom prípade predstavujú mestá body roviny a váhy hrán zodpovedajú euklidovským vzdialenostiam medzi týmito bodmi. Najjednoduchšia susednosť je v tomto prípade 2-opt.: dve hrany (a, b), (c, d) sa nahradia dvoma inými hranami (a, c) a (b, d) a vytvorí sa tým iná cesta (pozri obr. 1.).

Obr. 1

Ak sa napríklad v rovinnom euklidovskom prípade dve hrany (a, b) a (c, d) navzájom križujú, vyplýva z trojuholníkovej nerovnosti, že ich nahradenie dáva vždy lepšiu cestu, ako bola tá pôvodná. Všimnite si však, že v rovine môže aj pre takú cestu, ktorá sa nepretína sama so sebou, existovať 2-opt. krok, ktorý zníži jej cenu. Susednosť 2-opt. možno rozšíriť na 3-opt., alebo ešte všeobecnejšie na k-opt., v ktorej sa k hrán pôvodnej cesty nahrádza k novými hranami.

Lin-Kernighanova heuristika pri prechode od jednej cesty k susednej ceste umožňuje preložiť ľubovoľný počet hrán. Na to, aby mohla povoliť neohraničené prehľadávanie do hĺbky a vyhla sa exponenciálnej explózii, používa opäť zložitostné gradientné kritérium [LK]. Základnú ideu tejto heuristiky možno načrtnúť takto: z danej uzavretej cesty môžeme odstrániť hranu (a, b) a dostaneme hamiltonovskú cestu s koncovými bodmi a a b. Považujme jeden z koncových bodov, povedzme a, za pevný a druhý (3) za voľný. Ak pridáme hranu (b, c) vychádzajúcu z voľného koncového bodu, vytvorí sa cyklus. V cykle existuje jediná hrana (c, d) incidentná s bodom c, ktorej odstránením sa cyklus rozpadne a vznikne nová hamiltonovská cesta s novým voľným koncovým bodom d (pozri obr. 2.).

*) Z hľadiska teórie grafov ide o úlohu nájsť najkratší hamiltonovský cyklus. Pozri [Pl]. Pozn. prekl.



Obr. 2

Táto operácia sa nazýva *rotácia*. Pridaním hrany, ktorá spája pevný koncový bod a s aktuálnym koncovým bodom d, môžeme cestu vždy uzatvoriť. Prechod Lin-Kernighanovej heuristiky od jednej uzavretej cesty k susednej pozostáva z týchto krokov: najprv sa odstráni hrana, aby sa vytvorila hamiltonovská cesta, potom sa uskutoční postupnosť rotácií a napokon sa opätovne spoja dva koncové body, aby sa vytvorila uzavretá cesta. Rotácie, ktoré tvoria postupnosť, sa vyberajú pomocou gradientného kritéria a naviac pre ne platí, že žiadna z nich nemôže zaviesť opätovne do cesty hranu, ktorá bola už raz odstránená.

Bentley a Johnson experimentovali s 2-opt., 3-opt. a Lin-Kernighanovou metódou [B, BJMR, JAMS3] na veľmi veľkých prípadoch. Pre prípady pozostávajúce z náhodne rozmiestnených bodov v rovine dosiahli 2-opt., 3-opt. a Lin-Kernighanovou metódou výsledky, ktoré sa od optimálnych odlišovali o menej než 5,5 %, 3,5 %, resp. 1,5 %.

Problémy vyhľadávania

Problém vyhľadávania je vo všeobecnosti určený reláciou, ktorá priraďuje každému vstupu jeden alebo množinu viacerých prípustných výstupov. Cieľom vyhľadávania je pre daný vstup uviesť jeden z týchto výstupov. Existuje množstvo problémov vyhľadávania, pre ktoré možno definovať vhodnú účelovú funkciu a potom preformulovať pôvodný problém na úlohu nájdenia nejakého lokálneho optima tejto funkcie. Uvažujme napríklad nasledujúci problém, ktorý predložil Knuth: je daná matica A typu $m \times n$, kde $m < n$. Nájdite (regulárnu) podmaticu B typu $m \times m$ matice A takú, že absolútna hodnota žiadneho prvku matice $B^{-1}A$ nepresahuje hodnotu 1. Keď použijeme Kramerovo pravidlo, nie je ťažké vidieť, že tento problém je ekvivalentný nasledujúcemu problému lokálnaho prehľadávania. Riešeniami sú (regulárne) podmatice typu $m \times m$ matice A, cenou podmatice je absolútna hodnota jej determinantu a dve matice sú susedné, ak jednu možno dostať z druhej výmenou niektorého stĺpca.

Nasledujúci problém vzniká v súvislosti s markovovským rozhodovacím procesom s konečným počtom stavov, keď chceme nájsť takú taktiku, ktorá by maximalizovala pravdepodobnosť toho, že proces dosiahne jeden z danej množiny cieľových stavov [C, H]. Je daný orientovaný graf M, ktorého vrcholy (alebo stavy) sú rozdelené do troch množín: množiny R randomizujúcich vrcholov, množiny C riadiacich vrcholov a množiny T cieľových vrcholov. Pre každú hranu $i \to j$ vychádzajúcu z ľubovoľného randomizujúceho vrchola i je daná prechodová pravdepodobnosť p_{ij}. (Markovova) taktika τ vyberá pre každý riadiaci vrchol jeden prechod (výstupnú hranu). Problém spočíva v nájdení postupu, ktorý maximalizuje pravdepodobnosť toho, že sa proces, ktorý začína v danom počiatočnom stave dostane do nejakého cieľového stavu. Predpokladajme kvôli jednoduchosti, že z každého vrcholu možno dosiahnuť nejaký vrchol množiny T. Potom je tento problém ekvivalentný úlohe nájsť pre všetky vrcholy i z M množinu hodnôt $v(i)$ spĺňajúcich nasledujúce podmienky:

$$v(i) = 1 \quad \text{ak} \quad i \in T; \tag{1}$$

$$v(i) = \sum_j p_{ij} v(j) \quad \text{ak} \quad i \in R; \tag{2}$$

$$v(i) = \max_{i \to j} v(j) \quad \text{ak} \quad i \in C. \tag{3}$$

Hodnoty $v(i)$ sú maximálne pravdepodobnosti toho, že proces začínajúci vo vrchole i dosiahne pri optimálnom postupe cieľový stav. Tieto hodnoty možno vypočítať pomocou iteračného algoritmu: pre danú taktiku τ sa vypočítajú pravdepodobnosti $v_\tau(i)$ toho, že markovovský rozhodovací proces, ktorý vychádza zo stavu i a zachováva taktiku τ, dosiahne množinu T. Je zrejmé, že hodnoty $v_\tau(i)$ vyhovujú podmienkam (1) a (2). Ak spĺňajú aj tretiu podmienku, tak potom je taktika τ optimálna. V opačnom prípade nech $i \in C$ je riadiaci vrchol, pre ktorý neplatí podmienka (3). To znamená, že pre niektorý vrchol j, ktorý nasleduje bezprostredne za i, platí $v_\tau(i) < v_\tau(j)$. Definujeme novú taktiku τ', ktorá sa zhoduje s τ až na to, že sa pre riadiaci vrchol i nevyberá hrana idúca do vrchola j. Tento iteračný algoritmus konverguje v konečnom čase, a to z toho dôvodu, že sa v každej iterácii zväčšuje hodnota funkcie $\sum v_\tau(i)$. To znamená, že na iteračný algoritmus sa môžeme pozerať ako na heuristiku lokálneho prehľadávania pre účelovú funkciu $\sum v(i)$. Tento algoritmus si môže vyžadovať exponenciálny počet iterácií. Riešenie však možno vypočítať aj v polynomickom čase tak, že sa vyrieši úloha lineárneho programovania: minimalizovať $\sum v(i)$ za predpokladu, že platia vyššie uvedené podmienky (1) a (2) a podmienka (3') $v(i) \geq v(j)$ pre všetky vrcholy $i \in C$ a hrany $i \to j$. Veľmi podobný problém vzniká aj pri ohodnocovaní logických pravidiel [UvG]. Treba nájsť riešenie, ktoré spĺňa množinu podobných podmienok, ako sú (1)–(3), ale v tomto prípade s tým rozdielom, že p_{ij} sú prirodzené čísla. Ullman a van Gelder ukázali, že v tomto prípade netreba siahnuť k lineárnemu programovaniu, pretože iteračný algoritmus konverguje najviac po n iteráciách.

Zložitejší problém vzniká, keď markovovský rozhodovací proces rozšírime na hru dvoch osôb s randomizáciou [C]. Opäť máme orientovaný graf M, ktorého stavy (vrcholy) sú rozdelené na množiny R randomizujúcich stavov, množinu T cieľových stavov, množinu $C1$-stavov ovládaných prvým hráčom a napokon množinu $C2$ stavov ovládaných druhým hráčom. Máme tiež dané prechodové pravdepodobnosti pre hrany vychádzajúce z randomizujúcich stavov. Prvý hráč sa usiluje maximalizovať pravdepodobnosť dosiahnutia cieľového stavu, zatiaľ čo druhý hráč sa túto pravdepodobnosť usiluje minimalizovať. Problém spočíva vo výpočte optimálnych stratégií pre týchto dvoch hráčov. Predpokladajme kvôli jednoduchosti, že sa z každého vrcholu (stavu) bez ohľadu na postup druhého hráča možno dostať do cieľového stavu (graf možno upraviť tak, aby sa problém redukoval na tento prípad). Potom je problém ekvivalentný nájdeniu riešenia vyhovujúceho nasledujúcim podmienkam:

$$v(i) = 1 \quad \text{ak} \quad i \in T_j; \tag{1}$$

$$v(i) = \sum_j p_{ij} v(j) \quad \text{ak} \quad i \in R_j; \tag{2}$$

$$v(i) = \max_{i \to j} v(j) \quad \text{ak} \quad i \in C1; \tag{3}$$

$$v(i) = \min_{i \to j} v(j) \quad \text{ak} \quad i \in C2. \tag{4}$$

Riešenie opäť môžeme nájsť pomocou iteratívneho algoritmu. Nech je daný postup (taktika) τ pre $C2$, t.j. pre každý vrchol $i \in C2$ je určený výber bezprostredného nasledovníka $\tau(i)$. Potom môžeme rovnako ako v predchádzajúcom prípade vypočítať v polynomickom čase (pomocou lineárneho programovania) riešenie spĺňajúce podmienky (1)–(3) a podmienky $v(i) = v(\tau(i))$ pre $i \in C2$. Ak toto riešenie vyhovuje aj podmienkam (4), je potom τ optimálna taktika pre $C2$ a riešenie dáva aj optimálnu taktiku pre $C1$. Ak podmienka (4) nie je splnená, môžeme taktiku τ modifikovať zmenou výberu pre ten vrchol $i \in C2$, pre ktorý neplatí podmienka (4). Aj v tomto prípade iteratívny algoritmus konverguje, pretože znižuje hodnotu účelovej funkcie. Rovnako ako predtým, aj na tento problém sa možno pozerať ako na problém výpočtu lokálne optimálneho riešenia pre túto účelovú funkciu [C]. V tomto prípade nevieme, či daný problém možno riešiť v polynomickom čase.

Nakoniec uvedieme ešte jeden dôležitý prípad, v ktorom sa lokálna optimalizácia používa (len) ako dôkazový prostriedok na nájdenie stabilných konfigurácií v neurónových sietiach v Hopfieldovom modeli [Ho]. Nech je daný neorientovaný graf, v ktorom je každej hrane e priradená (kladná alebo záporná) váha w_e a každému vrcholu v prahová hodnota t_v. *Konfigurácia* priraďuje každému vrcholu v stav s_v, ktorý je buď rovný 1 („zapnutý"), alebo -1 („vypnutý"). (Niektorí autori používajú miesto hodnôt 1 a -1 hodnoty 1 a 0, avšak obe verzie sú ekvivalentné). Vrchol v je *šťastný*, ak $s_v = 1$ a $\sum_{(u,v)\in E} w_{u,v} s_u + t_v \geqq 0$ alebo $s = -1$ a $\sum_{(u,v)\in E} w_{u,v} s_u + t_v \leqq 0$. Konfigurácia je *stabilná*, ak sú všetky vrcholy šťastné. A priori nie je vôbec jasné, že taká konfigurácia existuje. Skutočne, v prípade orientovaných sietí stabilná konfigurácia ani nemusí existovať [Go, Li]. Na druhej strane Hopfield ukázal, že v neorientovaných sietiach vždy existujú stabilné konfigurácie [Ho] (pozri aj [GFP]). Zaviedol účelovú funkciu $\sum_{(u,v)\in E} s_u s_v + \sum_{v\in V} t_v$ a tvrdil, že ak je vybraný vrchol nešťastný, potom sa zvýši zmenou jeho stavu hodnota účelovej funkcie. To znamená, že stabilná konfigurácia zodpovedá lokálne optimálnemu riešeniu pre takúto účelovú funkciu a vzhľadom na okolie, ktoré tvoria konfigurácie odlišujúce sa od danej konfigurácie stavom jediného vrcholu. Hopfield v práci [Ho] navrhol použiť tento model ako asociatívnu pamäť s opravovaním chýb, kde by uložené slová zodpovedali stabilným konfiguráciám. Neskoršie práce uvažovali o použití takýchto sietí na kombinatorickú optimalizáciu (či už v jej pôvodne diskrétnej alebo v spojito analógovej verzii) [HT, BG]. V súčasnosti existuje rozsiahla literatúra venovaná tomuto modelu, viac informácií možno nájsť v prácach [Go, Li, P].

4. Lokálne versus globálne optimá

Ak je každé lokálne optimum zároveň globálnym optimom, hovoríme, že štruktúra susednosti je pre daný optimalizačný problém *exaktná*. Napríklad pre problém minimálnej kostry grafu je exaktnou tá susednosť, v ktorej môžeme prejsť od jedného riešenia (kostry) k susednému riešeniu tým spôsobom, že k stromu pridáme nejakú hranu a potom z (jediného) cyklu, ktorý takto vznikol, odstránime nejakú inú hranu. Pre ľubovoľný optimalizačný problém možno vždy dosiahnuť zhodu lokálnych a globálnych optím tým, že sa vyberie dostatočne široká štruktúra susednosti. Problém je v tom, že potom môže byť ťažké prehľadať okolie; t.j. určiť, či je riešenie lokálne optimálne a v prípade, že tomu tak nie je, nájsť lepšie susedné riešenie. V mnohých klasických dobre riešiteľných optimalizačných problémoch bolo skutočne dôležitým krokom riešenia charakterizovať exaktnú susednosť; to znamená, dokázať teorému, ktorá tvrdí, že riešenie nie je optimálne práve vtedy, keď ho môžeme zlepšiť pomocou nejakej perturbácie a potom nájsť algoritmus na hľadanie takejto perturbácie. Napríklad v probléme maximálneho toku (a problému najpočetnejšieho párenia) tok (alebo párenie) nie je maximálny (najpočetnejšie) práve vtedy, ak existuje zväčšujúca polocesta.*) Pre problém toku s minimálnou cenou (podobne pre problém váženého perfektného párenia) tok (alebo perfektné párenie) nie je optimálny (optimálne), ak vo zvyšku siete existuje cyklus so zápornou cenou (resp. alternujúci cyklus so zápornou cenou) [PS2]. Je jasné, že pre NP-ťažké optimalizačné problémy nemožno očakávať nájdenie takých dobrých charakterizácií. Aby sme mohli použiť štruktúru susednosti ako časť rozumnej heuristiky lokálneho prehľadávania, musíme prinajmenšom byť schopní prehľadať množinu susedných riešení.

Rozličné výsledky poukazujú na isté obmedzenia pre NP-ťažké problémy. Viacerí autori ukázali, že pre problém obchodného cestujúceho musia mať exaktné okolia**) exponenciálnu veľkosť (za predpokladu, že nezávisia na údajoch, t.j. nezávisia na vzdialenostiach) [WSB, V]. Táto skutočnosť zostáva v platnosti aj vtedy, keď ide o prípady, v ktorých sú všetky vzdialenosti rovné buď 1, alebo 2 (a teda spĺňajú trojuholníkovú nerovnosť). Papadimitriou a Steiglitz ukázali, že ak (za predpokladu $P \neq NP$) môžeme prehľadať okolie v polynomickom čase, tak potom okolie nemôže byť exaktné a naviac, ak neplatí trojuholníková nerovnosť, musia existovať lokálne optimá, ktoré sú ľubovoľne horšie, ako je globálne optimum [PS2]. Zostrojili zlé príklady aj pre heuristiky k-opt. V ich príkladoch existuje len jediná optimálna uzavretá cesta, ale súčasne existuje exponenciálne veľa druhých najlepších uzavretých ciest, pre ktoré platí (i), žiadnu z nich nemožno zlepšiť výmenou menej než 3/8 celkového počtu hrán a (ii) každá má

*) Pozri [Pl]. Pozn. prekl.

**) Nech je pre skúmaný problém daná exaktná štruktúra susednosti. Potom exaktným okolím daného riešenia je množina riešení, ktoré sú podľa danej (exaktnej) štruktúry susednosti susedné s daným riešením. Pozn. prekl.

veľmi veľkú cenu ľubovoľne väčšiu, než je optimálna cena (za podmienky, že neplatí trojuholníková nerovnosť). To znamená, že pre k-opt. s pevnou hodnotou k (v skutočnosti pre $k < 3n/8$) predstavuje všetkých týchto exponenciálne veľa uzavretých ciest lokálne optimá nízkej kvality [PS1]. Rodl a Tovey študovali problém maximálnej nezávislej množiny a zostrojili graf G s tou vlastnosťou, že pre každú štruktúru susednosti polynomickej veľkosti má graf G (po prípadnom premenovaní) exponenciálne veľa nezávislých množín, ktoré sú síce lokálne, ale nie globálne optimálnymi riešeniami [RT].

Empirické poznatky ukazujú, že heuristiky lokálneho prehľadávania dávajú veľmi dobré približné riešenia. Napríklad, ako sme už uvádzali, heuristiky problému obchodného cestujúceho dosahujú pre „typické“ prípady v rovine riešenia, ktoré sa od optimálneho odlišujú o pár percent a dávajú lepšie výsledky než iné algoritmy, ktoré majú lepšie aproximačné vlastnosti v najhoršom prípade (napríklad Christofidov algoritmus). Nevieme o žiadnych analytických výsledkoch, ktoré by toto správanie zdôvodňovali. Keď sa na kvalitu aproximácie pozrieme z hľadiska najhoršieho prípadu, existujú pre väčšinu heuristík zlé príklady a nie je možné zaručiť žiadne ohraničenie pomeru ceny riešenia k cene optimálneho riešenia. V prípade maximálneho rezu má každý lokálne optimálny rez vzhľadom na jednoduchú susednosť váhu rovnú prinajmenšom polovici celkovej váhy všetkých hrán, a teda triviálne nemôže byť viac než 2krát menší, než je optimum. Hodnotu 2 možno dosiahnuť aj rôznymi inými spôsobmi, ale nevieme o žiadnom aproximatívnom algoritme, ktorý by mohol zaručiť lepší pomer.

5. Zložitosť

Uvažujme problém lokálneho prehľadávania Π. Problém má množinu prípadov, každý prípad má množinu riešení a s riešeniami je spojená nejaká účelová funkcia a štruktúra susednosti. Pri štúdiu zložitosti problému Π a jeho heuristík lokálneho prehľadávania vznikajú rôzne zaujímavé otázky. Po prvé, všimnite si, že pre niektoré riešenia môže existovať viac než jedno lepšie susedné riešenie, a teda heuristika má možnosť voľne si vybrať, do ktorého z týchto susedných riešení prejde. Pravidlo výberu lepšieho susedného riešenia pre každé riešenie, ktoré nie je lokálne optimálne, nazveme *pivotným pravidlom*. Výber pivotného pravidla môže drasticky ovplyvniť zložitosť heuristiky lokálneho prehľadávania. Uvažujeme napríklad problém maximálneho toku*) so štruktúrou susednosti, ktorá zodpovedá zväčšovaniu (toku) po poloceste. Je dobre známe, že ak vyberieme zväčšujúce polocesty ľubovoľne, potom budeme možno potrebovať exponenciálny počet zväčšovaní toku, ale ak zväčšujeme tok vždy po najkratšej (zväčšujúcej) poloceste, tak potom nájdeme optimum po konečnom počte iterácií (pozri napr. [PS2]). Pri skúmaní heuristiky lokálneho prehľadávania chceme teda analyzovať jej zložitosť pre rozličné pivotné pravidlá a pokúsiť sa tiež charakterizovať najlepšie možné pravidlo.

*) Pozri [Pl]. Pozn. prekl.

Po druhé, všimnite si, že ak aj heuristika lokálneho prehľadávania má exponenciálnu zložitosť, to ešte neznamená, že lokálne optimá nemôžeme nájsť ľahšie pomocou nejakých iných, úplne odlišných metód. Napríklad najlepší spôsob na riešenie problému minimálnej kostry nie je heuristika lokálneho prehľadávania, ale štandardný gradientný algoritmus. To znamená, že keď hovoríme o zložitosti samotného problému prehľadávania (t.j. nájdenia nejakého lokálneho optima), musíme pripustiť všetky typy algoritmov.

Analyzovať zložitosť konkrétnych problémov a heuristík lokálneho prehľadávania nie je ľahká úloha. Uvažujme napríklad prípad lineárneho programovania so simplexovou metódou a príslušným algoritmom lokálneho prehľadávania. Vo viacerých článkoch sa skúmala zložitosť simplexovej metódy a pre mnohé bežné pivotné pravidlá sa skonštruovali zlé príklady, ktoré ukázali, že tieto pravidlá vedú k exponenciálnemu počtu iterácií [KM, J]. Nie je však ešte známe, či existuje pivotné pravidlo, pre ktoré sa zo simplexovej metódy stane algoritmus pracujúci v polynomickom čase. Hirsch vo svojej domnienke tvrdí, že každý ohraničený polytop*) má vždy malý priemer; priemer polytopu dimenzie d s najviac m stenami nepresahuje hodnotu $m - d$ [KW]. Platnosť tohoto tvrdenia sa síce pre niektoré polytopy podarilo ukázať, ale vo všeobecnosti zostáva otvorené. Je známe, že *monotónna* verzia Hirschovej domnienky (t.j. že sa cena musí v každom kroku zlepšovať) neplatí: Todd uviedol príklad, v ktorom bez ohľadu na pivotné pravidlo musí počet iterácií presiahnuť hodnotu $m - d$, aj keď dolný odhad pre tento príklad je stále len lineárny [T]. Napokon, všimnite si, že určenie zložitosti samotného problému lineárneho programovania bolo dosť dlhý čas otvoreným problémom, až kým sa neobjavil úplne odlišný algoritmus (metóda elipsoidov [Kh]), ktorý nepoužíva lokálne prehľadávanie.

Charakterizovanie zložitosti mnohých problémov lokálneho prehľadávania predstavuje podobné otvorené problémy. Z týchto dôvodov, aby sa bolo možné zmocniť uvedených problémov, sme zaviedli v práci [JPY] zložitostnú triedu nazvanú PLS. Problém lokálneho prehľadávania Π patrí do triedy PLS**), ak jeho okolie***) možno prehľadať v polynomickom čase. Formálnejšie Π patrí do PLS, ak existujú nasledujúce tri algoritmy A, B, C s polynomickou časovou zložitosťou.

1. Pre daný prípad I problému Π algoritmus A predloží nejaké prípustné riešenie prípadu I.

2. Algoritmus B pre daný prípad I a reťazec s určí, či je s riešením prípadu I a ak áno, vypočíta jeho cenu.

3. Algoritmus C pre daný prípad I a riešenie s určí, či je s lokálne optimum a ak nie, C uvedie susedné riešenie s lepšou cenou.

*) V tomto prípade sa pojmom polytop označuje polyéder. Pozn. prekl.

**) Polynomial local search. Pozn. prekl.

***) Rozumie sa okolie ľubovoľného riešenia problému Π, t.j. množina riešení, ktoré sú k danému riešeniu susedné vzhľadom na štruktúru susednosti problému P. Pozn. prekl.

Všetky bežné problémy lokálneho prehľadávania (napríklad tie, čo boli popísané v 3. časti) patria do PLS. Táto trieda leží niekde medzi triedami P_S a NP_S*), čo sú obdoby tried P a NP pre problémy prehľadávania. Je možné, že sa PLS zhoduje s jednou z týchto dvoch tried, ale najprijateľnejšia domnienka je, že *PLS* leží práve medzi nimi. Na druhej strane sa ukázalo [JPY], že žiaden problém z PLS nemôže byť NP-ťažký, pretože v opačnom prípade by platilo NP = co-NP**). Tomu väčšina ľudí neverí, a teda je nepravdepodobné, že by sa PLS rovnala NP_S. Na druhej strane na to, aby sa ukázalo, že všetky problémy z PLS možno riešiť v polynomickom čase, by bol potrebný všeobecný prístup na nájdenie lokálnych optím. Tento prístup by musel byť prinajmenšom taký dômyselný ako metóda elipsoidov, pretože lineárne programovanie patrí do triedy PLS. V skutočnosti patrí lineárne programovanie medzi členy PLS s najlepšími vlastnosťami (napríklad lokálna a globálna optimálnosť sa zhoduje, problém globálnej optimalizácie patrí do *P* a nie je NP-ťažký, ako je tomu v prípade iných problémov triedy PLS).

V práci [JPY] bola zavedená redukcia medzi problémami lokálneho prehľadávania, nazývaná PLS redukciou: problém A sa redukuje na problém B, ak existuje algoritmus f s polynomickou časovou zložitosťou, ktorý transformuje prípad I problému A na prípad $f(I)$ problému B a iný algoritmus polynomickej časovej zložitosti, ktorý pre ľubovoľné lokálne optimálne riešenie prípadu $f(I)$ problému B zostrojí riešenie prípadu I problému A. Ukázať, že problém A je PLS-úplný vzhľadom na túto redukciu znamená, že pre problém A možno nájsť lokálne optimá v polynomickom čase práve vtedy, ak sa to dá spraviť aj pre všetky problémy z triedy *PLS*. V práci [JPY] sme dokázali PLS-úplnosť dvoch problémov. Jedným bol generický problém zvaný FLIP a druhým bol problém rozdelenia grafu vzhľadom na Kernighan-Linovu susednosť. Pripomenieme si z 3. časti, že ide o dosť komplikovanú susednosť a že pre dané rozdelenie musíme vykonať neohraničený počet výmen, kým dostaneme lepšie susedné rozdelenie. Johnson, Papadimitriou a Yannakakis si v práci [JPY] všimli, že určiť, či je riešenie lokálne optimálne vzhľadom na Kernighan-Linovu susednosť, je P-úplný problém. To isté platí aj o probléme FLIP. Vyslovili domnienku, že to je nevyhnutné na to, aby bol nejaký problém PLS-úplný. Odôvodňovali to tak, že ak algoritmus C z predchádzajúcej definície PLS problému Π pracuje napr. v LOG-SPACE, potom nevyužíva naplno polynomický čas, ktorý je pre problémy z PLS povolený, a teda sa nedá očakávať, že Π bude schopný simulovať všetky problémy z PLS (samozrejme za predpokladu, že $P \neq$ LOG-SPACE).***)

Túto domnienku nedávno prekvapujúco vyvrátil Krentel [K1], ktorý ukázal, že nasledujúci problém maximálnej splniteľnosti je PLS-úplný: pre danú množinu ohodnotených klauzúl treba nájsť také priradenie pravdivostných hodnôt, pre ktoré sa celková

*) Trieda P_S (resp. NP_S) predstavuje triedu všetkých problémov, pre ktoré možno nájsť suboptimálne riešenie v polynomickom čase na deterministickom (resp. nedeterministickom) Turingovom stroji. Pozn. prekl.

**) Nech je Σ konečná neprázdna abeceda, Σ^* označuje všetky slová nad abecedou Σ. Potom co-NP = $\{\Sigma^* \setminus L;$ L je jazyk nad Σ a súčasne $L \in NP\}$. Pozn. prekl.

***) DLOG-SPACE (NLOG-SPACE) je trieda problémov riešiteľných na deterministických (nedeterministických) Turingových strojoch v priestore $O(\log n)$. Pozn. prekl.

váha splnených klauzúl nedá zvýšiť zmenou žiadnej (jednej) premennej. Overenie, že riešenie tohoto problému je lokálne optimálne, patrí do triedy LOG-SPACE. Tento výsledok zvýšil pravdepodobnosť toho, že aj iné podobné problémy môžu byť PLS-úplné.

V poslednom čase sa ukázalo, že viacero zaujímavých problémov lokálneho prehľadávania je PLS-úplných: konkrétne problém maximálneho rezu, problém rozdelenia grafu (vzhľadom na výmennú susednosť), problém maximálnej splniteľnosti pre klauzuly dĺžky 2 a problém nájdenia stabilných konfigurácií v neurónových sietiach [SY]. Tento posledný výsledok možno interpretovať tak, že neurónové siete sú univerzálne v tom zmysle, že každý problém lokálneho prehľadávania patriaci do PLS možno vhodnou úpravou váh zakódovať pomocou nejakej neurónovej siete. Pokiaľ ide o problém obchodného cestujúceho, Papadimitriou nedávno ukázal, že tento problém je PLS-úplný vzhľadom na Lin-Kernighanovu susednosť [P]. Krentel dokázal PLS-úplnosť pre k-opt. pre niektoré pevné (hoci z praktického hľadiska príliš veľké) hodnoty k [K2]. Všetky tieto výsledky ukazujú, že PLS-úplnosť je fenomén rozšírený podobne ako NP-úplnosť (hoci dokázať PLS-úplnosť je obvykle o niekoľko rádov ťažšie). Tak ako trieda NP charakterizuje zložitosť kombinatorickej optimalizácie (mnoho prirodzených dôležitých problémov je NP-úplných), poskytuje trieda PLS pravú charakterizáciu lokálneho prehľadávania.

Aj keď trieda PLS bola zavedená kvôli štúdiu zložitosti samotných problémov prehľadávania, výsledky o úplnosti pomáhajú aj pri analýze heuristík lokálneho prehľadávania. Existuje len veľmi málo výsledkov o zložitosti heuristík, ktoré sa obyčajne zakladajú na konštrukciách ad hoc a týkajú sa jednotlivých pivotných pravidiel. Goles a Olivos ukázali v práci [GO], že problém nájdenia stabilných konfigurácií v neurónových sietiach konverguje v exponenciálnom čase, ak sa všetky vrcholy aktualizujú paralelne a synchronizovane. Haken a Luby ukázali v práci [HL], že heuristika lokálneho prehľadávania s pravidlom najprudšieho zostupu má exponenciálnu zložitosť.

Vo všetkých hore spomínaných dôkazoch PLS-úplnosti možno dosiahnuť v technickom zmysle (pozri definíciu v [SY]) „tesné“ redukcie, a teda medzi lokálnymi optimami oboch problémov existuje korešpondencia a správanie sa heuristiky lokálneho prehľadávania pre prvý problém A simuluje správanie sa heuristiky pre druhý problém B. V triede PLS sa pomerne ľahko dajú zostrojiť umelé problémy, pre ktoré si heuristika lokálneho prehľadávania vyžaduje exponenciálny čas. Z toho potom vyplýva, že heuristiky lokálneho prehľadávania spojené so všetkými vyššie uvedenými PLS-úplnými problémami majú exponenciálnu zložitosť, platí, a to bez ohľadu na to, aké pivotné pravidlo používajú.

Ďalšia otázka pre daný problém prehľadávania je: pre daný prípad a dané riešenie s, nájdite lokálne optimum, ktoré možno dosiahnuť pomocou heuristiky lokálneho prehľadávania začínajúcej v riešení s. Táto otázka je omnoho ťažšia; je P-SPACE-úplná*)

*) P-SPACE označuje triedu všetkých jazykov, ktoré možno rozpoznať pomocou nejakého deterministického Turingovho stroja, ktorý pracuje v polynomickom priestore a ktorý sa zastaví pre ľubovoľný vstup. Jazyk L je P-SPACE úplný (vzhľadom na polynomickú redukovateľnosť), ak L $\in$ P-SPACE a ľubovoľný jazyk L$'$ $\in$ P-SPACE je polynomicky redukovateľný na L. Pozri [GJ]. Pozn. prekl.

pre všetky z vyššie spomínaných problémov. Podobná úloha — nájsť lokálne optimum, ktoré je prinajmenšom také dobré ako s (hoci nemusí byť nutne dosiahnuteľné pomocou heuristiky) predstavuje ľahší problém. Je to sám o sebe problém lokálneho prehľadávania, a preto je „len" PLS-úplný.

Zaujímavým nevyriešeným problémom je 2-opt. pre problém obchodného cestujúceho. Lueker zostrojil príklady, pre ktoré si heuristika 2-opt. vyžadovala pre isté pivotné pravidlo exponenciálny počet iterácií [Lu]. Nie je známe, či to je nevyhnutné, alebo či pre iné pivotné pravidlo nie je 2-opt. polynomicky ohraničená. Pre prípad planárneho problému obchodného cestujúceho dokázali van Leeuwen a Shoone, že všetky prekríženia hrán možno odstrániť po najviac $O(n^3)$ výmenách hrán [vLS]. Všimnite si však, že na to, aby vo všeobecnosti bola uzavretá cesta v rovine 2-opt. nestačí odstrániť všetky prekríženia hrán.

V praxi sa zistilo, že heuristiky lokálneho prehľadávania konvergujú veľmi rýchlo. Situácia je podobná ako v prípade simplexovej metódy. Vo viacerých prácach sa pre lineárne programovanie uvažovali pravdepodobnostné modely, analyzovala sa očakávaná činnosť simplexovej metódy a dokázalo sa, že priemernú zložitosť možno ohraničiť polynómom nízkeho stupňa. Zdá sa, že pravdepodobnostná analýza rafinovaných heuristík lokálneho prehľadávania (napríklad Lin-Kernighanovej) predstavuje veľmi ťažký problém. Kern skúšal v práci [Ke] 2-opt. heuristiku pre náhodne rozmiestnené body v jednotkovom štvorci a dokázal, že očakávaná zložitosť 2-opt. má polynomický horný odhad (aj keď ide o polynóm n^{18}). Tovey [T1, T2] analyzoval abstraktný model pre problémy lokálneho prehľadávania, v ktorom je štruktúrou susednosti n-rozmerná hyperkocka, ktorej vrcholy zodpovedajú riešeniam. Orientácia hrán kocky (od horších k lepším riešeniam) indukuje účelovú funkciu. Tovey uvažoval rozličné prirodzené rozdelenia na možných orientáciách (napríklad v jednom takom rozdelení boli všetky možné usporiadania vrcholov podľa ceny rovnako pravdepodobné). Potom dokázal, že pri spomenutom rozdelení je očakávaná zložitosť heuristiky lokálneho prehľadávania ohraničená polynómom nízkeho stupňa.

Paralelná zložitosť

Heuristiky lokálneho prehľadávania vyžadujú exponenciálny čas len vtedy, ak sú čísla (váhy, vzdialenosti, atď.) veľké a sú binárne kódované. Keď sú čísla malé (polynomicky ohraničené) alebo ak problémy nie sú vážené, heuristiky končia v polynomickom čase, pretože každá iterácia znižuje hodnotu účelovej funkcie, ktorá môže nadobúdať len polynomicky veľa rozličných hodnôt. V tomto prípade by sme radi našli algoritmus, ktorý pracuje rýchlejšie paralelne. Zaujímavou paradigmou paralelného výpočtu je problém *maximálnej nezávislej množiny*. Tento problém možno chápať ako problém lokálneho prehľadávania (pridaním vrcholu prechádzame od jednej nezávislej množiny k susednej) a heuristika lokálneho prehľadávania pracuje v lineárnom čase, ale problém možno vyriešiť pomocou rafinovanejších paralelných metód v NC [KWi, Lu]. Luby ukázal, že problém maximálnej nezávislej množiny možno formulovať ako zvláštny prípad problému stabilnej konfigurácie tak, že sa vyberú vhodné (malé) váhy a nastolil otázku o paralelnej zložitosti takto formulovaného problému. Nakoniec sa ukázalo, že problém stabilnej konfigurácie (pre prípad, keď majú všetky hrany ohodnotenie rovné -1), ako aj neohodnotené verzie niekoľkých iných problémov (napríklad maximálny rez, nebo rozdelenie grafu pri výmennej susednosti) sú P-úplné [SY].

6. Závery

Podali sme prehľad časti teoretického výskumu v oblasti problémov lokálneho prehľadávania. Existujú príbuzné otázky, o ktorých sme nehovorili. Napríklad *simulované žíhanie*, čo je randomizované rozšírenie lokálneho prehľadávania, ktoré dovoľuje príležitostné vzostupné ťahy [KGV]. Táto heuristika generuje v každej iterácii náhodného suseda aktuálneho riešenia; ak má toto susedné riešenie lepšiu cenu, heuristika doň prechádza, v opačnom prípade doň prechádza s pravdepodobnosťou $p(\Delta, T)$, ktorá závisí od rozdielu cien (aktuálneho a susedného riešenia) a od nastaviteľného parametra T (takzvanej „teploty"). Počas behu algoritmu sa parameter T prispôsobuje; začína s vysokou hodnotou (ktorá dáva vysokú pravdepodobnosť p vzostupného kroku) a konverguje k 0. Podobné rozšírenie použité pre neurónové siete vedie k tzv. „Boltzmanovým strojom"; pozri napr. [KA]). O simulovanom žíhaní existuje rozsiahla literatúra, a to teoretická ako aj experimentálna (pozri [vLA, JAMS] a citácie v týchto prácach).

V lokálnom prehľadávaní zostáva mnoho otvorených problémov. Najdôležitejšia a najťažšia je otázka, v akom vzťahu je trieda PLS k triedam P a NP. Okrem toho existuje mnoho zaujímavých problémov lokálneho prehľadávania, o ktorých nevieme, či patria do P alebo či sú PLS-úplné. Ide napríklad o problém obchodného cestujúceho vzhľadom na susednosť 2-opt., problém subdeterminantu a problém randomizovanej hry dvoch osôb z 3. časti tohto článku. Napokon, veľmi málo sa spravilo v analýze priemerného správania heuristík lokálneho prehľadávania a to tak z hľadiska zložitosti ako i kvality aproximácie.

L i t e r a t ú r a

[BVW] E. R. Barnes, A. Vanelli and J. Q. Walker: *A New Heuristic for Partioning the Nodes of a Graph*, SIAM J. Disc. Math. *1* (1988), pp. 299–305.

[B] J. L. Bentley: *Experiments on Traveling Salesman Heuristics*, Proc. First ACM-SIAM Symposium on Discrete Algorithms, 1990.

[BJMR] J. L. Bentley, D. S. Johnson, L. A. McGeosh and E. E. Rothberg: *Near Optimal Solutions to Very Large Traveling Salesman Problems*, in preparation, 1990.

[BG] J. Bruck and J. W. Goodman: *A Generalized Convergence Theorem for Neural Networks*, IEEE Trans. Inf. Theory *34* (1988), pp. 1089–1092.

[C] A. Condon: *Computational Models of Games*, MIT Press, 1989.

[DK] A. E. Dunlop and B. W. Kernighan: *A Procedure for Placement of Standard-Cell VLSI Circuits*, IEEE Trans. CAD *4* (1985), pp. 92–98.

[FM] C. M. Fiduccia and R. M. Mattheyses: *A Linear-Time Heuristic for Improving Network Partitions*, Proc. 19th Annual Design Automation Conference, 1982, pp. 175–181.

[GJ] M. R. GAREY and D. S. JOHNSON: *Computers and Intractability: A Guide to the Theory of NP-Completness*, W. H. Freeman, 1979.

[GZ] J. R. GILBERT and E. ZMIJEWSKI: *A Parallel Graph Partitioning Algorithm for a Message-Passing Multiprocessor*, Intl. J. Paral. Prog. *16* (1987), pp. 427–449.

[G] G. GODBEER: *On the Computational Complexity of the Stable Configuration Problem for Connectionist Models*, Master's Thesis, Dept. of Comp. Sci., U. of Toronto, September, 1987.

[GFP] E. GOLES-CHACC, F. FOGELMAN-SOULIE and D. PELLEGRIN: *Decreasing Energy Functions as a Tool for Studying Threshold Networks*, Discrete Appl. Math. *12* (1985), pp. 261–277.

[GO] E. GOLES and J. OLIVOS: *The Convergence of Symmetric Threshold Automata*, Information and Control *51* (1981), pp. 98–104.

[GLS] M. GROTSCHEL, L. LOVASZ and A. SCHRIJVER: *Geometric Algorithms and Combinatorial Optimization*, Springer Verlag, 1988.

[HL] A. HAKEN and M. LUBY: *Steepest Descent Can Take Exponential Time for Symmetric Connection Networks*, Complex Systems *2* (1988), pp. 191–196.

[Ho] J. J. HOPFIELD: *Neural Networks and Physical Systems with Emergent Collective Computational Abilities*, Proc. Nat. Acad. Sci. *79* (1982), pp. 2554–2558.

[HT] J. J. HOPFIELD and D. W. TANK: *Neural Computation of Decisions in Optimization Problems*, Biol. Cyber. *52* (1985), pp. 141–152.

[H] D. HOWARD: *Dynamic Programming and Markov Processes*, MIT Press, 1960.

[J] R. J. JEROSLOW: *The Simplex Algorithm with the Pivot Rule of Maximizing Criterion Improvement*, Disc. Math. *4* (1973), pp. 367–378.

[JAMS1] D. S. JOHNSON, C. R. ARAGON, L. A. MCGEOCH and C. SCHEVON: *Optimization by Simmulated Annealing: An Experimental Evaluation*, Part I (Graph Partitioning), Operations Research, to appear.

[JAMS2] D. S. JOHNSON, C. R. ARAGON, L. A. MCGEOCH and C. SCHEVON: *Optimization by Simmulated Annealing: An Experimental Evaluation*, Part II (Graph Coloring and Number Partitioning), manuscript, 1989.

[JAMS3] D. S. JOHNSON, C. R. ARAGON, L. A. MCGEOCH and C. SCHEVON: *Optimization by Simmulated Annealing: An Experimental Evaluation*, Part III (The Traveling Salesman Problem), in preparation, 1990.

[JPY] D. S. JOHNSON, C. H. PAPADIMITRIOU, M. YANNAKAKIS *How Easy is Local Search*? J. Comp. Syst. Sci. *37* (1988), pp. 79–100.

[K] N. KARMARKAR: *A New Polynomial Algorithm for Linear Programming.* Combinatorica *4* (1984), pp. 373–395.

[KWi] R. M. KARP and A. WIDGERSON: *A Fast Parallel Algorithm for the Maximal Independent Set Problem*, J. Assoc. Comp. Mach. *32* (1985), pp. 762–773.

[Ke] W. KERM: *A Probablistic Analysisi of the Switching Algorithm for the Euclidean TST*, Mathematical Programming *44* (1989), pp. 213–219.

[KL] B. KERNIGRAN and S. LIN: *An Efficient Heuristic Procedure for Partitioning Graphs*, Bell Syst. tech. J. *49* (1970), pp. 291–307.

[Kh] L. G. KHACHIAN: *A Polynomial Algorithm for Linear Programming*, Soviet Math. Doklady *20* (1979), pp. 191–194.

[Ku] * L. KUČERA: *Kombinatorické algoritmy*, SNTL, Praha 1983.

[KGV] S. KIRKPATRIC, C. GELAT, and M. VECCHI: *Optimization by Simulated Annealing*, Science *220* (1983), pp. 671–680.

[KM] V. KLEE and G. J. MINTY: *How Good is the Simplex Algorithm*? in Inequalities III, O. Shisha ed., Academic Press, 1971.

[KW] V. KLEE and D. W. WALKUP: *The d-step Conjecture for Polyhedra of Dimension* $d < 6$, Acta Math. *117* (1967), pp. 53–78.

[KA] J. H. M. KORST and E. H. L. AARTS: *Combinatorial Optimization on a Boltzman Machine*, J. Parallel and Dist. Comp. *6* (1989), pp. 331–357.

[K1] M. W. KRENTEL: *On Finding Locally Optimal Solutions*, Proc. 4th Annual Structure in Complexity Conference, 1989, pp. 132–137; also to appear in SIAM J. Comp.

[K2] M. W. KRENTEL: *Structure in Locally Optimal Solutions*, Proc. 30th Annual Symposium on Foundations of Computer Science, 1989, pp. 216–221.

[L] S. LIN: *Computer Solutions of the Traveling Salesman Problem*, Bell Syst. Tech. J. *44* (1965), pp. 2245–2269.

[LK] S. LIN and B. KERNIGHAN: *An Effective Heuristic for the Traveling Salesman Problem*, Oper. Res. *21* (1973), pp. 498–516. [Li] J. LIPSCOMB: *On the Computational Complexity of Finding a Connectionist Model's Stable State of Vectors*, Master's Thesis, Dept. of Comp.Sci., U. of Toronto, October, 1987.

[LTT] D. C. LLEWELLYN, C.TOVEY and M. TRICK: *Local Optimization on Graphs*, Discrete Appl. Math. (1989).

[Lub] M. LUBY: *A Simple Parallel Algorithm for the Maximal Independent Set Problem*, SIAM J. Comp. *15* (1986), pp. 1036–1053.

[Lue] G. LUEKER, manuscript, Princeton University (1976).

[Mo] * J. MORÁVEK: *Složitost výpočtu a optimální algoritmy*, Academia, Praha 1984.

[MV] J. J. MORE and S. A. VAVASIS: *On the Solution of Concave Knapsack Problems*, Preprint, Argonne National Laboratory, (1988).

[MK] K. G. MURTY and S. N. KABADI: *Some NP-complete Problems in Quadratic and Nonlinear Programming*, Mathematical Programming *39* (1987), pp. 117–129.

[P] C. H. PAPADIMITRIOU: *The Complexity of the Lin-Kernighan Heuristic for the Traveling Salesman Problem*, manuscript, (1989).

[PS1] C. H. PAPADIMITRIOU and K. STEIGLITZ: *Some Examples of Difficult Traveling Salesman Problems*, Oper. Res. *26* (1978), pp. 434–443.

[PS2] C. H. PAPADIMITRIOU and K. STEIGLITZ: *Combinatorial Optimization*: Algorithms and Complexity, Prentice Hall, 1982.

[Pa] I. PARBERRY: *A Primer on the Complexity Theory of Neural Networks*, to appear in A Sourcebook on Formal Techniques in Artificial Intelligence, R. B. Banerji, ed., Elsvier, 1989.

[Pl] * J. PLESNÍK: *Grafové algoritmy*, Veda, Bratislava 1983.

[PSc] P. M. PARDALOS and G. SCHNITGER: *Checking Local Optimality in Constrained Quadratic Programming is NP-hard*, Oper. Res. Let. *7* (1988), pp. 33–35.

[PDV] * J. PLESNÍK, J. DUPAČOVÁ, M. VLACH: *Lineárne programovanie*, Alfa, Bratislava 1990.

[RT] V. RODL and C. TOVEY: *Multiple Optima in Local Search*, J. of Algorithms *8* (1987), pp. 250–259.

[SH] G. H. SASAKI and B. HAJEK: *The Time Complexity of Maximum Matching by Simulated Annealing*, J. Assoc. Comput. Mach. *35* (1988), pp. 387–403.

[SY] A. A. SCHAFFER and M. YANNAKAKIS: *Simple Local Search Problems That Are Hard to Solve*, manuscript, 1989.

[T] M. J. TODD: *The Monotonic Bounded Hirsch Conjecture is False for Dimension at Last 4*, Math. Oper. Res. *5* (1980).

[T1] C. A. TOVEY: *Hill Climbing with Multiple Local Optima*, SIAM J. Alg. Disc. Meth. *6* (1985), pp. 384–393.

[T2] C. A. TOVEY: *Low Order Polynomial Bounds on the Expected Performance of Local Improvement Algorithms*, Mathematical Programming *35* (1986), pp. 193–224.

[UvG] J. D. ULLMAN and A. VAN GELDER: *Efficient Tests for Top-Down Termination of Logical Rules*, J. Assoc. Comp. Mach. *35* (1988), pp. 345-373.

[vLA] P. J. M. VAN LAARHOVEN and E. H. L. AARTS: *Simulated Annealing:Theory and Practice*, Kluwer Academic Publishers, 1987.

[vLS] J. van Leeuwen and A. A. Schoone: *Untangling a Traveling Salesman Problem in the Plane*, Technical Report RUU-CS-80-11, University of Utrecht (1980).

[VSD] A. Vergis, K. Steiglitz and B. Dickinson: *The Complexity of Analog Computation*, Math. and Comp. in Simulation *28* (1986), pp. 91–113.

[V] V. G. Vizing: *Complexity of the Traveling Salesman Problem in the Class of Monotonic Improvement Algorithms*, Eng. Cyb. *4* (1978), pp. 623–626.

[WSB] P. Weiner, S. L. Savage and A. Bagchi: *Neighborhood Search Algorithms for Guaranteeing Optimal Traveling Salesman Tours Must be Efficient*, J. Comp. Sys. Sci. *12* (1976), pp. 25–35.

(Tituly označené * boli doplnené pri preklade.)

Preklad *Daniel Olejár*, október 1990.

Setkání s profesorem Gustavem Choquetem

na katedře matematické analýzy MFF UK v Praze 25.10.1990

(Z magnetofonové nahrávky přepsal, přeložil a upravil Mirko Rokyta)

Uvádějící: *Jsem velmi rád, že profesor Gustav Choquet přijal naše pozvání. Doufám, že diskuse s ním bude pro vás všechny zajímavá, profesora Choqueta budou také možná zajímat názory našich studentů. Pokud se týká jazyka, navrhujeme angličtinu, ale můžeme rovněž hovořit francouzsky.*

Prof. Choquet: Budu respektovat většinu, máme demokracii.

Tedy budeme mluvit česky? ... Požádal jsem prof. Choqueta, aby řekl pár slov úvodem, takže prosím.

Je obtížné říci několik slov úvodem a přitom nevynechat nic podstatného. Nejprve snad něco o francouzském vzdělávacím systému.

Základní školu navštěvují žáci mezi 6 a 11 rokem. Pak následuje střední vzdělání, které se dělí do dvou stupňů: collège a lycée. Collège studenti ukončí asi ve 14 letech a mohou pokračovat studiem lycea (lycée, něco jako vaše gymnázium), které ukončí asi v 17 letech. Někteří ovšem také až ve 20 ... Absolventi lycea získávají titul bakaláře a (což je pro Francii specifické) každý, kdo má titul bakaláře, má právo studovat na univerzitě. Nevím, jestli je to správné, ale je to tak.

Bakalářských titulů je mnoho: A, B, C, D, E, F, G, ... asi dvacet či třicet. Ty základní jsou zaměřeny na matematiku a fyziku a spousty dalších jsou v technických směrech. Náš současný ministr vzdělávání vznesl před časem požadavek, aby 80% všech mladých lidí získalo titul bakaláře. Většině rozumně uvažujících lidí se toto procento zdá vysoké, nehledě na to, že fixovat dopředu počet absolventů školy je nesmyslné. Dnes má tento titul jen asi třetina mladých lidí, ale už teď máme problémy, protože