Ja. A. Smorodinskij; V. A Ugarov

# O dvou paradoxech ve speciální teorii relativity

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 28 (1983), No. 6, 329--341

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137955

# O dvou paradoxech ve speciální teorii relativity

*Ja. A. Smorodinskij, V. A. Ugarov*

*This was sometimes a paradox,*
*but now the time gives it proof.*
W. Shakespeare

V historii každé vědy vznikají vedle fundamentálních otázek, jež v podstatných rysech určují její rozvoj, občas také otázky či problémy naprosto ne prvořadé a ne zásadního významu. Nejprve takovémuto problému nikdo nevěnuje pozornost, jednoho krásného dne však vyvolá zájem a objeví se série prací; různí autoři přicházejí s různými odpověďmi, někdy i zcela protichůdnými. To vzbudí nemalý údiv, protože otázky tohoto druhu dávno neleží na předním okraji poznání, ale v oblasti, kde je – podle názoru většiny – vše jasné. Vznikají tak svérázné paradoxy. Vysvětlení a nalezení řešení tkví jako u každého paradoxu v nalezení nekorektnosti ve formulaci úlohy. Probereme zde dva problémy tohoto typu, jež vyvolaly nemálo článků v různých fyzikálních časopisech (počet těchto článků neustále roste).

## 1. Viditelný tvar rychle se pohybujících těles*)

V roce 1892 H. A. Lorentz zformuloval překvapivé tvrzení, které umožnilo vysvětlit výsledky Michelsonova pokusu. Lorentz učinil předpoklad, že všechna tělesa, jež se pohybují vůči světovému éteru (chápanému jako jisté prostředí), se zkracují ve směru pohybu. S podobnými úvahami přišel i G. Fitzgerald, proto se v literatuře často mluví o Lorentzově-Fitzgeraldově kontrakci (k Fitzgeraldově roli viz [1]).

Když byla zformulována speciální teorie relativity, kontrakce délky měřicích tyčí ve směru pohybu vyplynula přímo z Einsteinových postulátů; speciálně jako elementární důsledek Lorentzovy transformace: kontrakce se objevuje, když tyč, jejíž délka se měří, se pohybuje vůči pozorovateli, který měření provádí.

Ve své první práci k tomu Einstein napsal toto: „... těleso mající v klidovém stavu tvar koule bude mít za pohybu – pozorováno z klidového systému – tvar elipsoidu o poloosách $R(1 - \beta^2)^{1/2}$, $R$, $R$." (viz [2], str. 18.) Zjevně tu Einstein má na mysli lo-

*) Budeme vždy předpokládat, že relativní rychlosti systémů leží v relativistické oblasti, tj. že jsou řádově rovny rychlosti světla ve vakuu. Všechny uvažované referenční soustavy jsou inerciální.

Přeloženo z časopisu Uspěchi fizičeskich nauk *107* (1972), 141—152. Pro tento český překlad provedl prof. Smorodinskij v textu některé menší úpravy.

rentzovskou kontrakci ve směru pohybu a zachování příčných rozměrů. O šest let později v polemice s V. Varičakem zodpovídá Einstein hned dvě otázky najednou ([2], str. 187):

1. „Otázka po reálnosti lorentzovské kontrakce nemá smysl. Kontrakce není reálná, neboť neexistuje pro pozorovatele pohybujícího se s tělesem; ale je reálná, protože pozorovatel nepohybující se s tělesem ji principiálně může fyzikálními prostředky dokázat“.

2. „Tvar tělesa v systému $K$, vůči němuž se těleso pohybuje, dostaneme tak, že určíme body systému $K$, s nimiž v určeném čase koincidují body pohybujícího se tělesa. Pojem současnosti, jehož přitom užíváme, je definován způsobem, který principiálně umožňuje zjišťovat současnost experimentálně, proto také lorentzovská kontrakce je v principu pozorovatelná“.

Tím je samozřejmě úplně zodpověděna zásadní strana problému.

Vrátíme-li se tedy k otázce měření lorentzovské kontrakce tyče, musíme říci, že měříme-li délku podle pravidel předepsaných teorií, tj. zaznamenáváme-li polohu obou konců pohybující se tyče současně v systému, v němž se délka měří (k tomu potřebujeme dva pozorovatele nebo dva přístroje umístěné ve dvou bodech referenčního systému), pak předpokládaný výsledek pokusu (kontrakce) je mimo veškerou pochybnost.

Padesát let po formulaci teorie relativity se však objevila poněkud jiná otázka: zda totiž můžeme zjistit lorentzovskou kontrakci, budeme-li pohybující se těleso fotografovat nebo vizuálně pozorovat. Jde přitom samozřejmě o myšlenkové pokusy, proto můžeme zanedbat rozdíly mezi fotografováním a vizuálním pozorováním způsobené fyziologií vidění. Daný problém se pochopitelně nedotýká základů teorie, ale hodilo by se mít na něj jasnou a nedvojsmyslnou odpověď, protože fotografie, která by kvalitativně a kvantitativně dokazovala lorentzovské zkrácení, by byla přímým důkazem jeho reálnosti (ve smyslu výše uvedeného Einsteinova výroku). Ukázalo se však, že odpověď není tak jednoduchá na rozdíl od přímého důkazu dilatace časových intervalů, jenž je znám již dávno: prodloužení doby života nestabilních částic, např. pionů nebo mionů, v systému, vůči němuž se pohybují, bylo potvrzeno experimentálně.

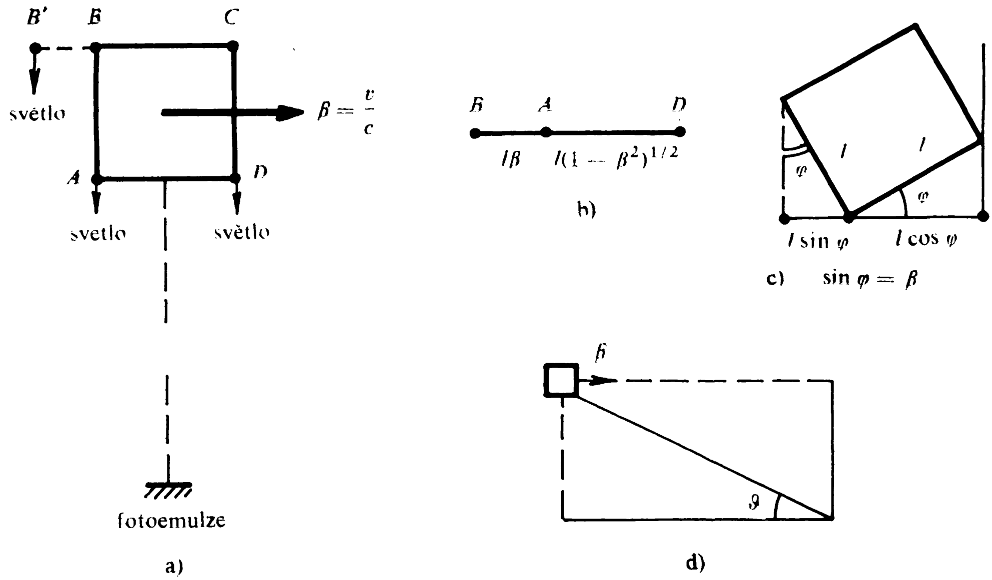
Slovo „pozorování“ v citované Einsteinově práci by mohlo být interpretováno jako vizuální pozorování, případně fotografování. Byla to zřejmě tato interpretace, která vedla k všeobecnému přesvědčení, že při pozorování (fotografování) pohybující se koule uvidíme na fotografii elipsoid. Velmi dlouho se zanedbávala ta okolnost, že určení tvaru tělesa současným změřením polohy všech bodů jeho povrchu a zobrazení tělesa na fotografii není obecně zdaleka totéž. Musíme si povšimnout dvou skutečností. Předpokládejme, že fotografujeme s nekonečně krátkou expozicí, potom na film dopadají paprsky, jež dospěly k objektivu současně. Jsou-li však různé body tělesa různě vzdáleny od objektivu, pak paprsky, které vycházejí z těchto bodů, potřebují — v důsledku konečné rychlosti šíření světla — různou dobu, aby se dostaly k objektivu. Pokud tedy těleso nepřetržitě osvětlujeme, dopadají na film současně paprsky vypuštěné různými body tělesa v různých okamžicích. Tato okolnost nemá na zobrazení vliv, pokud se těleso vůči fotoaparátu nepohybuje. V případě pohybujícího se tělesa se získané zobrazení bude lišit od fotografie nehybného tělesa. Tento jev je způsoben konečnou rychlostí světla a nesouvisí s lorentzovskou kontrakcí, nýbrž prostě s aberací. To je první okolnost. Druhá se týká toho, že mluvíme-li o viditelném tvaru tělesa, obvykle máme na mysli rovinné zobrazení na filmu nebo (s určitými výhradami) na sítnici oka. Takovéto zobrazení však znamená projekci prostorového objektu na rovinu. Vrátíme-li se k otázce fotografování tělesa, jehož lorentzovskou kontrakci chceme zjistit, je nutné zachytit zkrácení na dvourozměrné projekci. Máme-li např. jednu fotografii pohybující se tyče (jednorozměrného tělesa) na homogenním pozadí, nelze o její délce nic říci, a z jedné fotografie trojrozměrného tělesa nelze zrekonstruovat jeho tvar. Musíme zdůraznit, že ani tato druhá okolnost nesouvisí s „relativistickými efekty"; obě se však berou v úvahu při posuzování toho, jak vypadá rychle se pohybující těleso, přičemž nejzajímavější je otázka, jak lorentzovská kontrakce ovlivňuje viditelný tvar.

Počátkem diskusí byla práce R. Penrose *Viditelný tvar relativisticky se pohybujícího tělesa* [9], publikovaná v roce 1959 (v sovětské literatuře problém toho, co vidí pohybující se pozorovatel, zformuloval S. M. Rytov; diskutoval jej na seminářích v roce 1959 a publikoval jeho elementární rozbor [18]). Penroseova práce nebyla zdaleka triviální: užívalo se v ní např. konformních vlastností Lorentzovy transformace. Kromě jiného tam bylo dokázáno, že pohybující se koule v dvourozměrné projekci na fotografii se svým obrazem nebude lišit od koule nehybné. Fyzikální vysvětlení tohoto výsledku plyne z práce T. Terrella [4] (viz též článek V. F. Weisskopfa [5]), který se k problému postavil radikálně, jak o tom svědčí i název jeho článku *Neviditelnost Lorentzovy kontrakce.* Právě po těchto pracích vznikla otázka, zda je vůbec nějakým způsobem možné uvidět či vyfotografovat změnu rozměrů tělesa způsobenou lorentzovskou kontrakcí. Abychom se vyhnuli nedorozumění, znovu zdůrazněme, že díky fyziologii vidění jsou fotografování tělesa a jeho vizuální pozorování podstatně rozdílné procedury. Mluvíme-li o vizuálním pozorování, máme na mysli oko ideálních vlastností, jež se blíží vlastnostem fotografické emulze.

Penrose založil svou úvahu na stereografické projekci. Obraz, který vidí pozorovatel, lze nanést na nebeskou sféru (prostor paprsků). Promítneme-li tuto kouli (jejíž poloměr – jako u ptolemaiovského vesmíru – je možné zadat libovolně) ze severního pólu na rovinu, jež se dotýká koule v jižním pólu, dostaneme mapu koule v komplexní rovině, $z = \xi + i\eta$, na níž kružnici (viděnému obrazu koule) bude odpovídat kružnice nebo projektivní přímka*), tj. přímka doplněná o nekonečně vzdálený bod. Lorentzovým transformacím odpovídají racionální transformace souřadnic $z' = (\alpha + \beta z)(\gamma + \delta z)^{-1}$, v nichž $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$. Kružnice přitom přechází opět v kružnici včetně kružnic s nekonečně velkým průměrem. Promítneme-li transformovanou kružnici zpět na nebeskou sféru pozorovatele, vidíme, že kruhová forma tělesa se při přechodu do pohybujícího se souřadného systému nemění. Povšimněme si rovněž, že týž výsledek lze získat ze vztahu pro relativistickou aberaci, jenž můžeme uvést do tvaru

$$\operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta' = \left(\frac{c - v}{c + v}\right)^{1/2} \operatorname{tg} \tfrac{1}{2}\vartheta ;$$

*) Pokud promítaný bod opustí severní pól, jeho obraz přejde z nekonečně vzdáleného bodu do konečné vzdálenosti od počátku; proto je přímka na mapě topologicky shodná s kružnicí (pozn. aut.).




Obr. 1 Vizuální pozorování krychle prolétající kolem pozorovatele

a) vzájemná poloha pozorovatele a krychle při $\vartheta = \pi/2$,

b) viděný obraz letící krychle,

c) možná interpretace viděného obrazu: pootočení krychle o úhel $\varphi = \arcsin \beta$,

d) pozorování letící krychle pod úhlem $\vartheta$.

kružnice tedy přechází opět v kružnici (ale nikoli téhož poloměru!).

Vysvětleme nyní Terrellův výsledek. Pozorujeme-li pohybující se těleso se svítícím povrchem, fotoemulze při nekonečně krátké expozici zaznamená signály (fotony) vyzářené různými místy povrchu tělesa, které k ní současně dospívají. Protože však různé body povrchu tělesa jsou obecně různě vzdáleny od fotoaparátu, emulze zaznamenává jejich polohy v různých okamžicích. Skutečnost, že fotoemulze zaznamenává, resp. pozorovatel „vidí" v daném okamžiku různé části povrchu pohybujícího se tělesa v polohách, jež zaujímaly v různou dobu, vede k zajímavému závěru, který lze ilustrovat na jednoduchém příkladě.

Předpokládejme, že svítící krychle pohybující se po přímce rovnoběžné s jednou z jejích hran prolétá kolem fotoaparátu (nebo pozorovatele). Fotografování, resp. pozorování se provádí v okamžiku, kdy střed krychle leží na normále spuštěné na směr pohybu z bodu, kde je fotoaparát. Samozřejmě musíme předem vědět, že pohybující se těleso má ve vlastní souřadné soustavě tvar krychle.

V daném časovém okamžiku na film dopadají současně všechny fotony vyzářené současně v klidovém systému fotoaparátu na čáře $AD$, a také fotony vyzářené bodem $B$ o časový interval $l/c$ dříve ($l$ je délka hrany krychle). Ale v tom okamžiku byl bod $B$ v místě $B'$. Současné určení polohy bodů $A$ a $D$ v systému fotoaparátu dává podle obvyklého pravidla o měření délky lorentzovskou kontrakci: $l' = l(1 - \beta^2)^{1/2}$. Na druhé straně, $BB' = (l/c)\, v = \beta l$.

Z obr. 1b, c lze vidět, že obraz, který uvidí nehybný idealizovaný pozorovatel při sledování pohybující se krychle, je totožný s obrazem nehybné krychle pootočené o úhel $\varphi$, jenž je dán vztahem $\sin \varphi = \beta$. To je speciální případ obecného Terrellova výsledku, který říká, že každé pohybující se trojrozměrné těleso je v konkrétním okamžiku vidět jako pootočené. Úhel pootočení pro uspořádání znázorněné na obr. 1a je určen rovností $\varphi = \arcsin \beta$. Je-li krychle v takové poloze vůči pozorovateli, že v klidovém stavu by ji bylo vidět pod úhlem $\vartheta'$ vůči ose $x'$, pak úhel pootočení bude jiný. Je-li krychle dostatečně vzdálena od pozorovatele, je možné chápat od ní přicházející světlo jako rovnoběžný svazek. Pro pozorovatele v soustavě $K$ se tento svazek šíří pod úhlem $\vartheta$ k ose $x$, přičemž úhly $\vartheta$ a $\vartheta'$ souvisí vzájemně vztahem

$$\cos \vartheta = (\cos \vartheta' + \beta)(1 + \beta \cos \vartheta')^{-1} .$$

Změna směru rovinné vlny při přechodu od jednoho referenčního systému k druhému, jež se vůči sobě pohybují, to je aberace světla. Obraz tělesa na fotografii (či to, co vidí idealizované oko) je krychle (pozorovaná v $K$ pod úhlem $\vartheta$) pootočená o úhel $\vartheta - \vartheta'$*). Nyní už lze snadno pochopit Penroseův výsledek: pootočení koule nemění její obrys. Hlavním přínosem Terrellovy práce je to, že byl fakticky první, kdo studoval viditelný tvar (pohybujícího se) trojrozměrného tělesa.

„Zkrácení" spolu s konečnou rychlostí světla tak způsobují zdánlivé pootočení. Proto vznikla otázka, zda je možno rozlišit zkrácení a pootočení ve viditelném obrazu [6]. Takováto formulace otázky je však nekorektní. Rekonstrukce tvaru trojrozměrného tělesa z fotografie vyžaduje doplňkovou informaci, kterážto okolnost nijak nesouvisí s lorentzovskou kontrakcí.

Vrátíme-li se k příkladu s krychlí, je jasné, že víme-li, jak se krychle pohybuje, můžeme vždy ověřit „přímým pozorováním", resp. fotografováním, že nastává kontrakce, nikoli pootočení. K tomu jednoduše potřebujeme dva pozorovatele nebo dvě fotografie pořízené ze dvou míst, jež jsou na normálách ke dvěma vzájemně kolmým stěnám krychle (rovnoběžným se směrem pohybu). Pokud by se změna tvaru krychle na fotografiích interpretovala jako pootočení, pak by mu odpovídaly dvě různé osy. Oba pozorovatelé však bez problémů vysvětlí získané obrazy jako důsledek zkrácení rozměrů ve směru pohybu.

A přece, je možné vyfotografovat těleso, na němž se projevuje lorentzovská kontrakce? Jak jsme se přesvědčili, pozorování pohybujících se trojrozměrných těles vyvolává určité těžkosti při interpretaci získané fotografie. Kontrakci lze však zjistit také při pozorování jednorozměrných objektů a toho můžeme využít. Zkrácení bude názorně viditelné při srovnání délky pohybující se tyče s její vlastní délkou. Ve zmíněné Einsteinově úvaze o kouli hrál roli srovnávacího etalonu průměr koule kolmý na směr pohybu. Bylo by tedy přesvědčivé vyfotografovat letící tyč na pozadí její vlastní délky vyznačené v systému pozorovatele.

K tomu pozorovatel v systému $K$ (klidovým systémem tyče je $K'$) musí dopředu vědět,

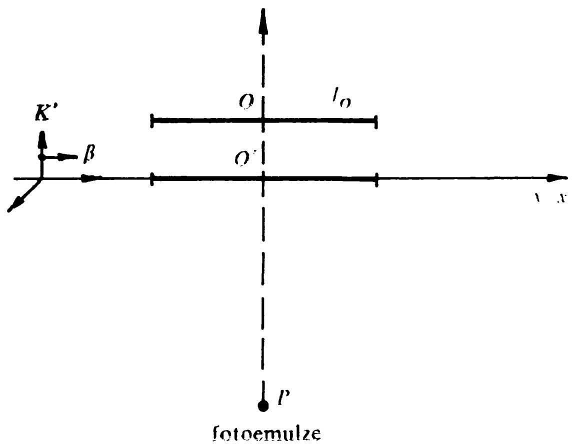
---

*) Z uvedeného vztahu pro aberaci lze úhel $\Delta\vartheta = \vartheta - \vartheta'$ snadno vypočíst. Dosadíme-li pak $\vartheta = \pi/2$, dostaneme $\Delta\vartheta = \pi/2 - \arccos(-\beta) = -\arcsin \beta$. To souhlasí s výsledkem výše uvedené úvahy: viz zavedení úhlů $\vartheta$, $\varphi$ na obr. 1c, d; při $\vartheta = \pi/2$ pozorovatel vidí „zadní" stranu krychle (pozn. překl.).

že se tyč pohybuje v daném směru a znát její vlastní délku. Potom si ve svém systému může umístit kopii tyče a vyfotografovat letící tyč na pozadí její vlastní délky. Než budeme diskutovat, jak to lze – aspoň myšlenkově – uskutečnit, povšimněme si, že užíváme ještě jednoho předpokladu.

Není možné vzít dva totožné etalony, porovnané v jedné soustavě, a přemístit jeden z nich do pohybující se soustavy, protože vždy může vzniknout otázka, zda se délka etalonu nezměnila v důsledku urychlení. Totožné etalony v systémech, jež jsou ve vzájemném pohybu, však můžeme získat i bez přenášení. Stačí využít myšlenky o totožnosti mikročástic z kvantové teorie. Jsme přesvědčeni, že vlnová délka záření atomů daného druhu, např. atomů kadmia, je vždy táž v libovolné soustavě, v níž jsou v klidu, přesněji kde se pohybují s nerelativistickými rychlostmi. To znamená, že v každém inerciálním systému můžeme vybrat totožné délky jako etalon. Samozřejmě totéž platí i pro etalony času. Takovýmto způsobem tedy můžeme vybavit podle potřeby všechny inerciální systémy tyčemi přesně téže vlastní délky.

Nejjednodušší schéma fotografování tyče, na níž se projevuje lorentzovská kontrakce, je znázorněno na obr. 2. Tyč je rovnoběžná s osou $x$ a pohybuje se podél ní. Pozorovatel je umístěn na normále k ose $x$, jež prochází středem kopie tyče nehybné v soustavě $K$. Když střed pohybující se (svítící) tyče projde normálou, spustí se mechanismus, který otevře závěrku fotoaparátu v tom okamžiku, kdy k ní dospěje světlo vyzářené body tyče, když její střed ležel na normále*). Nehybnou kopii můžeme samozřejmě vyfotografovat kdykoli. Podrobnější diskuse tohoto problému je uvedena v práci [7].

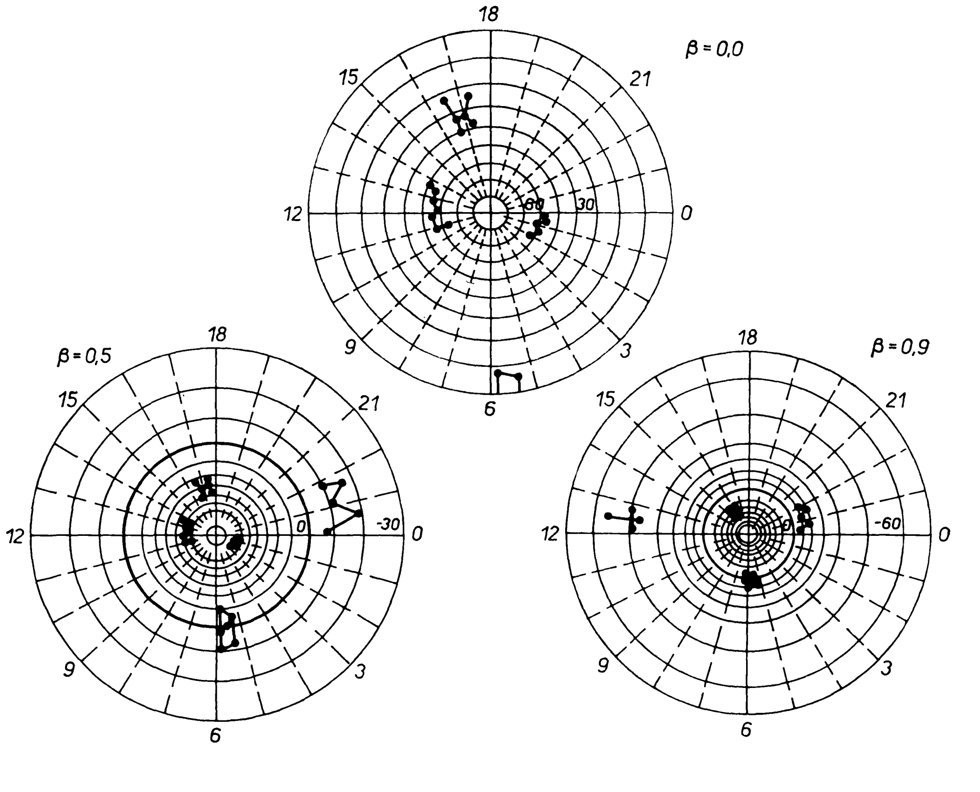



Obr. 2 Schéma dovolující v principu vyfotografovat Lorentzovu kontrakci pohybující se tyče.
Závěrka se kratince otevře, aby propustila paprsky vyzářené body tyče, a to v okamžiku, kdy její střed $O'$ prochází přímkou $OP$.

Viditelnému tvaru pohybujícího se tělesa při různých vzájemných polohách tělesa a objektivu fotoaparátu a způsobech osvětlení tělesa je věnována obsáhlá literatura. Připomeňme přehledný článek N. C. McGilla [8] (v bibliografii, kterou uvádí, stojí za povšimnutí práce [17]), v němž jsou kromě podrobné diskuse otázky o měření a fotografování délky pohybující se tyče popsány analytické způsoby konstrukce viditelného po-

*) Způsob spouštění může být ovšem i jiný (pozn. překl.).

vrchu pohybujících se těles, rozebírají se způsoby stereoskopického fotografování a fotografování při ozáření objektu (okamžitým) zábleskem. Z dalších příspěvků věnovaných tvarům pohybujících se těles jmenujme práci [9], ve které se vyšetřuje viditelný tvar pohybující se vertikální přímky, provádí-li se pozorování z normály k této přímce. Viděný obraz se dostává jako množina bodů, od kterých světlo dospívá současně do místa pozorování; obraz se mění podle polohy přímky. V práci [10] byly toutéž metodou za pomoci počítače vyšetřeny viděné obrazy v těchto případech: a) nebeská sféra s některými souhvězdími, b) kulová plocha s nanesenými poledníky a rovnoběžkami, jejíž střed prochází kolem pozorovatele ve vzdálenosti průměru této plochy, c) pohybující se řada krychlí („vlak"). Převezmeme z této práce dva obrázky. Obr. 3 ukazuje změnu viděného obrazu severní hvězdné polokoule pro pohybujícího se pozorovatele (viz též [18]). Na obr. 4 je znázorněna změna viděného obrazu povrchu koule, na níž jsou naneseny rovnoběžky a poledníky, při zvyšování rychlosti jejího pohybu. Původ zkreslení povrchu tělesa při vizuálním pozorování je zjevný. Zaujímá-li pozorované těleso konečný prostorový úhel, pak úhel aberace je pro různé části povrchu tělesa různý a zobrazení je zkreslené.

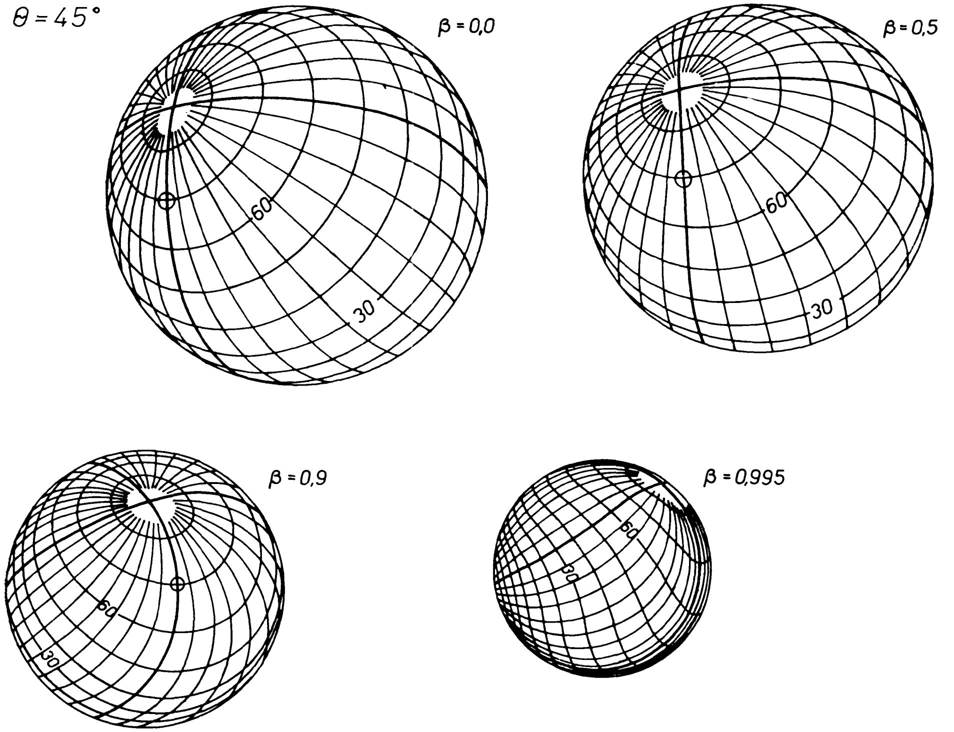



Obr. 3. Obraz severní hvězdné polokoule, jak jej vidí pozorovatel pohybující se k severnímu hvězdnému pólu.

Pozorovatel v klidu (vůči Zemi) vidí např. znázorněná souhvězdí: Velký vůz, Cassiopeu a Herkula. Při zvyšování rychlosti se v zorném poli ocitají Orion, Vodnář, a nakonec i Jižní kříž.

Konečná rychlost šíření světla může při astronomických pozorováních způsobit to, že viditelná rychlost pohybu kosmických těles, např. obálky po výbuchu hvězdy, může být větší než rychlost světla [11].

Určení skutečného tvaru pohybujícího se předmětu vyžaduje tedy k jednoznačné interpretaci kromě fotografie ještě doplňkovou informaci bez ohledu na relativistické efekty. Povšimněme si ovšem, že pozorovatel schopný fyzikálně myslet stejně nemůže přistoupit na to, že pohybující se objekt se otáčí*). Z obr. 1d vyplývá, že úhlová rychlost rotace koule $d\vartheta/dt$, a tedy i $\vartheta'$, se s časem mění, navíc nerovnoměrně**). Jestliže se však objekt




Obr. 4. Viditelný obraz kulové plochy přibližující se k pozorovateli různými rychlostmi.
Střed kulové plochy se pohybuje po přímce, která prochází ve vzdálenosti jednoho průměru od pozorovatele. Směr od bodu označeného kroužkem k pozorovateli svírá úhel 45° se směrem pohybu. Kulová plocha je pootočena tak, aby byl vidět jeden pól.

otáčí, k tomu ještě s proměnnou úhlovou rychlostí, pak na něj musí působit proměnný silový moment — uvažuje nehybný pozorovatel. Ale odkud by se vzaly síly působící na volně se pohybující těleso, provádíme-li pozorování v inerciálním systému? Pozorovatel by tedy musel připustit, že vysvětlení viditelného tvaru tělesa pootočením je prostě nesmysl. To znamená, že otázka „pootočení nebo kontrakce" je spíše logický chyták než reálný fyzikální problém.

---

*) Je velmi podivné, že jsme o tom v literatuře nenašli ani zmínku (pozn. aut.).

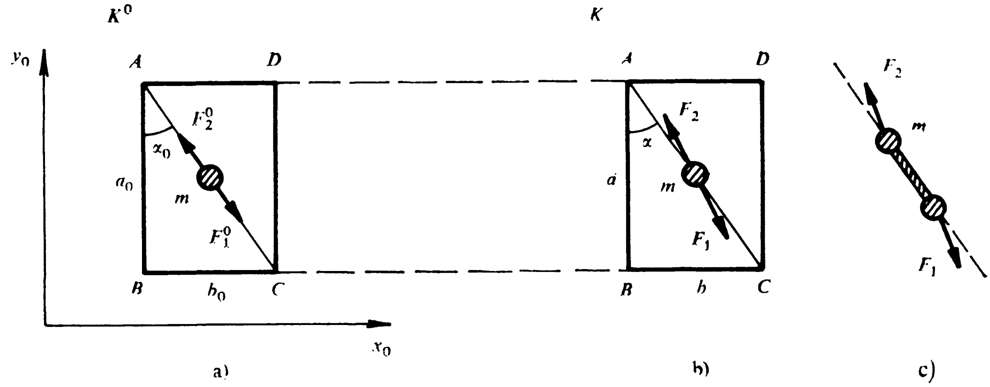
**) Podstatná je samozřejmě nenulovost $d(\vartheta - \vartheta)'/dt = (1 - d\vartheta'/d\vartheta)(d\vartheta/dt)$ (pozn. překl.).

Podstatné je, že v Penroseově příkladu se s touto potíží nesetkáme: rotace homogenní kulové plochy není pozorovatelná. Naneseme-li na ni značky, např. síť rovnoběžek a poledníků, přesvědčíme se ihned, že k žádnému pootočení nedochází. Jestliže tedy formulujeme paradoxy a rozebíráme je, nesmíme pominout schopnost pozorovatele rozumně uvažovat.

Naproti tomu problém rotace pohybujícího se tělesa a rovnic popisujících tuto rotaci není zdaleka jednoduchý. Známe Eulerovy rovnice v klidovém systému těžiště tělesa. Můžeme napsat také Eulerovy rovnice pro těleso, které se pohybuje nerelativistickou rychlostí. Rozšíření těchto úvah na relativistické rychlosti vede však k novým paradoxům, z nichž jeden vysvětlíme níže.

## 2. Transformace sil a silových momentů, které jsou v rovnováze, při přechodu od jednoho referenčního systému k druhému

Ačkoli transformační zákon třívektoru síly přímo plyne z definice Minkowského čtyřrozměrné síly, stal se přesto nedávno předmětem diskuse [12–14]. Věc se týkala tohoto příkladu: Nechť v systému $K^0$ (vlastní systém dané úlohy) je v klidu plochý rám




Obr. 5. Pravoúhlý rám, na jehož diagonále jsou nataženy pružné niti držící kuličku $m$
a) situace ve „vlastním systému" $K^0$,
b) tak vypadá táž situace z hlediska systému $K$,
c) vezmeme-li místo kuličky činku, pak na ni (z hlediska systému $K$) působí dvojice sil.

$ABCD$, na jehož diagonále jsou napnuty pružné niti držící kuličku o klidové hmotnosti $m$ (obr. 5a). Směr nití v $K^0$ je určen trojúhelníkem $ABC$. Označíme-li $AB = a_0$, $BC = b_0$, pak $\operatorname{tg} \alpha_0 = b_0/a_0$. Pružná síla je v systému $K^0$ rovnoběžná s nití, proto lze také psát

$$\operatorname{tg} \alpha_0 = \frac{b_0}{a_0} = \frac{F_{1x}^0}{F_{1y}^0}, \tag{1}$$

kde $\mathbf{F}_1$ znamená sílu směřující k vrcholu $C$, a podobné vztahy pro $\mathbf{F}_2$.

Přejděme nyní k systému $K$, vůči němuž se systém $K^0$ pohybuje rychlostí $V$. Jako obvykle předpokládáme, že osy $x^0$ a $x$ jsou totožné a že $y^0$, $y$, resp. $z^0$, $z$ jsou rovnoběžné. Užijeme-li označení*) $B = V/c$, pak z transformačních vztahů pro délky a síly dostáváme

$$(3) \qquad a = a_0\,, \quad b = b_0(1 - B^2)^{1/2}\,,$$

$$(4) \qquad F_{1x} = F^0_{1x}\,, \quad F^0_{1y} = F_{1y}(1 - B^2)^{1/2}\,.$$

Odtud je vidět, že rovnost (1) již neplatí: v systému $K$ se úhly určující směr nití a směr sil vzájemně nerovnají:

$$(4) \qquad \operatorname{tg}\alpha' = \frac{b}{a} = \frac{b_0}{a_0}(1 - B^2)^{1/2} = \Gamma^{-1}\frac{b_0}{a_0} = \frac{\operatorname{tg}\alpha_0}{\Gamma}\,,$$

$$(5) \qquad \operatorname{tg}\alpha'' = \frac{F_{1x}}{F_{1y}} = \frac{F^0_{1x}}{F^0_{1y}}(1 - B^2)^{-1/2} = \Gamma\frac{F^0_{1x}}{F^0_{1y}} = \Gamma\operatorname{tg}\alpha_0\,.$$

Ačkoli součet sil je jako dříve nulový, v systému $K$ svírají síly s nitěmi nenulový úhel. Tato okolnost je na první pohled podivná. Skutečně, co se stane, když přeřízneme nit v úseku 2 ? Počáteční zrychlení v soustavě $K^0$ musí být rovnoběžné se směrem síly (zjevně nerelativistický případ, kdy lze použít obyčejného Newtonova zákona), tj. směřuje podél niti. Zdálo by se, že zrychlení v soustavě $K$ svírá s nití nenulový úhel, protože směr niti není totožný se směrem síly $\mathbf{F}_1$. V souvislosti s tímto příkladem se objevil dokonce návrh [12] vzdát se transformačního zákona sil (3). Paradox se však vysvětluje jednoduše: v relativistické dynamice není směr zrychlení obecně totožný se směrem působící síly, a ačkoli síla svírá s nití nenulový úhel, zrychlení je s ní rovnoběžné. Sám o sobě představuje tento paradox užitečnou ilustraci zvláštností rovnic relativistické dynamiky.

Přesvědčíme se, že zrychlení kuličky je v obou systémech rovnoběžné s nití. K tomu je vhodné zapsat relativistickou pohybovou rovnici ve tvaru [15]:

$$m\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \gamma^{-1}\left[\mathbf{F} - \frac{\mathbf{v}}{c^2}(\mathbf{F}\mathbf{v})\right],$$

kde $m$ je klidová hmotnost, $\mathbf{F}$ obyčejná trojrozměrná síla působící na kuličku, $\mathbf{v}$ rychlost tělesa a $\gamma = (1 - \beta^2)^{-1/2}$, kde $\beta = v/c$.

V okamžiku $t = 0$, kdy přeřízneme nit, v systému $K^0$ platí

$$m\frac{d\mathbf{v}^0}{dt} = \mathbf{F}^0_1$$

neboli ve složkách

$$m\frac{dv^0_x}{dt} = F^0_{1x}\,, \qquad m\frac{dv^0_y}{dt} = F^0_{1y}\,.$$

Směr pohybu v počátečním okamžiku získáme z podílu obou vztahů:

---

*) Budeme značit $V$, resp. $B = V/c$ relativní rychlost inerciálních systémů, a $v$, resp. $\beta = v/c$ bude rychlost tělesa vůči $K^0$.

$$\frac{\mathrm{d}v_x^0}{\mathrm{d}v_y^0} = \frac{F_{1x}^0}{F_{1y}^0} = \operatorname{tg} \alpha_0 \, .$$

Tento směr, tj. směr zrychlení, je podle (1) totožný se směrem niti, jak tomu má být. Síly a zrychlení jsou v $K^0$ rovnoběžné a kulička se v počátečním okamžiku pohybuje podél niti.

Přejděme nyní k systému $K$, kde se těleso pohybuje rychlostí shodnou s rychlostí referenčního systému $K^0$, tj. rychlostí $V$. Proto platí $\gamma = \Gamma$ a projekce zrychlení mají tento tvar

$$(6) \qquad m \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} = \left[ F_{1x} - \frac{V}{c^2} F_{1x} V \right] \Gamma^{-1} = F_{1x} \Gamma^{-3} \, ,$$

$$(7) \qquad m \frac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} = F_{1y} \Gamma^{-1} \, ;$$

zde jsme vzali v úvahu, že rychlost kuličky je totožná s rychlostí systému $K$, tj. rovna $\mathbf{V}$ se složkami $(V, 0, 0)$; $F_{1x}$ a $F_{1y}$ jsou složky síly v systému $K$*). Abychom zjistili směr zrychlení v $K$, podělíme vztahy (6) a (7):

$$(8) \qquad \frac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}v_y} = \frac{F_{1x}}{F_{1y}} \Gamma^{-2} = \frac{\Gamma \operatorname{tg} \alpha_0}{\Gamma^2} = \Gamma^{-1} \operatorname{tg} \alpha_0 = \operatorname{tg} \alpha' \, ,$$

kde ve druhé rovnosti jsme užili vztahu (5) a v poslední vztahu (4). Ze vztahu (8) je však vidět, že zrychlení v soustavě $K$ je v počátečním okamžiku rovněž rovnoběžné s nití a k žádnému paradoxu nedochází.

Představme si ovšem, že místo kuličky, kterou chápeme jako bodovou, budou nitě držet tuhé těleso, např. činku. V systému $K$ by pak na závaží činky měla působit dvojice sil (viz obr. 5c) a činka by se měla pootočit vůči diagonále rámu**).

Ve vlastním systému je však zřejmé, že osa činky je totožná s diagonálou rámu. Narazili jsme ovšem na paradox; víme ale, že vznikl díky tomu, že jsme se pokoušeli z hlediska systému $K$ popsat jev, o němž víme, jak probíhá ve vlastním systému $K^0$. Je jasné, že chyba se skrývá v našich úvahách týkajících se popisu systému $K$.

Paradox s činkou je jednou z variant dobře známého „paradoxu páky" [16]. Ve stručnosti jej připomeneme. Nechť lomená páka, jež je sestrojena ze dvou tuhých tyčí pevně spojených v bodě $O$, kterým prochází osa otáčení, je v klidu v systému $K^0$. Tyče jsou přitom vzájemně kolmé (obr. 6).

---

*) Povšimněme si, že vztahy (6) a (7) odpovídají dvěma speciálním případům relativistické rovnice, kdy síla a zrychlení jsou rovnoběžné; odpovídající hmotnosti se dříve nazývaly „příčná" a „podélná" hmotnost. Těchto (obecně nepříliš vhodných) termínů se již prakticky neužívá, i když ne zrovna špatně vyjadřovaly tenzorový charakter souvislosti mezi silou a zrychlením v relativistické mechanice (pozn. aut.).

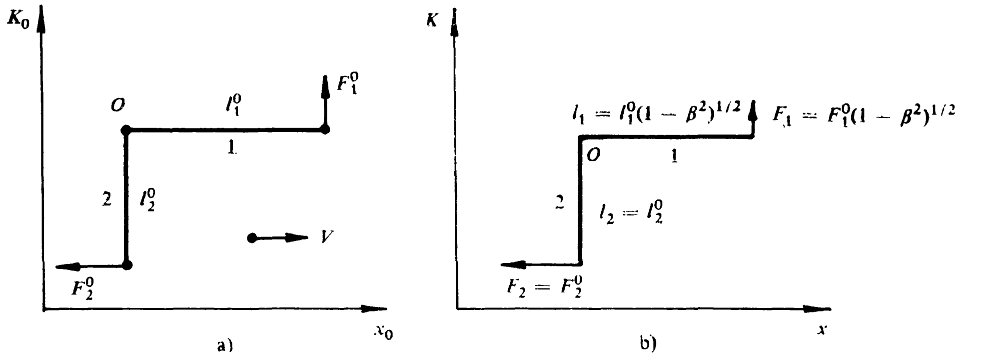
**) Samozřejmě není ani řeči o tom, že by se činka v jedné soustavě pootočila a v druhé zůstala v klidu. Postavme vskutku vedle činky sklenici; pokud se při pootočení činky rozbije, pak tento fakt nemůže být relativní (pozn. aut.).

Na konci prvního ramene páky (délky $l_1^0$) působí síla $F_1^0$, na konci druhého (délky $l_2^0$) síla $F_2^0$. Podle předpokladu je páka v rovnováze, což znamená, že se rovnají momenty sil v $K^0$: $F_1^0 l_1^0 = F_2^0 l_2^0$.

Budeme-li týž systém vyšetřovat v soustavě $K$ a definujeme-li moment síly jako součin síly a ramene, dospějeme k paradoxnímu závěru. Rozměry se zkracují pouze ve směru pohybu, takže $l_1 = l_1^0(1 - B^2)^{1/2}$, zatímco síly se transformují pouze ve směru kolmém na pohyb: $F_1 = F_1^0(1 - B^2)^{1/2}$, kdežto $l_2 = l_2^0$ a $F_2 = F_2^0$. Žádná z těchto transformačních formulí sama o sobě nebudí pochyby. Celkový moment sil v soustavě $K$ je však nenulový: $F_1 l_1 - F_2 l_2 = F_1^0 l_1^0(1 - B^2) - F_2^0 l_2^0 = -B^2 F_1^0 l_1^0 = -B^2 F_2^0 l_2^0$.

Paradox se týká toho, že ačkoli je s určitostí známo, že páka je nehybná, v soustavě $K$ na ni působí silový moment, proto by se měla otáčet.

M. von Laue [16] vyřešil tento problém velmi vtipným způsobem. Páka se pohybuje v soustavě $K$ rychlostí $V$, proto síla $F_2$ koná za jednotku času práci $F_2 V$. Do konce páky 2 tedy proudí energie $-F_2 V$, která zvětšuje za časovou jednotku hmotnost na konci páky o $\Delta m = F_2 V/c^2$. Přírůstek hybnosti na konci páky je $\Delta p = \Delta m V = F_2 B^2$ za jednotku času; změna momentu hybnosti je tedy $F_2 B^2 l_2^0 = F_2^0 B^2 l_2^0$. Přírůstek momentu hybnosti v $K$ je přesně kompenzován momentem síly, a k rotaci tedy nedochází.




Obr. 6. Paradox páky

a) V systému $K^0$, kde platí $F_2^0 l_2^0 = F_1^0 l_1^0$, je páka v rovnováze.

b) Táž páka braná z hlediska systému $K$: momenty sil působící na ramena páky 1 a 2 jsou zjevně různé. Pro pozorovatele v $K$ je $\beta = B$, $\gamma = \Gamma$.

Vznik paradoxu ve skutečnosti souvisí s tím, že moment síly nelze transformovat pomocí nezávislých transformací sil a ramen. Moment síly je trojrozměrný vektorový součin, jehož doplnění na čtyřvektor není jednoznačné. Zvláštnost úlohy o páce spočívá v tom, že celkový moment je určen dvěma silami působícími v různých bodech prostoru. Relativistická mechanika vždy naráží na potíže při přechodu k popisu systémů mnoha těles. Neexistuje obecné pravidlo skládání vektorů odpovídajících různým světobodům, podobně jako nelze porovnávat v tomto případě jiné veličiny. K tomu je nejprve nutné přenést srovnávané veličiny do jednoho prostoročasového bodu – a právě operace takového přenosu vede ke zdánlivým paradoxům. Výpočty se vždy provádějí pro statické úlohy v klidové soustavě prostředí (v našem případě v klidové soustavě páky). Přechod k referenční soustavě, vůči níž se prostředí pohybuje, potom vyžaduje transformovat veličiny používané v teorii pružnosti, a musíme tak zavádět přebytečné parametry konkrétní látky. Mimochodem, pokus o takovouto transformaci v elementárním případě lze najít v práci [14].

Všimněme si ještě jednoho výsledku. Budeme předpokládat, že do okamžiku $t = 0$ síly na páku nepůsobí, a v $t = 0$ se (současně v $K^0$) „zapojí" síly $\mathbf{F}_1^0$ a $\mathbf{F}_2^0$. V každém okamžiku bude rovnováha v $K^0$ zachována. V $K$ ovšem síly nebudou zapojeny současně; bude existovat časový interval, během něhož síla $\mathbf{F}_1$ už působí, zatímco $\mathbf{F}_2$ nikoli. Opět se objevuje moment síly. To, že zde podstatnou roli hrají síly působící v různých bodech tělesa (paradoxy pochopitelně vznikají pouze při vyšetřování tuhých těles), je zřejmé ze zcela jednoduchého příkladu. Nechť v $K^0$ na ose $x^0$ leží tuhé těleso délky $l^0$. Do okamžiku $t = 0$ na něj žádná síla nepůsobí; potom zapojíme na obou stranách síly téže velikosti a opačného směru. V $K^0$ je neustále rovnováha, zatímco v $K$ existuje časový interval, kdy se síly nekompenzují, takže by se těleso mělo dát do pohybu. Je tomu tak?

*Přeložil Pavel Exner*

Literatura


[1] A. M. BORK: Science *152* (1966), 597; ruský překlad Usp. Fiz. Nauk *94* (1968), 167.
[2] A. EINSTEIN: *Sobranije naučnych trudov, 1. díl.* Nauka, Moskva 1965.
[3] R. PENROSE: Proc. Cambr. Phil. Soc. *55* (1959), 137.
[4] T. TERRELL: Phys. Rev. *116* (1959), 1041.
[5] V. WEISSKOPF: Phys. Today *13* (1960), 24; Usp. Fiz. Nauk *84* (1964), 183.
[6] E. F. TAYLOR, J. A. WHEELER: *Spacetime Physics.* W. H. Freeman and Comp., San Francisco and London 1966; ruský překlad: Mir, Moskva 1969 a 1971, str. 131.
[7] D. LONG: Am. J. Phys. *38* (1970), 1181.
[8] N. C. MCGILL: Contemp. Phys. *9* (1968), 33.
[9] R. BHANDAI, Am. J. Phys. *38* (1970), 1200.
[10] G. SCOTT, H. VAN DRIEL, Am. J. Phys. *38* (1970), 971; *33* (1965), 534.
[11] V. L. GINZBURG, S. I. SYROVATSKIJ: *Razvitije těorii sinchrotronnogo izlučenija i jego reabsorpcii.* FIAN-94, 1969.
[12] L. KARLOV: Lett. N. Cim. *3* (1970), 37.
[13] W. RINDLER: Lett. N. Cim. *3* (1970), 742.
J. R. RAY, Lett. N. Cim. *3* (1970), 739.
[14] K. A. JOHNS, Lett. N. Cim. *4* (1970), 351.
[15] V. A. Ugarov: *Special'naja těorija otnositělnosti.* Nauka, Moskva 1967; str. 107.
[16] M. VON LAUE: *Stat'ji i reči.* Nauka, Moskva 1969.
K. H. PANOFSKY, M. PHILLIPS: *Classical Electricity and Magnetism.* Addison-Wesley, Cambridge 1955; ruský překlad Fizmatgiz, Moskva 1963; § 16.5.
[17] S. YNGSTROM, Ark. Phys. *23* (1962), 367.
[18] S. M. RYTOV, Priroda, č. 4 (1960), 64.