Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Egbert Brieskorn

O dialektice v matematice. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 24 (1979), No. 2, 89--103

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137928

diskuse

O dialektice v matematice II

*Egbert Brieskorn, Bonn**)

Dialektická metoda

Chceme-li získat obsažný a správný obraz o podstatě matematiky, musíme si položit dva požadavky:

(1) Při popisu matematiky se nesmíme omezovat jen na vnitřní matematické prostředky. Musíme náš problém postavit do takové filozofické souvislosti, která by nám dovolila položit rozhodující otázku o vztahu mezi matematickou teorií a realitou.

(2) Musíme se pokusit pojmout do našeho obrazu zkušenosti matematiků a dějiny matematiky v celé jejich bohatosti, mnohotvárnosti, jednotě a protikladnosti. Potom se stane tento obraz matematiky dynamickým a stanou se zřetelnými zvláštnosti této vědy stejně jako její zařazení do souvislosti veškerého lidského myšlení a konání.

K filozofickému stanovisku týkajícímu se prvního požadavku: různé druhy vědních teorií, které dnes nejčastěji pojednávají o problémech základů matematiky, nemohou splnit naše požadavky již pro svou omezenost. Dobrou představu o tomto druhu ‚filozofie matematiky' dávají díla [3] a [30]. Nechceme zde v jednotlivostech polemizovat s takovýmito vědními teoriemi a odkazujeme na jejich kritiku například v [22] a v [28]. Otázka vztahu mezi matematickou teorií a realitou, mezi teorií a praxí, je vědními teoriemi tohoto druhu buď odmítána jako postrádající smyslu, nebo se s ní vůbec nezabývají. A titíž vědní teoretikové, kteří nám nabízejí tento neskutečný obraz matematiky, jenž tak zničujícím způsobem kritizoval Bishop, titíž lidé nám tvrdí, že teoreticko-poznávací stanoviska vytvořená k tomuto problému dřívější filozofií jsou předvědeckými nesmysly. Tedy to nás nemusí odrazovat od toho, abychom se i na taková stanoviska odvolávali, pokud se ukáže, že mohou něčím důležitým přispět k pochopení povahy naší vědy.

Ve filozofii se během dlouhého vývoje vytvořila nám všem běžná a pro teorii poznání základní dvojice protikladů: konfrontace ducha a hmoty. Přirozeně nabývala tato slova v dějinách filozofie nejrůznějších významů. K tomu zde chceme říci jen tolik, že tento protiklad chápeme jako protiklad mezi individuálním, resp. společenským vědomím a objektivní, na tomto vědomí nezávislou realitou. Z hlediska teorie poznání je tento protiklad bezprostřední, nikoliv však při analýze společenské úlohy vědy, protože zde je vždy nutno přihlížet k tomu, že procesy vědomí mají biologické a společenské základy a nemohou být tedy odděleny od hmotného substrátu. Proto musíme rozlišovat mezi vztahem hmota–vědomí a mezi vztahem subjekt–objekt, ve kterém se subjekt jeví jako protikladně jednající a tím projevující svou hmotnou podstatu také tam,

---

*) 2. část překladu článku E. Brieskorna *Über die Dialektik in der Mathematik* uveřejněného ve sborníku *Mathematiker über die Mathematik*, pp. 221—286, editor M. Otte. Vydalo nakladatelství Springer v řadě Wissenschaft und Öffentlichkeit.

1. část překladu byla otištěna v čísle 1/79, zbývající část spolu s přehledem literatury bude otištěna v čísle 3/79. Přeložil Oldřich Kowalski.

kde sleduje především teoretické zájmy. Z tohoto hlediska je stanovisko, které v dalším zaujmeme, materialistické. Těchto několik poznámek musí na tomto místě stačit k vymezení filozofického stanoviska, ze kterého chceme určit vztah vědecké teorie k realitě.

Nyní k našemu druhému požadavku: pochopit dynamiku vývoje matematiky. Od samých začátků filozofie existovali myslitelé, kteří podstatu světa viděli v neustálém střídání jevů, v pohybu a vývoji, který se uskutečňuje v boji protikladů. Toto dialektické myšlení začalo HERAKLEITEM a své nejdokonalejší vyjádření našlo zatím v dialektice HEGELOVĚ. Hegelova dialektika byla ovšem také vrcholným vyjádřením idealismu. Musela být nejdříve materialisticky převrácena, aby bylo možno skutečně porozumět vztahu mezi dialektikou myšlení a realitou, realitou přírody a společnosti. To učinili MARX, ENGELS a LENIN. Zvláště důležitou v této souvislosti je přitom Leninova polemika s Hegelovou dialektikou v jeho *Filozofických sešitech*, hlavně jeho konspekty k Hegelovu dílu *Wissenschaft der Logik* [19]. Tato práce obsahuje mnohé velmi důležité myšlenky, které mají základní význam pro otázku podstaty vědy. Z ní vychází většina podnětů pro to, co má být v dalším řečeno o dialektice matematiky – těch podnětů je tolik, že je nebudeme všechny dokládat citáty. Vycházíme z tohoto základu a doufáme, že matematikové rozpoznají v tom, jak bude matematika zpodobněna v rámci této materialistické dialektiky, živoucí a realistický obraz své vědy.

Těžiště našeho popisu bude v rozpracování dialektiky idejí v matematice, zatímco ostatních důležitých otázek se dotkneme jen v tom podstatném. Proto kvůli doplnění celého obrazu poukážeme na některé práce podobného zaměření, aniž bychom tím s nimi museli souhlasit ve všech podrobnostech. Ke vztahu matematiky a techniky odkazujeme na knihu P. LABÉRENNE [18], dále rovněž k této otázce a k otázkám historickým na D. J. STRUIKA [31] a všeobecně k filozofickým otázkám matematiky na příslušné příspěvky v [28] a [29]. Bohužel vzhledem k autorovým omezeným znalostem literatury jsou to jen víceméně náhodné odkazy.

V čem záleží dialektická metoda?

Dialektika je metoda pro pochopení jednoty protikladů jako principu každého pohybu, každé změny. Hegel: „Něco je tedy živoucí, jen pokud v sobě obsahuje rozpor a je nadáno silou tento rozpor v sobě uchopit a překonat“. Pro matematiky snad není zbytečné poznamenat, že ‚rozporem‘ zde samozřejmě není míněn logický rozpor, ale protiklad. Nejdůležitějšími momenty dialektické metody jsou snad tyto:

(1) Věci, o nichž se uvažuje, jevy a procesy mají být chápány v jejich vlastním zákonitém vývoji a uvažovány v celé rozmanitosti svých vztahů k jiným věcem, jevům a procesům. Přitom je nutno pochopit jednotu všech stránek, sil, tendencí dané oblasti jevů.

(2) Vývoj je třeba chápat jako výsledek protikladného působení navzájem rozporných sil a tendencí v každém jevu, jako historii vzniku a rozvoje protikladů.

(3) Protiklady tvoří jednotu. Mohou přecházet nebo se převracet jeden v druhý. Protiklady jsou relativní. Různé protiklady se navzájem stýkají a pronikají. Příklady: poměr obsahu a formy, kvantity a kvality.

(4) Charakteristickým pro dialektickou metodu je chápání negace jako příčiny vývoje, kontinuity a zachování kladného. To znamená: negace je nahrazení jednoho stavu jeho protikladem. Tím je původní stav zrušen, a to zrušen ve dvojím smyslu překonání a zachování. Toto zachování je jedním aspektem jednoty protikladů. Tento proces se stále opakuje a tím lze například pochopit opakování určitých rysů jednoho stadia ve vyšším stadiu nebo zdánlivý návrat ke starému.

Je snad přirozené, že z dialektické metody nelze odvodit metodologie jednotlivých věd. Může však posloužit jako orientační pomůcka při řešení základních problémů jednotlivých metodologií, které souvisejí s obecnými problémy filozofickými. Obráceně, dialektická metoda je obohacována rozpracováním teoretických a metodologických pokroků jednotlivých věd. Dialektická metoda není neměnný systém, je nedogmatická. Je obzvlášť plodná při zkoumání společenského procesu poznání v jeho nikdy nekončícím postupu vpřed, k stále hlubšímu chápání podstaty společenské a přírodní reality.

V dalším se pokusíme v duchu této metody pochopit vývoj matematiky a zejména ukázat, že sama matematická metoda jako součást lidského myšlení obsahuje mnoho prvků dialektické metody.

Začněme například s tím, že ukážeme, jak dialektického chápání vztahu mezi přijetím a popřením něčeho může být využito pro pochopení matematického myšlení. Matematik je přirozeně zvyklý pod pojmem negace rozumět prostě negaci výroku ve smyslu formální logiky, a jestliže jednou přijmeme za svou klasickou formální logiku, pak tu není žádný další problém. Avšak z toho, co bylo řečeno v bodě (4), by mělo být již jasné, že zde jde o něco jiného. Hegel k tomu cituje jeden výrok SPINOZY, na který ostatně upozornil také CANTOR: „Omnis determinatio est negatio“. To jest: každé stanovení, každé vymezení je negace. Každou myšlenkovou konstrukcí, do které se pustíme, ať již prostřednictvím definice nebo volbou systému axiómů, řekneme nejen to, co takové vymezení objektů nebo struktur může poskytnout; říkáme tím také zároveň implicitně a často nechtěně to, co poskytnout nemůže. Na první pohled se to může zdát triviální: definicí řekneme nejen to, čím definovaný objekt je, ale také to, čím není. Ale tento tak jednoduše vypadající výrok popisuje určitý moment pokroku, vývoje. Neboť znamená, že vše kladné již v sobě nese zárodek svého překonání, své negace. Když chceme například definovat matematický pojem, třebas pojem algebraické variety, pak máme nejdříve na mysli zachycení jistých jevů nebo problémů pomocí takové definice. Když pak tento pojem rozvíjíme dále v rámci teorie, ukáže se v mnoha případech nakonec jeho nedostatečnost. To nemusí znamenat, že původní definice byla nevhodná. Může se například stát, že přidáním dalších strukturních elementů, které určují dotyčný objekt, lze získat jemnější zachycení daných jevů. Stejně tak pro původní problém jako pro problémy, které vyvstanou v dalším vývoji, se může ukázat, že starý pojem nebyl adekvátní, že původně ustavená struktura byla příliš jednoduchá, příliš chudá nebo příliš nepružná a musí být obohacena. Tak například v případě algebraických variet šel vývoj od víceméně klasických algebraických variet k algebraickým varietám ve smyslu SERROVĚ, odtud ke GROTHENDIECKOVÝM schématům a konečně k algebraickým prostorům MICHAELA ARTINA. Při každém rozšíření pojmu je přirozeně starý pojem do té míry negován, o co jej nový pojem přesáhne, nezmizí však ještě proto z matematiky, nýbrž je jen pozvednut na vyšší úroveň. Hořejší příklad to ukazuje velmi zřetelně. To, co jsme řekli o vývoji jednotlivých pojmů, platí stejně pro celé teorie, třebas pro postupně se oddělivší koncepce algebraické geometrie. Také opakování typických rysů staré teorie na vyšším stupni, v teorii, která ji vystřídala, o čemž jsme již hovořili při objasňování dialektické metody, je jev dobře známý matematikům.

Jiné zásadní potvrzení Spinozova principu můžeme spatřovat v Gödelových větách o neúplnosti: v okamžiku, kdy matematik přesně stanoví obor svého zkoumání volbou systému axiómů, staví tím implicitně otázky, které v takto položeném rámci nemůže ze zásadních důvodů rozhodnout, a vykazuje je tak současně někam nad tento obor. Matematika tak zásadním způsobem sdílí s veškerým lidským poznáním jeho otevřenost, nemožnost stanovit cokoliv s konečnou platností a jeho nekonečnost, tedy vlastnosti, na které dialektikové vždy znova poukazovali.

Každý matematik ví, že záporný výsledek, vyvrácení hypotézy nebo marnost snah o řešení důležitého problému, je velmi často podnětem pro zcela nové a netušené směry rozvoje, nové problémy a nové teorie – další příklad na ‚negaci jako prvek pokroku'.

Konečně ještě některé poznámky ke vzájemnému vztahu protikladů a logických rozporů. Rozpory, jak se učí každý student v prvním semestru, pocházejí od ďábla. Nelze je v matematice trpět, jeden jediný by mohl vést ke zhroucení celé stavby. A protože protiklady mají co dělat s rozpory, jsou ve filozofii matematiky některými autory rovněž připisovány čertu: neměly by se v matematice pokud možno vůbec objevovat, a když už se tak stane, měli by se jich matematikové co nejrychleji zbavit. To je ovšem zase jeden případ, kdy něco nemůže existovat jen proto, že jsme si to zakázali. Matematika je plná protikladů. Zde je několik příkladů, které uvádíme v pestré směsici:

konečný	–	nekonečný
kompaktní	–	otevřený
diskrétní	–	spojitý
konstantní	–	proměnný
kvantitativní	–	kvalitativní
algebraický	–	geometrický
regulární	–	singulární
lokální	–	globální
analytický	–	syntetický
axiomatický	–	konstruktivní

a tak dále a tak dále. Pochopitelně, že na těchto protikladech je i leccos podezřelého. Rozdíl mezi protikladem a logickým rozporem není absolutní. Protiklad může vést k rozporu. To se několikrát stalo v případě protikladu mezi konečným a nekonečným: poprvé v antice, potom při výstavbě infinitezimálního počtu a konečně u antinomií teorie množin. A to pak vedlo k posílení jiného protikladu: ke sporu mezi zastánci axiomatické metody a konstruktivisty. Kdybychom však chtěli z pouhých obav před rozpory zcela vyobcovat z matematiky protiklady, byl by to jen výraz nepochopení jejich významu: z matematiky by zůstalo jen torzo. Protiklady je třeba ovládnout – a tím dojdeme k pokroku.

Abstrakce a realita

K problémům povahy matematiky patří též otázka, co je jejím předmětem. Přirozeně, že na tuto otázku byly dány ty nejrůznější odpovědi. Mnozí prohlásili otázku za bezpředmětnou a logicisté tvrdili, že takový předmět neexistuje a že by se místo o matematických objektech mělo raději hovořit o objektivitě matematiky. Přitom na první pohled nepřipadá tato záležitost matematikům tak příliš těžkou: objekty, které vyšetřují, byla na počátku čísla a jednoduché geometrické útvary, později rovnice, potom funkce, konečně grupy, prostory, variety a dnes nejrůznější množiny opatřené strukturou, přičemž ovšem cílem aplikace všech těchto struktur na určitou situaci může vždy ještě být prostě výpočet určitého čísla (srv. [2]). Tato odpověď může matematikovi stačit, pokud takové abstraktní objekty může brát jako dané a chce o nich matematickými metodami získat nová tvrzení. Potom mu opravdu stačí jen vztahy mezi objekty určené strukturou a jisté intuitivní představy o významu matematických výroků. V tomto smyslu má BOURBAKI pravdu, když tvrdí, že z dnešního hlediska lze s určitými omezeními považovat struktury za jediné předměty matematiky.

Ale toto vymezení předmětu matematiky se již ukazuje jako nedostatečné, jestliže se zeptáme, jak vlastně nové matematické struktury vznikají, čím vlastně jsou a co znamenají, ano, proč jsou vlastně zkoumány. Na to se chceme pokusit odpovědět.

Naší základní tezí je, že abstraktní matematické struktury ve svém souhrnu jsou konec konců abstrakcemi něčeho reálného. Tím se problém matematických objektů stává problémem dialektického vztahu mezi poznávajícím subjektem a objektivní realitou. Poukázali jsme již na to, že tento protiklad nesmí být chápán absolutně — především proto, že zmíněný vztah se vlivem praktické činnosti lidí v historickém a společenském procesu, a tím i ve vědeckovýzkumném procesu, neustále mění; ale také proto, že člověk je přece součástí skutečnosti vyjádřené spojením prostor—čas—hmota. V průběhu vývoje života se objevily složité hmotné systémy, jako jsou centrální nervové systémy u vyšších živočichů spojené s různými smyslovými orgány, které jsou s to zobrazovat stav svého hmotného prostředí (i když zatím víme velmi málo o tom, jakými cestami se to děje), které jsou s to transformovat takto získanou informaci a přeměňovat ji v odpovídající chování. Člověk se svým mozkem je vlastníkem nejrozvinutějšího z těchto systémů a s jeho pomocí je s to ve společenském procesu praktického a teoretického ovládání skutečnosti z živé názorné zkušenosti získávat abstrakcí pojmy a ty abstraktním způsobem dále zpracovávat, aby pak získané výsledky použil k cílevědomému jednání, přetvářejícímu skutečnost. O příčinách tohoto přechodu od bezprostředního zpracovávání smyslových vjemů k abstraktnímu myšlení se nedá říci mnoho určitého (k tomu viz též [13]). Rozvoj schopnosti lidí abstraktně myslet musíme vždy spojovat s rozvojem jejich schopnosti společensky komunikovat pomocí řeči a udržovat svou existenci na základě práce, schopnostmi, které se vzhledem k biologickým zvláštnostem člověka staly možnými a nutnými.

Našemu pozorování a našemu myšlení se realita daná smyslovou zkušeností nejeví jako chaos, nýbrž jsme schopni v toku událostí objevit relativně stabilní vztahy a učinit je předmětem našeho myšlení. Tato skutečnost se zdá velmi pěkně vyjádřena — i když zase ne vysvětlena — v prvém odstavci knihy RENÉ THOMA o strukturální stabilitě a morfogenezi, nadepsaném ‚Posloupnost forem'. „Jedním z ústředních problémů, před které je postaven lidský duch, je problém posloupnosti forem. Ať již nakonec podstata reality záleží v čemkoliv – za předpokladu, že tato formulace má smysl – nedá se popřít, že náš vesmír není chaos; poznáváme v něm bytosti, objekty, věci, které označujeme slovy. Tyto bytosti nebo věci jsou formami, jsou to struktury, které se vyznačují určitou stálostí; zaujímají určitou část prostoru a trvají určitou dobu. Nadto rozpoznáváme určitý objekt, ačkoliv jej můžeme vnímat z těch nejrůznějších hledisek, nepochybně jako jeden a týž. Rozpoznání jedné a téže bytosti v nekonečné mnohotvárnosti jejích jevových forem představuje samo o sobě problém, klasický problém pojmu, kterým se, jak se mi zdá, zabývala pouze škola tzv. ‚Gestalt psychologů', a to z geometrického hlediska, které je přístupné vědecké interpretaci. Předpokládejme, že tento problém je vyřešen v souhlase s naivním nažíráním, které věcem vnějšího světa připisuje existenci nezávislou na našem vědomí. Pak je nutno přece nicméně dodat, že vesmír poskytuje podívanou na nekonečný proces vznikání, vývoje a zanikání forem. Cílem každé vědy je tento vývoj forem předvídat a pokud možno vysvětlovat".

Co zde bylo řečeno o celé vědě, platí také pro matematiku. Také v matematice probíhá vývoj od živého nazírání mnohotvárnosti forem přes abstrakci k vědeckému rozvoji idejí a konečně k uvedení těchto idejí do praxe. V čem záleží zvláštnost matematiky, dá se stěží říci jinak, než odkazem na celý systém matematických pojmů a teorií, než vyzvednutím obzvlášť důležitých rysů matematické metody, jak se o to také pokoušíme v tomto příspěvku. Také matematika provádí své abstrakce jen s využitím určitých stránek reality, zde však ve větší míře než kterákoliv jiná věda, a rozvíjí takto získaný systém abstraktních pojmů s větší přesností než kterákoliv jiná věda s výjimkou formální logiky. Dříve se obvykle chápala matematická abstrakce jako abstrakce vzhledem k prostorovým a kvantitativním vztahům. Pochopení těchto vztahů bylo ovšem obzvlášť důležité a největší část matematiky vzniklá až do minulého století je skutečně právě takového druhu. V zásadě lze však matematickou abstrakci používat na všechny takové oblasti vztahů, kde všechny pro nás zajímavé výroky o těchto vztazích jsou skryty v několika přesně formulovatelných základních výrocích o některých základních vztazích. Z dnešního hlediska bychom mohli říci: matematicky abstrahovat lze ve všech oblastech vztahů, které můžeme vystihnout pomocí matematické struktury. Jestliže nepřihlížíme ke stupni přesnosti a abstrakce, není v zásadě v této věci žádný rozdíl mezi matematikou a vědeckým myšlením všeobecně. To říká snad HEGEL: „Rozličné věci se podstatným způsobem vzájemně ovlivňují svými vlastnostmi; vlastnost je totéž co tento vzájemný vztah a věc zase není nic jiného..." ([16], Svazek IV, str. 133). Zcela podobně vidí matematika svůj předmět: při abstrakci uchopí vždy jen podstatné vztahy mezi objekty a nepřihlíží k ostatním. Zařadí dočasnou zvláštní formu těchto vztahů do jistých struktur, jejichž abstraktní vývoj odpovídá vývoji skutečných vztahů a tím umožňuje předpovědi. Jesltiže tato abstrakce, tento vývoj teorie je adekvátní realitě, potom se dá teorie použít v praxi, stane se nástrojem přeměny skutečnosti člověkem. Praxe tedy potvrzuje s konečnou platností správnost teorie; to platí i pro vývoj matematiky. Zde, v abstrakci od objektivní reality je původ struktur, v tom spočívá jejich význam. Ti, kteří tento význam nevidí a trvají jen na tom, že síla axiomatické metody spočívá v zanedbání všeho, co není obsaženo v axiómech, nechápou dialektický charakter procesu, který záleží v tom, že právě v odhlédnutí od konkrétního významu v procesu abstrakce je obsažena tím větší možnost následovné konkretizace. Proces abstrakce, poté co vyšel z reality, nezůstává stále v oboru abstraktního myšlení, vrací se stále znovu k realitě. Každý matematik ví, že abstraktní teorie původně odvozené z konkrétního problému jsou často později použitelné na zcela jiné problémy, které vypadají, jako by neměly s původními nic společného.

V matematickém procesu abstrakce existují stupně. Nejdříve je zde něco jako ‚primární' abstrakce. Potom co díky miliardakrát opakované zkušenosti byly v nějaké oblasti reality vytvořeny názorné představy, vede tato abstrakce k pojmům popisujícím tuto oblast a konečně zpravidla k zobrazení vztahů mezi objekty ve tvaru systému axiómů, ze kterého lze pak deduktivně získávat nová tvrzení. Asi takto byla již v antice popsána určitá oblast geometrické zkušenosti ve formě systému axiómů eukleidovské geometrie. V dalším vývoji matematiky však nezůstává jen při této primární abstrakci. Často se ve vzájemné souhře dedukce a indukce, cestou abstraktního rozvíjení již známých teorií a rozpracováním konkrétních příkladů a problémů dá získat nový soubor zkušeností, na jehož základě můžeme znovu abstrahovat, vyvinout novější a abstraktnější pojmy a teorie. Přitom však již jde o zkušenost na vyšší úrovni, o zkušenost uvnitř matematiky, to jest o zkušenost z vývoje lidského myšlení. To často vedlo k tvrzení, že matematika je rozvíjení zákonů lidského myšlení. Ale jednostrannost tohoto tvrzení je zase následkem nepochopení dialektického charakteru poměru mezi subjektem a objektem, skutečnosti, že člověk je schopen ukládat své zkušenosti získané ve styku s realitou na vyšší, myšlenkové úrovni. Právě to umožňuje také pochopit, že zejména díky sekundárním procesům abstrakce neustále roste schopnost primární abstrakce, které nevyužíváme pouze jednorázově, ale stále znovu a znovu. Právě nejabstraktnější pojem množinově teoretické struktury teprve umožňuje provádění abstrakce v plné obecnosti. Teorie získaná na základě vnitřní matematické zkušenosti odráží objektivní realitu již jen zprostředkovaně. Přesto je výsledek této, na stále vyšším stupni prováděné abstrakce „nejen abstraktním všeobecnem, ale všeobecnem, které v sobě zahrnuje bohatství zvláštního, individuálního, jednotlivého" ([19], str. 91). Správná abstrakce vystihuje podstatný obsah dosavadních poznatků v určitém oboru a z určité stránky. Vyšší abstraktnost pak nevede k dalšímu vzdalování se od reality, nýbrž díky jí se naše poznání blíží objektivní pravdě, naše pochopení objektivní reality se stává hlubším, naše myšlenky skutečnějšími.

Snad nejlepším příkladem na složitý proces abstrakce a hlubšího chápání reality je vývoj pojmu prostoru. Prvním shrnutím části našich představ o prostoru do matematické teorie byla eukleidovská geometrie, získaná z našich omezených zkušeností při měření ploch, budování prostorových konstrukcí a v astronomii. Měřeno naším dnešním chápáním, naší dnešní schopností abstrakce, byla tato geometrie bezprostřední, jednoduchou idealizací. Z historického pohledu je však jedním z fantastických výkonů abstraktního myšlení. Charakter procesu abstrakce, relativita jím získaných pojmů prostoru a času byly však tehdejším matematikům a ještě matematikům minulého století tak málo známy, že jednoduše a zcela samozřejmě přijali myšlenku o splynutí tohoto historicky prvního pojmu prostoru s objektivním, skutečným prostorem. Byl to v podstatě vnitřní matematický vývoj, zkoumání nezávislosti axiómu o rovnoběžkách eukleidovské geometrie, které na začátku minulého století, v době Gaussově, vedlo ke konstrukci neeukleidovské geometrie Bolyaiem a Lobačevským, a tím k uvědomění si relativity našich pojmů prostoru, k hlubšímu porozumění pro to, jak při matematické abstrakci dochází k poznání objektivní reality. Jednotlivý matematický pojem stejně jako jednotlivá teorie jsou nyní jen skicami možného obrazu některé oblasti skutečnosti, ano, jsou to snad jen kroky matematického procesu, které mohou vést k stanovení modelů. Jedině souhrn všech matematických pojmů a teorií, vycházející z reality a znovu se k ní vracející, může pravdivě vypovídat o tom, jak matematika přispívá k poznání skutečnosti. A je to právě vzájemná souvislost a styk všech oblastí matematiky navzájem a celé matematiky s ostatními vědními oblastmi, který vede k pokroku našeho poznání. Tak vzniklo v Riemannově geometrii mnohem hlubší chápání pojmu prostoru, než tomu bylo v eukleidovské geometrii, a to splynutím nejrozmanitějších prvků a postupů, které bychom vlastně museli sledovat zpět do minulosti, abychom dostali obraz mnohotvárnosti a jednoty idejí, které se na tomto novém stupni vývoje pojmu prostoru uplatnily. Snad nejdůležitějšími v tomto vývoji bylo těchto pět činitelů: (i) Prohloubené pojetí matematického popisu prostoru, které vzniklo vývojem od eukleidovské geometrie k neeukleidovské a z filozofických diskusí o povaze pojmu prostoru, obzvláště u Kanta. (ii) Podněty z praxe, především Gaussovy práce z oboru astronomie a geodézie, které uskutečnil v téže době jako své základní výzkumy v geometrii ploch. (iii) Další rozvoj jiných matematických teorií, jako například již vybudované počátky diferenciální geometrie. (iv) Více než 200letá zkušenost z vývoje analýzy, která zvláště v době Gaussově a Riemannově vedla k urychlenému rozvíjení analysis situs.*) Při vzniku samotné analýzy se uplatnily tak rozličné momenty jako zájem matematiků antiky a renesance o nekonečné limitní procesy, rozbor dialektických protikladů konečného a nekonečného, diskrétního a spojitého ve scholastické filozofii, sjednocení algebraických a geometrických metod v době renesance, univerzální filozofické zájmy badatelů té doby, zvláště Leibnize, a konečně a především popis pohybu hmotného tělesa v prostoru na základě Newtonovy mechaniky, která pojala v jedinou teorii výsledky fyziky a astronomie doby Keplerovy a která odpovídala technickým požadavkům tehdejší doby. (v) Genius Bernharda Riemanna, který rozhodným způsobem ovlivnil vývoj celé matematiky a jehož hluboké myšlenky o podstatě prostoru obsažené v ‚Riemannově geometrii' byly jen jedním z jeho velkých výkonů.

Základním pojmem této geometrie, vhodným k popisu prostoru, je ‚Riemannova varieta'. Především se uvažuje n-rozměrné kontinuum, které lokálně vypadá stejně jako obyčejný n-rozměrný prostor R^n. To nazývá Riemann n-rozměrnou varietou. Kromě toho Riemann předpokládá, že je definováno, co jsou to diferencovatelné funkce na varietě, tj. v řeči současníků, že varieta je opatřena diferencova-

*) „Analysis situs" (analýza polohy) je termín zavedený do matematiky Leibnizem a označující jednoduché topologické vztahy. Do této oblasti zařadil např. L. Euler problém „Královeckých mostů". Termín „topologie", zavedený v polovině 19. století I. B. Liftingem, je jen řeckým překladem Leibnizova latinského výrazu.

(Poznámka redakce)

telnou strukturou, že je diferencovatelnou varietou. Globální charakter variety je touto definicí ponechán zcela otevřen. Geometrie na varietě je dána lokální metrickou strukturou, přesněji: eukleidovskou metrikou, která se mění spojitě diferencovatelně od bodu k bodu. Historie ukázala, že touto Riemannovou myšlenkou byla v podstatě ukončena matematická příprava na to, aby o půl století později mohla nastat základní proměna našich pojmů prostoru a času v obecné teorii relativity. Je velmi zajímavé si všimnout, jak se RIEMANN a EINSTEIN dívali na poměr mezi matematikou a fyzikou v rámci vývoje našeho poznání o realitě prostoru. Riemann o tom píše na závěr svého slavného pojednání *Über der Hypothesen, welche der Geometrie zu Grunde liegen*: „Otázka, zda předpoklady geometrie platí v nekonečně malém, souvisí s otázkou po vnitřních základech metrických vztahů v prostoru. V této otázce, kterou můžeme docela dobře pojmout do nauky o prostoru, se uplatní výše uvedená poznámka, že totiž v případě diskrétní variety jsou metrické vlastnosti v principu již obsaženy v pojmu variety, v případě spojité variety k nim však musíme dojít jinak. Skutečnost, která zakládá prostor, musí tedy buď tvořit diskrétní varietu, nebo je třeba základ metrických vztahů hledat mimo geometrii, v silových vazbách, které zde působí.

O těchto otázkách můžeme rozhodnout jen tehdy, když vyjdeme z dosavadního, zkušeností ověřeného chápání jevů, kterému položil základ Newton, a když je na základě skutečností, které se z něho nedají vysvětlit, důkladně přepracujeme; taková vyšetřování, která jako zde uvedená vycházejí z obecných pojmů, mohou sloužit jen k tomu, aby tato práce nebyla zdržována omezeností pojmů a aby pokrok v poznání souvislostí věcí nebyl brzděn přežívajícími předsudky. Tím se dostáváme do oblasti jiné vědy, do oblasti fyziky, která se možná nedovede otevřít současným podnětům."

Fyzikální vývoj, který Riemann předvídal, došel svého naplnění v obecné teorii relativity A. Einsteina. Ta spojuje prostor a čas do čtyřrozměrného kontinua prostoročasu, do variety s LORENTZOVOU metrikou, která souvisí s rozložením hmoty v prostoru. Einstein, jehož teorie znamená nové a hlubší porozumění realitě prostoru, času a hmoty, napsal o jejích matematických základech toto ([11]): „Takto zobecněný tenzorový počet byl matematiky vybudován již dlouho před teorií relativity. Nejprve rozšířil Riemann Gaussův myšlenkový postup na kontinua libovolné dimenze, prorocky předvídal fyzikální význam tohoto zobecnění." Neexistuje lepší příklad na to, čím matematika nakonec je: jednou stránkou chápání reality.

Ke vztahu teorie a praxe

Ještě jedna základní poznámka ke vztahu teorie a praxe. „Teoretické poznání má vyložit objekt v jeho nutnosti, v jeho všestranných vztazích, sám o sobě a pro sebe. Ale lidský pojem se zmocní této objektivní pravdy poznání a ovládne ji ‚s konečnou platností' teprve tehdy, když se tento pojem stane ‚samým pro sebe' ve smyslu praxe. Tj. praxe člověka je zkouškou, kritériem objektivnosti poznání." ([19]) Praxe je tedy kritériem, které s konečnou platností prokazuje objektivní správnost věd. To však neznamená, že vývoj věd by byl jednostranně určován praxí. (Srv. [19], str. 178–179, 191.) To platí obzvláště o matematice a vyplývá bezprostředně ze způsobu, jakým matematika abstrahuje od skutečnosti. Mnohotvárný vývoj a vzájemný vztah matematických teorií vede znovu a znovu překvapivým způsobem k základním pokrokům také v řadě aplikací, které jsou nepředvídatelné a nedají se ani naplánovat, ani plánovitým ovlivňováním zaměření matematického výzkumu vynutit. Tento výrok samozřejmě neznamená ospravedlnění subjektivní libovůle matematického výzkumu, nýbrž zahrnuje v sobě naopak povinnost každého matematika zabývat se podstatnými, a ne jakýmikoliv problémy. Toto tvrzení dále přirozeně nevylučuje, že také v matematice se určité směry vývoje předvídat dají. ~~A tím se konečně nevylučuje, že v zemi s omezeným nebo ještě nedostatečně rozvinutým vědeckým potenciálem musí být výzkum z praktických důvodů omezen na určité obory. Tato volba musí přihlížet k předvídaným potřebám řešení praktických problémů země a nejen — jak se často tvrdí — k hlediskům matematickým, jako například k tomu, která matematika je ‚nejlepší‘.~~ Vzhledem k postavení matematiky v lidském procesu poznání však nelze vývoj matematiky v jeho historické perspektivě jednostranně určovat aplikacemi. To by bylo nedialektické nepochopení vztahu teorie a praxe. Vedlo by to k pokusu vysvětlovat vývoj matematiky jednostranným, mechanickým a vnějškovým způsobem z podmínek a nutností společenské praxe a výroby, což by bylo stejně nesprávné jako jejich vliv na vývoj matematiky popírat. Takové nedialektické uvažování by vedlo k tomu, že by byly ignorovány důležité momenty vývoje matematiky: její vnitřní dynamika, dialektický vývoj idejí, funkce lidské tvořivosti, fantazie, intuice, nevyhnutelný vývoj myšlení.

Jednota a mnohotvárnost

Matematika zobrazuje konec konců realitu, a proto se v ní odráží též jednota a mnohotvárnost jevů. Jednota, ~~jak již bylo zdůrazněno,~~ odpovídá vzájemné souvislosti všech matematických teorií. Mnohotvárnost odpovídá mnohotvárnosti pojmů, problémů a teorií. To vede nutně k vytváření speciálních oborů a tento proces v matematice probíhá přinejmenším od minulého století. Tento vývoj je znám ve všech vědách a zvlášť silný výraz našel v matematice, kde existuje obzvlášť velká možnost a tendence, aby se jednotlivé, úzce vymezené okruhy otázek oddělovaly jako nové disciplíny, které se pak dále vyvíjejí formou zkoumání nějaké zvláštní struktury. Abychom si učinili představu o dnešní diferenciaci matematiky na speciální obory, bude účelné se podívat na její třídění podle systému MOS ([21]). Zde již není matematika rozdělena, jako tomu bylo třeba před sto lety, pouze na algebru, geometrii a analýzu a také ne pouze na obory, které se utvořily v minulém století jako je například teorie čísel, teorie funkcí komplexní proměnné, diferenciální geometrie, teorie grup atd., nýbrž v neméně než 60 oborů; z nich každý se v průměru rozpadá na dalších 6 podoborů a každý podobor ještě jednou asi na 6 částí. A dokonce toto extrémně jemné dělení je ještě příliš hrubé na to, aby mohlo vymezit zájmovou oblast mnoha specialistů.

Věda s takovou tendencí k diferenciaci by se musela bez přiměřeně silné tendence k integraci stát v krátké době absurdní. A tak i v matematice přece jen existují rozmanité tendence ke sjednocování. Jednou stránkou tohoto sjednocování je abstrakce, je to vývoj sjednocujících pojmů jako je ‚funkce‘, ‚grupa‘, ‚množina‘, ‚topologie‘, ‚kategorie‘, ‚funktor‘. K tomu přísluší také slučování celého komplexu definic, konstrukcí a výsledků do jedné jediné teorie. Tento proces, který může záležet v axiomatizaci nějakého oboru, ale také jen v jeho shrnujícím popisu nebo také v dalekosáhlém objasnění jeho základních problémů, je v matematice tak častý, že je zbytečné na to uvádět nějaké příklady. Sjednocování matematiky na základě budování hierarchie struktur bylo vytyčeno již BOURBAKIM jako jeho základní cíl. — Jiná forma sjednocování je spojování prvků rozličných teorií — často takových, které mají protikladný charakter — k důkazu nového hlubokého výsledku nebo k vytvoření nové teorie. Právě nejpodstatnější pokroky jsou často tohoto druhu, jako například vznik analýzy z prvků algebry a geometrie. — Dalším důležitým momentem sjednocování je stále nové odhalování skrytých, hlubokých vztahů mezi zcela různými obory. Takový objev skoro vždy znamená hlubší pochopení a počátek nového, plodného vývoje. Myslíme si, že tento jev nemůžeme pochopit jinak, než tak, že v matematice se odráží mnohotvárná jednota reality, že intuice velkých matematiků dokáže vytušit její podstatu při určování dalšího směru vývoje idejí a že pak naše nepokojné myšlení odhaluje stále více vztahů, až si nakonec alespoň částečně uvědomí celkovou souvislost. — Konečně je tu skutečnost, že se často zdá nemožným zařadit některé matematické práce do jednoznačně určeného speciálního oboru, známka toho, že matematická specializace v sobě nese zárodek svého odstranění.

Ze všech těchto důvodů se matematikové musí informovat také o pokrocích matematiky mimo jejich vlastní úzký obor, a proto potřebují i používají rozmanité formy styku. Zvlášť naléhavá je zde nutnost výměny vědeckých pracovníků. Tam, kde je taková výměna brzděna politickými okolnostmi, škodí to zpravidla rozvoji vědy v příslušných zemích. Již proto by se měli všichni vědci podle svých možností zasazovat o nastolení vztahů mírové spolupráce mezi národy.

Navzdory veškeré integraci je však třeba konstatovat, že tendence ke specializaci, stejně tak jako ke sjednocování, zůstává v matematice tendencí základní a že na jistém stupni vývoje odtud vzniká stále větší dělba práce, která se — nehledě na mimořádné jedince jako byl například HILBERT — nedá překonat na individuální úrovni. Jednota matematiky může být zajištěna jedině kolektivně, především dostatečným vzájemným stykem.

Mnohem závažnější než problém dělby práce uvnitř matematiky je problém dělby práce mezi matematikou a ostatními empirickými vědami, neboť zde je skryto velké nebezpečí odtržení matematické teorie od reality, ‚falešné‘ abstrakce, která nemůže být nijak potvrzena kritériem praxe. Rozdílnost metody, způsobu myšlení a jazyka, neznalost aplikací vinou nedostatečného vzdělání, zaujímání nesprávných stanovisek vinou nedostatečného chápání postavení matematiky a nesprávné výchovy a konečně vědecké a obecně společenské pracovní podmínky napomáhají vzniku extrémní dělby práce. Občas ještě mohou jednotliví matematikové, ačkoliv nepracují v ‚aplikované‘ matematice, osobním rozhovorem s *jinými* vědci a vlastním studiem tuto trhlinu překlenout a takto přímo poskytnout podstatný matematický příspěvek jiným vědám. Ale překlenutí negativních důsledků dělby práce na široké bázi je složitý společenský problém, jehož řešení nelze vynutit izolovanými opatřeními, například v oblasti vzdělávání matematiků. Minimálním požadavkem je, aby si matematikové uvědomili postavení matematiky v celkovém rámci lidské činnosti.

Obsah a forma

Jedním z nejstarších protikladů v dějinách našeho myšlení je protiklad mezi obsahem a formou. Rozlišování mezi obsahovým a formálním myšlením je samozřejmě běžné i matematikům. Tak třeba řekneme o nějakém argumentu, že je pouze formální, a myslíme tím, že využívá pouze logických vztahů a nepřihlíží k významu pojmů vystupujících v těchto vztazích; často tak činíme proto, že v dané chvíli ještě nevidíme hlubší důvod toho, že argument vede k cíli. Zmíněné úsloví by mohlo vzbudit dojem, jakoby se jen obsahové myšlení mohlo zmocnit podstaty věci a jakoby formální myšlení bylo něčím špatným. Ale tak to rozhodně není v případě matematiky. „Forma je podstatná" ([19]). V matematice vede právě myšlení zaměřené na vystižení obsahu struktur, na smysl věcí, k vytváření forem, které jsou nakonec popsány systémy axiómů a zkoumány deduktivně, bez ohledu na veškerou obsahovou stránku. Oba momenty v tomto procesu, konstruktivní a axiomatický, jsou stejně důležité, a proto je tak nesprávné, jestliže jejich protagonisté stojí nesmiřitelně proti sobě. – Při nalézání něčeho nového se zdá konkrétní, obsahový moment tím nejdůležitějším. Úloha příkladů, problémů a zvláštních konstrukcí jako hybných elementů je matematiky stále znovu zdůrazňována. Ukázali jsme již, jakou nedocenitelnou roli sehrála konstrukce neeukleidovské geometrie. Snad srovnatelnou úlohu má dnes konstrukce necantorovských modelů teorie množin. Konstrukce univerzálních objektů, jako jsou například vnější a tenzorové součiny, klasifikující prostory, prostory modulů, univerzální deformace a rozvinutí atd. nebo celých teorií, jako jsou např. teorie homotopie, různé kohomologické teorie, teorie charakteristických tříd atd., jsou vždy velkým krokem vpřed a podaří se obvykle dříve, než jsou nově získané struktury popsány axiomaticky, i když ovšem v dnešní době nesmíme přehlížet ani vliv strukturního myšlení při hledání takových konstrukcí. Nadto existuje mnoho konstrukcí takové nezaměnitelné originality, že jejich vřazení do hierarchie struktur se musí zdát umělé a jejich zrod může být pochopen jedině jako důsledek spontánního, subjektivního elementu v matematice. Výčet některých příkladů, všech z téhož oboru a snad srozumitelných přinejmenším topologům, má ukázat, jak je to míněno: THOMOVA-PONTRJAGINOVA konstrukce, konstrukce těles s uchy, chirurgie na varietách, konstrukce exotických sfér jako fibrovaných prostorů sfér nad sférami nebo slepováním koulí podél jejich okrajů nebo pomocí MILNOROVY a HIRZEBRUCHOVY konstrukce nebo jako okrajů okolí singularit. Všechny takové konstrukce urychlují vývoj teorie: stanou se jádrem celé teorie nebo dodávají příkladový materiál, ze kterého se nové teorie vyvinou nebo na kterém mohou být prověřeny, a teorie často nemůže postoupit vpřed, dokud takové konstrukce chybějí. – Jestliže při hledání nového převažuje obsahový moment a indukce, pak při uspořádávání nových poznatků, jejich rozvíjení a popisu převažuje formální moment a dedukce. To vede ke známému zobrazování matematiky jako sledu definic vět a důkazů. A pokud je zobrazení špatné, pak problémy, příklady a konstrukce v něm vůbec nejsou patrné, jsou přítomny jen skrytě ve všeobecnostech teorie. Kdo chce svou matematiku vykládat pouze formálně, od toho můžeme právem žádat objasnění obsahové stránky. Kdo nám naopak nejprve zprostředkuje své obsahové představy, musí nám ukázat také formu, do které jsou pojaty, pokud chce něco přísně matematicky dokazovat. A výsledkem obsahového myšlení ve vědě je často právě nová forma: v okamžiku, kdy docházíme k cíli, převrací se obsah ve formu. Obsah a forma, indukce a dedukce, názornost a abstraktní myšlení tvoří v matematice nerozlučnou jednotu a matematika musí v sobě toto napětí udržet, pokud chce zůstat životaschopnou vědou. To dnes není nic nového, bylo tomu tak vždy; již EUKLEIDES svůj axiomatický popis geometrie završil konstrukcí, totiž konstrukcí platónských těles: čtyřstěnu, krychle, osmistěnu, dvanáctistěnu a dvacetistěnu.

Zvláštní a obecné

HEGEL rozpracoval myšlenku, že střídání analýzy a syntézy i úvah o zvláštním a obecném jsou charakteristickými momenty každého dialektického myšlení. Několik příkladů má ukázat, že tyto myšlenkové obraty patří také k matematické metodě. Na jednu stránku dialektické jednoty obecného a zvláštního, na vzájemnou souhru teorie a příkladů jsme již poukázali. Dále je tu skutečnost známá každému matematikovi z jeho vlastní práce, totiž že matematik na základě své dosavadní zkušenosti s určitou oblastí matematických objektů má sklon považovat určité jevy za normální a jiné naopak za neobvyklé. Matematických pojmů, které popisují normální chování objektů, je nepřehledné množství a k jejich rozlišení je náš jazyk příliš chudý, proto pro nejrůznější pojmy musíme používat stále těchže slov: regulární, normální, obecný, generický, standardní, kanonický, přirozený. A podobně je tomu se slovy označujícími zvláštní situace: singulární, speciální, výjimečný, exotický, patologický. Tyto protiklady v žádném případě neznamenají statické stavění jednoho proti druhému nýbrž naopak obsahují řadu dynamických prvků. Tak například matematik očekává při svých vyšetřováních, že většina jím zkoumaných struktur bude mít chování podobné tomu, co již z dřívějška zná, tedy obecné, normální. A vskutku již tento heuristický princip je díky jednotě matematiky velmi účinný. Dobří matematikové mohou tak často předpovědět výsledek vyšetřování, jejichž uskutečnění pak trvá třeba řadu let. Víra v normální, obecné, ‚dobré' chování patrně stála u zrodu mnoha z nejznamenitějších hypotéz, z nichž některé dodneška nebyly dokázány. Ale i když matematik hledá obecné, stává se mu přesto stále znovu, že naráží na singulární, výjimečné, ‚patologické'. A úsilí zmocnit se tohoto zcela nového a zvláštního, učinit z něho přece jen zase něco obecného, je rozhodujícím momentem pokroku. Tak například z objevu exotických sfér*) vznikla diferenciální topologie,

---

*) *Exotickou sférou* dimenze n nazýváme diferencovatelnou varietu, která je homeomorfní s obyčejnou sférou $S^n \subset R^{n+1}$ danou rovnicí $(x_1)^2 + \ldots + (x_{n+1})^2 = 1$, ale není s ní difeomorfní. První takovou sféru objevil v r. 1956 J. MILNOR v dimenzi 7. Spolu s KERVAIREM pak ukázali, že existuje přesně 28 tříd variet homeomorfních s S^7 takových, že každé dvě variety z téže třídy jsou navzájem difeomorfní a žádné dvě variety z různých tříd nejsou navzájem difeomorfní. Existuje tedy právě 27 podstatně různých exotických sfér v dimenzi 7.

Podle konstrukce E. BRIESKORNA můžeme obdržet geometrický model každé ze zmíněných 28 tříd jako průnik množiny všech nulových bodů komplexního polynomu $P_k(z) = (z_1)^3 +$

jedna z nejživotaschopnějších teorií současné matematiky. Vzájemná souhra zvláštního a obecného může být dokonce přímo zachycena v pojmech, konstrukcích a teoriích. Vezměme například protiklad regulárního a singulárního v komplexní analýze nebo v algebraické geometrii. Regulární body komplexního prostoru jsou body, ve kterých má prostor obecné, nejjednodušší, takříkajíc ‚nejlepší' chování. Ty tvoří otevřenou hustou množinu, to znamená, že skoro všechny body jsou regulární. Ale o regulárních bodech se dá těžko říci něco více, než že jsou regulární. Zajímavější jsou singulární body, a to z mnoha důvodů. Na druhé straně singularity se dají jen obtížně vyšetřovat a jsou zdrojem všech možných komplikací. Proto se snažíme úvahy zjednodušit tím, že singularity nějak deformujeme nebo modifikujeme, popř. rozvrstvíme podle stupně složitosti, a tím vyšetřování podle možností převedeme na jednodušší regulární případ. To kromě jiného vyžaduje mimořádně složité konstrukce a k nejvyšší jemnosti dovedenou analýzu a syntézu. Věty, které říkají, že konstrukce vede k cíli, jako třeba věta o existenci semi-univerzálních deformací izolovaných singularit nebo o existenci rozřešení singularit, se těžko dokazují. HIRONAKŮV důkaz týkající se rozřešení singularit je vůbec jedním z nejsložitějších důkazů v celé matematice. Do

$+ (z_2)^{6k-1} + (z_3)^2 + (z_4)^2 + (z_5)^2$ ($k = 1, \ldots, 28$) s jednotkovou sférou komplexního prostoru $C^5[z_1, \ldots, z_5]$.

Dále bylo dokázáno, že pro $n < 7$ žádné exotické sféry dimenze n neexistují. Pro $n > 7$ je počet vzájemně neekvivalentních sfér (tj. počet tříd) vždy konečné číslo; závislost tohoto počtu na dimenzi se však řídí velmi složitou zákonitostí.

(Poznámka překladatele)

téhož okruhu problémů jako teorie deformace patří univerzální rozvinutí singularit funkcí, nejdůležitější konstrukce v Thomově teorii katastrof. V ní se stýká protiklad obecného a zvláštního s protikladem kvantity a kvality. O tom se však ještě zmíníme dále.

Analýza a syntéza

Jako při každém myšlení, tak i při myšlení matematickém dochází k neustálému střídání analýzy a syntézy, kdykoliv chceme od zkoumání daného materiálu dojít k novým výsledkům. Několik příkladů má ukázat, že vzájemná souhra analýzy a syntézy v rozmanité formě patří přímo k metodě matematického dokazování a konstruování. Že to tak bylo vždy, ukazují příklady z antické geometrie a algebry: rozklad polí a obrazců na trojúhelníky v geometrii, kde účelem byl výpočet plochy a rozklad přirozených čísel na prvočísla v aritmetice. Seznam příkladů z moderní matematiky je bez konce a následující výčet je pouze malým výběrem: K základním operacím v teorii množin patří sjednocení množin, resp. rozklad množiny na podmnožiny, dále skládání a faktorizace zobrazení, které se staly základními pojmy teorie kategorií. V topologii a geometrii existují nesčíslné způsoby rozkladu a naopak syntézy: rozřezávání a slepování prostorů, rozklady v kartézské součiny, fibrace, foliace, triangulace, filtrace, stratifikace, rozklad v souvislé komponenty, buněčný rozklad, rozklad na tělesa s uchy, pokrytí variety souřadnicovými okolími, rozklad na orbity, rozklad fázového prostoru dynamického systému na stabilní variety, rozklady jednotky atd. do nekonečna. V algebře by mohli algebraikové předložit stejně dlouhý seznam: Existují všechny možné druhy kompozičních řad, rozklady na sčítance nebo činitele, rozklad algebraické variety v ireducibilní komponenty, vyjádření ideálu ve formě průniku primárních ideálů a pravděpodobně ještě mnoho dalších příkladů, které znají pouze algebraikové. Matematická analýza je konečně analýzou a syntézou par excelence. Teorie Fourierových řad, harmonická analýza a spektrální rozklad operátorů jsou jen několika náhodně vybranými příklady. – Analýza a syntéza jsou základními principy mnoha výsledků majících charakter klasifikace: objekty, které mají být klasifikovány, se rozloží v jednoduché stavební kameny, ze kterých se získají klasifikující údaje. Abychom však ukázali, že získané údaje skutečně odpovídají některému z vyšetřovaných objektů, je naopak zapotřebí provést syntézu objektu z jeho stavebních kamenů. Analýza a syntéza jsou principy mnoha důkazových metod v geometrii, algebře a analýze, které redukují globální výsledky na zkoumání lokálních vlastností. Všechny tyto příklady ukazují: analýza a syntéza náleží nerozlučně a odvždycky k matematické metodě.

(Pokračování)

vyučování

Mikrovyučovanie a jeho uplatnenie na vysokých školách pri príprave poslucháčov na učiteľské povolanie

Andrej Dribňák, Košice

V poslednom období sa v pedagogickej literatúre objavil nový pojem *mikrovyučovanie* ([1], [2], [3]). V USA ([1] s. 112–113) prebieha veľká diskusia o prestavbe pedagogického vzdelávania. Podnet na diskusiu dal J. KONANT svojou rozsiahlou monografiou *Vzdelávanie amerických učiteľov.* J. Konant vo svojej práci ostro napadá existujúci systém vzdelávania učiteľov. Hlavnú chybu vidí v tom, že mladí učitelia slabo ovládajú profesionálnopedagogické návyky a zručnosti. Stredobodom pozornosti pri organizácii pedagogického vzdelávania je odborno-pedagogický cyklus. Boli podniknuté kroky na rozpracovanie *profesiogramu* činnosti učiteľa, v ktorom sa uvádza podrobný prehľad rôznych návykov a zručností učiteľskej činnosti. V týchto návykoch a zručnostiach sa poslucháči zdokonaľujú pomocou metódy mikrovyučovania a iných vyučovacích metód. Zvlášť široké uplatnenie našlo mikrovyučovanie. Jeho podstata spočíva v tom, že poslucháč pracuje pod vedením odborníka s malou skupinou žiakov (5–6 ž.). Poslucháč dostáva konkrétne úlohy a postupne si osvojuje odborno-pedagogické návyky a zručnosti uvedené v profesiograme učiteľa.

Americký pragmatizmus ženie autorov reforiem do krajnosti. Volá po zrieknuti sa akýchkoľvek teoretických prednášok z psychológie a pedagogiky a žiada ich nahradiť psychologicko-pedagogickými nácvikovými „dielňami", v ktorých si poslucháč má osvojovať pedagogické „remeslo". V USA je veľa vysokých škôl,