G. M. Fichtěngolc

Iracionální čísla na střední škole

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 1, 22--33

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137871

položíme čtvercovou síť na průsvitném papíře a sestrojíme perspektivu této sítě. Odhadneme průsečíky křivky s přímkami sítě a přeneseme je do perspektivy sítě (v případě průčelných čtverců tzv. *gratikuláž*).

Metoda hloubkového měřítka slouží k vynášení výšek nad základní rovinou (obr. 20). U kraje nákresny sestrojíme perspektivy rovnoběžek v základní rovině, procházejících body měřítka na základnici. Perspektivou A_{1s} vedeme průčelnou přímku $a_s \parallel z$ (nahradí ji hrana příložníku), $Aa \parallel \pi$, redukce $\overline{A_{1s}A_s}$ úsečky A_1A (na obr. 4,6) je táž jako redukce této délky na přímce a_s a odměříme ji přímo na perspektivě rovnoběžek.

Přesnost metody ovšem závisí na podrobném dělení měřítka. Výhodné je, že metoda nevyžaduje konstrukce ve vlastní nákresně.

Perspektivní axonometrie.

U stavebních objektů, které vykazují tři navzájem kolmé směry, lze zvolit pravoúhlou soustavu souřadnic s osami těchto směrů. Každý bod je pak určen souřadnicemi vzhledem k této soustavě. Sestrojíme-li perspektivu os souřadnic, lze potom např. metodou dělicích bodů os najít perspektivy souřadnic a tím i perspektivu daného bodu. Na obr. 21 je osa z v průmětně, bod A má souřadnice x_A, y_A, z_A. Metoda je pracná a v této podobě se jí nepoužívá.

Sestrojme v každé souřadnicové rovině síť čtverců a určeme jejich perspektivu. Tím získáme tzv. *perspektivní síť*, ve které je možno již bez dalších konstrukcí rýsovat perspektivu jak objektu daného ortogonálními průměty, tak také i objektu navrhovaného. Ovšem že tuto výhodu zmenšuje nemožnost změnit distanci a odchylky os.

Literatura:

[1] Kadeřávek-Klíma-Kounovský, *Deskriptivní geometrie I*, ČSAV 1954.

[2] A. Salner, *Prostorové zobrazování ve strojnictví*, SNTL 1954.

[3] F. Hohenberg, *Konstruktive Geometrie für Techniker*, Springer 1956.

[4] Scheffers, *Lehrbuch der darstellenden Geometrie II*, Berlin 1920.

IRACIONÁLNÍ ČÍSLA NA STŘEDNÍ ŠKOLE[1])

G. M. Fichtěngolc

1. Je všeobecně uznáváno, že iracionální čísla jsou slabým místem ve výuce matematice na střední škole. Je tomu tak především proto, že iracionální čísla jsou teoreticky i metodicky obtížným problémem, a částečně také proto, že výklad této otázky v učebnici algebry je špatný, učebnice geometrie, která částečně plní úkol výkladu iracionálních čísel, nemůže se této úlohy plně zhostit.

2. Matematikové se s iracionálními čísly setkávali již po mnoho století, především v souvislosti s odmocňováním a dále při vyšetřování poměru nesouměřitelných veličin. Logická podstata těchto čísel, jejich vztah k dobře známým racionálním číslům však zůstával nevyjasněným a zákonitosti početních operací s iracionálními čísly neodůvodněné.

[1]) Г. М. Фихтенгольц, Иррациональные числа в средней школе, Matěmatičeskoje prosvěščenie, č. 2, 1957.

Kritický směr v matematice na začátku tohoto století postavil do popředí otázku vypracování logického základu matematické analysy a k tomu bylo nezbytné vyjasnit i pojem reálných čísel. V sedmdesátých letech vznikly (téměř současně) tři teorie iracionálních čísel, Dedekindova, Mérayova-Cantorova a Weierstrassova, které otázku plně vyčerpaly.

Byly nejednou činěny pokusy zavést tyto teorie v různých zpracováních do učiva střední školy. Je třeba však uznat, že tyto pokusy neměly úspěch. Ukázalo se, že vybudovaná teorie neodpovídá ani potřebám, ani možnostem žáků středních škol. Proto i nyní nechceme řešit otázku vybudování jakési teorie iracionálních čísel pro potřeby střední školy. Při tom však jakési minimum chápání problému iracionálních čísel je na střední škole nezbytné. Formuluji toto minimum takto: *je třeba dát žákům středních škol jasnou představu o iracionálních číslech a jejich úloze v algebře a geometrii. Toho lze plně dosáhnout a současně to plně odpovídá cílům, které si klade střední škola.*

Přejdu nyní k výkladu podrobného plánu výuky iracionálních čísel nejen s ohledem na zavedení pojmu v 8. třídě, ale i s ohledem na jeho další použití ve výuce a na jeho prohloubení při opakování učiva v 10. třídě.

3. Je účelné přistoupit k zavedení iracionálních čísel *současně* v algebře i v geometrii. Je třeba proto výuku vést tak, aby otázka měření veličin byla v geometrii probírána tehdy, když se v algebře zabýváme — po výkladu přibližného stanovení druhých odmocnin — pojmem přesné hodnoty odmocnin z čísel, které „nejdou odmocnit“. V této době je třeba spojit hodiny algebry a geometrie a všemi prostředky přesvědčit žáky o tom, že čísla, která dosud znají, nestačí k popisu všech jevů, seznámit je s iracionálními čísly a vrátit se k oddělenému výkladu algebry a geometrie až si žáci již osvojili základní představy o iracionálních číslech.

Rozšíření číselného oboru musí být pečlivě připraveno, neboť již sama myšlenka *vytvoření* nových čísel a jejich připojení k číslům již známým může studenty zmást.

Je účelné již dříve poukázat na tuto otázku a připomenout žákům, že v jejich praxi již dvakrát došlo k tomu, že známá čísla „nestačila“ a bylo třeba zavést nová čísla.

Poprvé k tomu došlo v obecné škole. Žáci tehdy znali jen *přirozená* čísla: jejich součet a součin byl vždy proveditelný, ale dělení nikoli. Jinými slovy součet a součin libovolných dvou přirozených čísel bylo vždy možno stanovit (v oboru přirozených čísel), ale u podílu tomu tak nemuselo být. Byly zavedeny zlomky, nová čísla, a dělení se stalo proveditelným ve všech případech.

V rozšířeném číselném oboru bylo možno bez překážek provádět sčítání, násobení a dělení, avšak ne vždy bylo možno provést odečítání. Po druhé byl číselný obor rozšířen v 6. třídě zavedením nových čísel — čísel záporných (a nuly) a nyní se již všechny čtyři základní operace staly proveditelnými[2]).

Je důležité, aby žáci pochopili, že skutečně všechna jim známá čísla — přirozená čísla, zlomky i čísla záporná — byla vytvořena lidmi na základě praktických potřeb (včetně potřeb matematické praxe). Zatím co přirozená a racionální čísla byla zavedena již před tisíciletími, záporná čísla se stala potřebou matematiky teprve před několika stoletími.

4. Je třeba zdůraznit, že v obou uvedených případech z dřívější zkušenosti žáků „příčinou“ vytvoření nových čísel byly inversní operace — dělení a odečítání, zatím co přímé operace byly vždy proveditelné i v nerozšířeném čísel-

[2]) Samozřejmě s výjimkou dělení nulou.

ném oboru. Třetí přímá operace, umocňování (řekněme s přirozeným exponentem) je analogicky také vždy proveditelná v oboru racionálních čísel. Přirozeně vzniká otázka, zda je proveditelná příslušná inversní operace[3]) — odmocňování. Tato operace není vždy proveditelná ani tehdy, omezíme-li se na odmocniny kladných čísel.

Je třeba, aby žáci byli skutečně a vědomě přesvědčeni o tom, že již některé velmi jednoduché odmocniny nelze vyjádřit racionálními čísly. Nemožnost nalézt např. $\sqrt{2}$ nesmí žáci chápat jako naši neschopnost najít toto číslo. Setkal jsem se již s takovým „výkladem" této otázky, že racionální hodnotu této odmocniny stanovit je obtížné proto, že čitatel a jmenovatel jsou čísla příliš velká.

K vytvoření správného názoru žáků na tuto otázku snad ani není nezbytné vykládat věty o neexistenci racionální odmocniny celého čísla, jestliže neexistuje celistvá odmocnina, které zpravidla jsou na školách přednášeny. Zdá se mi, že stačí omezit se na rozbor nejjednodušší odmocniny $\sqrt{2}$. Důkaz tvrzení, že tato odmocnina neexistuje (v oboru racionálních čísel) je třeba provést tak, abychom zajistili pochopení tohoto důkazu všemi žáky do všech důsledků.

Nejvhodnějším k tomu je vynikající důkaz Euklidův, vypracovaný již před dvěma tisíci lety. Je všeobecně znám, ale pro úplnost jej uvedu.

Máme dokázat, že $\sqrt{2}$ není číslo racionální. Důkaz provedeme sporem. Předpokládejme tedy, že $\sqrt{2}$ je číslo racionální (kladné)[4]), tj. že existuje zlomek $\frac{p}{q}$ (kde p a q jsou čísla celá) takový, že jeho čtverec je roven 2: $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$. Můžeme při tom předpokládat, že čísla p a q nemají společného dělitele (v opačném případě bychom mohli zlomek tímto společným dělitelem krátit).

Z uvedené rovnice snadno plyne $p^2 = 2q^2$.

Na pravé straně této rovnice je zřejmě číslo sudé (jedním z činitelů pravé strany je číslo 2). Tedy i číslo p^2 je sudé, a číslo p musí být také sudé (neboť čtverec lichého čísla je také lichý). Čísla p a q nemají podle předpokladu společného dělitele a tedy jmenovatel q je číslo liché.

Po tomto předběžném závěru budeme v naší úvaze pokračovat. Sudé číslo p může být napsáno ve tvaru $p = 2r$ (r je číslo celé); dosadíme-li to do předchozí rovnice, dostaneme $2r^2 = q^2$.

Na levé straně zde máme opět sudé číslo a tedy i číslo q^2 je sudé. Z toho snadno plyne, že i samo číslo q je sudé.

Tedy kdyby $\sqrt{2}$ bylo možno vyjádřit racionálním číslem $\frac{p}{q}$, kde p a q nemají společných dělitelů, pak číslo ve jmenovateli by muselo být současně sudým i lichým. Tento zřejmý spor jasně dokazuje, že takové racionální číslo neexistuje.

5. Jakmile jsme takto ukázali, že racionální čísla nestačí všem potřebám algebry, protože jimi nelze vyjádřit ani nejjednodušší odmocniny, je velmi důležité ukázat, že i potřeby geometrie vyžadují rozšíření žákům dosud známého číselného oboru.

Zabývejme se srovnáváním délky úsečky a s délkou jiné úsečky b (jinými slovy délkou úsečky a jestliže délku úsečky b budeme považovat za jednotku délky). Jsou-li obě úsečky souměřitelné a q-tá část úsečky b se vejde právě

---

[3]) Přesněji jedna z dvou inversních operací.

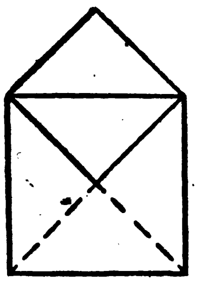
[4]) Je zřejmé, že $\sqrt{2}$ nemůže být číslo celé, neboť $1^2 < 2$ a již $2^2 > 2$.

*p*krát na úsečku *a*, pak je podíl jejich délek vyjádřen racionálním číslem $\frac{p}{q}$. *V případě dvou nesouměřitelných úseček nemůže být poměr jejich délek vyjádřen (racionálním) číslem.* Jinými slovy omezíme-li se na racionální čísla pak *úsečky nesouměřitelné s jednotkou nemají délku!*

Jak přesvědčit žáky o existenci nesouměřitelných úseček? Nejvhodnějším k tomu je klasický příklad — úhlopříčky a strany čtverce tím spíše, že zde nám bude opět „chybět" totéž číslo $\sqrt{2}$, o kterém jsme právě dokázali, že není číslem racionálním.

Důkaz nesouměřitelnosti úhlopříčky a strany čtverce, který je uváděn v učebnicích, je však složitý. Tento důkaz kromě toho spočívá na „metodě postupného přikládání úseček", kterou si žáci neosvojují bez námahy (nejsou totiž dostatečně seznámeni s prototypem této metody — s metodou postupného dělení při stanovení největšího společného dělitele dvou přirozených čísel). Přísně vzato pak důkaz nesouměřitelnosti dvou úseček spočívající na nekonečném procesu postupného přikládání úseček vyžaduje ještě doplňků. Nesouměřitelnost úhlopříčky a strany čtverce je při tom faktem obrovského principiálního významu a musí být vysvětlen prostě a přesvědčivě.

Chci se zde proto vzdát nepotřebné rigorosnosti a vybudovat úvahy na větě Pythagorově, kterou zvlášť pro tento účel lze elementárně dokázat.



Obr. 1.

Je dán čtverec (obr. 1); máme dokázat, že jeho úhlopříčka a strana jsou nesouměřitelné.

Předpokládejme opak: nechť existuje společná míra těchto úseček a nechť je obsažena v úhlopříčce *p*krát a ve straně čtverce *q*krát. Vezmeme-li tuto společnou míru za jednotku délky pak délku úhlopříčky a strany čtverce můžeme jednoduše vyjádřit celými čísly p a q a čtverce, sestrojené nad těmito úsečkami budou mít obsah p^2 a q^2) (čtverečných jednotek)[5]).

Z klasického obrázku 1 však vidíme, že čtverec sestrojený nad úhlopříčkou je právě dvakrát větší (co do obsahu) než čtverec daný, neboť se skládá ze čtyř takových trojúhelníků, které daný čtverec obsahuje pouze dva.

Je tedy $p^2 = 2q^2$, odkud $\left(\frac{p}{q}\right)^2 = 2$, tj. zlomek $\frac{p}{q}$ má hodnotu $\sqrt{2}$. To však není možné (jak bylo výše dokázáno). Tedy skutečně strana a úhlopříčka čtverce jsou nesouměřitelné.

Jestliže tedy budeme stranu čtverce považovat za jednotku délky, pak (v oboru racionálních čísel) úhlopříčka tohoto čtverce nemá délku.

Tvrzení o tom, že „ne všechny úsečky mají délku" má velký principiální význam. Požadavkem existence odmocnin (kladných) racionálních čísel nelze motivovat zavedení všech (kladných) iracionálních čísel, zatímco potřeby geometrie — přiřadit ke každé úsečce číslo, vyjadřující její délku — vyžadují všech iracionálních čísel.

Při tom je dobře zdůraznit, že příčinou zavedení racionálních čísel nebyla jen neproveditelnost dělení, ale i (možná, že ještě ve větší míře) právě tato

[5]) Z celé teorie obsahu obrazců používáme zde jen vyjádření obsahu čtverce, jehož strana obsahuje celistvý počet délkových jednotek.

úloha o délce úsečky a jiných veličin v těch případech, kdy počet „přiložení" zvolené jednotky k dané úsečce nelze vyjádřit celým číslem.

6. Racionálních čísel je tedy skutečně „málo". O tom se žáci na základě dosud uvedených úvah skutečně přesvědčí.

Ze zkušeností víme, že v podobných případech je třeba vytvořit nová čísla. Jak máme nyní vytvořit čísla, která potřebujeme? Začněme konkrétním příkladem, číslem $\sqrt{2}$, o kterém jsme již mluvili.

Aproximaci odmocniny, tj. vyčíslení přibližné hodnoty odmocniny již žáci znají. Je dobře, jestliže již byly vyčísleny přibližné hodnoty čísla $\sqrt{2}$ jako cvičení:

$$1;\ 1{,}4;\ 1{,}41;\ 1{,}414;\ 1{,}4142;\ 1{,}41421;\ 1{,}414213;\ 1{,}4142135;\ \ldots \tag{a}$$

$$2;\ 1{,}5;\ 1{,}42;\ 1{,}415;\ 1{,}4143;\ 1{,}41422;\ 1{,}414214;\ 1{,}4142136;\ \ldots \tag{a'}$$

Ať vezmeme libovolný počet desetinných míst, ani jedno z těchto čísel není přesnou hodnotou $\sqrt{2}$, neboť všechna tato čísla umocněna na druhou dají buď číslo menší než dvě (čísla v prvním řádku), nebo číslo větší než dvě (čísla ve druhém řádku).[6]

Čtverce těchto čísel jsou však:

$$1;\ 1{,}96;\ 1{,}9881;\ 1{,}999396;\ 1{,}99996164;\ \ldots; \tag{b}$$

$$4;\ 2{,}25;\ 2{,}0164;\ 2{,}002225;\ 2{,}00024449;\ \ldots; \tag{b'}$$

jsou tím bližší číslu dvě, čím více destinných míst uvažujeme. Zvláště poučný je v této souvislosti první řádek (a) přibližných hodnot menších než $\sqrt{2}$: *jednou stanovené desetinné místo hledaného čísla se již při dalším zpřesňování nemění* (není tomu tak u přibližných hodnot větších než $\sqrt{2}$) a číslo, které vzniká postupným stanovováním desetinných míst se neustále více blíží přesné hodnotě odmocniny.

Tento fakt přirozeně vede k myšlence uvažovat nekonečný destinný zlomek 1,4142135 ..., představit si najednou všechny číslice za desetinnou čárkou, které při vyčíslování odmocniny jsou stanovovány jen postupně.

Napsat takový desetinný zlomek není samozřejmě možné; považujeme jej však za určený, jestliže známe pravidlo, které nám umožňuje stanovit číslici na libovolném desetinném místě za desetinnou čárkou. Např. číslice na tisícím místě je zcela přesně určena, přesto, že ji nikdo nezná[7]) (tato poznámka je určena spíše učitelům než žákům).

Na tomto místě je správné upozornit žáky na to, že se již v 5. třídě setkali s nekonečnými desetinnými zlomky. Vždyť nikoho z nich nepřekvapí, když při dělení čísel 1 a 7 dostane hodnotu zlomku $\frac{1}{7}$ ve tvaru nekonečného desetinného zlomku $\frac{1}{7} = 0{,}142857142857\ldots$ Tam šlo sice o periodické zlomky (takovým zlomkem je i uvedený příklad), a všechny tyto zlomky vyjadřovaly racionální čísla. Jestliže se však žáci již jednou setkali s nekonečnými desetinnými čísly, které někdy vyjadřují dokonce i „dobrá" čísla, neleknou se ani zlomku, který dostaneme jako hodnotu $\sqrt{2}$.

---

[6]) Jinak tomu samozřejmě ani být nemůže, neboť již víme, že neexistuje racionální číslo, jehož čtverec je roven dvěma.

[7]) Pomocí moderních počítacích strojů je jednoduché stanovit tisící desetinné místo $\sqrt{2}$ a nevyžaduje to mnoho času. Viz o tom článek A. A. Ljapunova a G. A. Šestopala v prvním čísle časopisu „Matěmatičeskoje prosvěščenije".

Okamžitě ovšem vznikne otázka, zda i zlomek 1,4142135 ... není periodický? Kdyby tomu tak bylo, byl by tento zlomek racionálním číslem $\frac{p}{q}$, které by současně bylo (jak lze dokázat[8]), přesnou hodnotou $\sqrt{2}$, což není možné.

Tedy *zlomek, který dostaneme, nebude periodický.*

7. Nyní je možné vyslovit obecnou definici nových — iracionálních — čísel, které je třeba připojit ke starým — racionálním — číslům, abychom vyhověli potřebám algebry a geometrie. Stačí se při tom omezit na kladná čísla, neboť záporná dostaneme obvyklým postupem. Tedy (kladným) iracionálním číslem nazýváme každý nekonečný neperiodický desetinný zlomek tvaru

$$\alpha = a, a_1 a_2 a_3 \dots a_n \dots$$

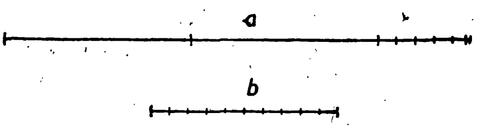
Podobně jako $\sqrt{2}$ i ostatní odmocniny, které nelze vyjádřit celými čísly, jako $\sqrt{5}$, $\sqrt{6}$, ... vedou k takovým číslům. Bylo by však nesprávné domnívat se, že iracionální čísla vznikají jen odmocňováním. Nekonečný neperiodický desetinný zlomek, sestavený podle libovolného pravidla, např. 0,12112111211112 ... je iracionálním číslem bez ohledu na to, zda vyjadřuje hodnotu nějake odmocniny, nebo ne.

Tento fakt je třeba zvláště zdůraznit proto, že zmatený výklad této otázky v učebnici vyvolal v celých generacích žáků nesprávné představy o této otázce. V souvislosti s tím si vzpomínám na jednu příhodu. Jednou jsem na přednášce z matematické analysy dokázal iracionalitu čísla e; o přestávce se na mne obrátila početná skupina posluchačů s dotazem: odmocninou kterého čísla je číslo e? Takové měli představy o iracionálních číslech ze škol.

Uvažujeme-li čísla racionální i iracionální, dostaneme obor reálných čísel. Pojem reálných čísel tedy zahrnuje pojmy racionálních i iracionálních čísel.

8. Zaveďme nyní pojem poměru délek dvou úseček a a b, jsou-li tyto úsečky nesouměřitelné (obr. 2).

Začneme přikládat úsečku b k úsečce a; vejde se tam např. $a$krát s jistým zbytkem. Rozdělíme-li úsečku b na 10 stejných dílů, můžeme tuto $\frac{1}{10}$ úsečky b přikládat k tomuto zbytku. Jelikož tento zbytek je menší než b jedna desetina úsečky b se vejde do tohoto zbytku $a_1$krát, kde $a_1 < 10$, opět s jistým zbytkem. V tomto novém zbytku je $\frac{1}{100}$ úsečky b obsažena $a_2$krát, kde $a_2 < 10$ atd. Můžeme si myslet, že tento proces bude neustále pokračovat; zbytky vždy vzniknou, neboť v opačném případě by obě úsečky byly souměřitelné.



Obr. 2.

Dostaneme tak nekonečný desetinný zlomek $\alpha = a, a_1 a_2 a_3 \dots$, který je poměrem délek úsečky a a b (nebo délkou úsečky a, považujeme-li úsečku b za délkovou jednotku). Tak v případě vyobrazeném na obr. 2 je $\alpha = 2{,}52 \dots$

Jsou-li úsečky a a b nesouměřitelné nemůže být zlomek α periodický a vyjadřuje tedy iracionální číslo. Nyní, když jsme již zavedli iracionální čísla, mají

[8]) Nepokládám za nutné v tomto výkladu každé tvrzení dokazovat; v mnoha případech se stejně budeme muset spokojit výkladem místo důkazu.

všechny úsečky délku, ať volíme jakoukoli jednotku délky; tato délka bude racionálním číslem jen tehdy, je-li úsečka souměřitelná s jednotkou, bude-li nesouměřitelná, bude vyjádřena číslem iracionálním.

Zvolíme-li orientovanou přímku (osu), zvolíme-li dále bod O jako počátek, pak libovolnému bodu A této přímky bude odpovídat číslo x — délka úsečky OA se znaménkem $+$ nebo $-$ podle toho, zda tato úsečka je orientována shodně s osou nebo opačně. Obrácené tvrzení, že každému reálnému číslu odpovídá v uvedeném slova smyslu jistý bod A, je zpravidla přijímáno (v této nebo nějaké ekvivalentní formě) za základní vlastnost přímky, vyjadřující její „spojitost".

Tato korespondence mezi body přímky a reálnými čísly má významnou úlohu při utváření představ žáků o reálných (ve zvláštním případě irracionálních) číslech. Je dobře žákům doporučit, aby si představili, jak by vypadala přímka, kdybychom na ní nechali jen „racionální" body, tj. takové jejichž vzdálenost od počátku je vyjádřena racionálním číslem. „Mezery" v obvyklém slova smyslu by na ní nebyly; „racionální" body jsou na přímce rozloženy hustě a na libovolném intervalu jich je nekonečně mnoho. Všude by však byly „bodové díry"; byl by např. vynechán bod, který dostaneme, když od počátku naneseme úsečku, jejíž délka je rovna délce úhlopříčky čtverce o straně, měřící jednu délkovou jednotku.

9. Každý periodický zlomek je možno, jak známo, napsat jako nekonečný periodický desetinný zlomek $a,a_1a_2a_3 \ldots a_n \ldots$

Vynecháme-li od jistého místa počínaje všechny další číslice dostaneme rostoucí posloupnost desetinných zlomků, jejíž každý člen je menší než zlomek:

$$A_1 = a,a_1; \quad A_2 = a,a_1a_2; \ldots; A_n = a,a_1a_2 \ldots a_n; \ldots \left(A_n < \frac{p}{q}\right).$$

Jestliže ke každé této přibližné hodnotě přičteme jednotku na posledním desetinném místě, dostaneme klesající posloupnost přibližných hodnot větších, než je daný zlomek:

$$A_1' = a,a_1 + \tfrac{1}{10}\,; \; A_2 = a,a_1a_2 + \tfrac{1}{100}\,; \ldots; A_n' = a,a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n}\,; A_n' > \frac{p}{q}.$$

Rozšiřme tento způsob konstrukce přibližných hodnot na libovolná *iracionální* čísla $a,a_1a_2 \ldots a_n \ldots$

Budeme požadovat, aby (pro libovolná $n = 1, 2, 3, \ldots$) bylo:

$$A_n = a,a_1a_2 \ldots a_n < \alpha < A_n' = a,a_1a_2 \ldots a_n + \frac{1}{10^n},$$

takže čísla A_n a A_n' budou desetinnými aproximacemi čísla α, první z nich dolní aproximací a druhé — horní aproximací.

Např. pro iracionální číslo 0,12112111211112 ... dostaneme tyto posloupnosti přibližných hodnot:

$$\begin{array}{lllll} A_1 = 0{,}1; & A_2 = 0{,}12; & A_3 = 0{,}121; & A_4 = 0{,}1211; & A_5 = 0{,}12112; \ldots \\ A_1' = 0{,}2; & A_2' = 0{,}13; & A_4' = 0{,}122; & A_4' = 0{,}1212; & A_5' = 0{,}12113; \ldots \end{array}$$

Žáci v tom snadno poznají zobecnění přibližného výpočtu druhých odmocnin.

Zdůraznil jsem slova „budeme požadovat", protože dosud neumíme srovnávat nová čísla se starými co do velikosti a vyslovená *úmluva* je prvním krokem k řešení této otázky.

V obecném případě provádíme srovnání dvou *reálných* čísel co do jejich velikosti (alespoň jedno z nich je iracionální) jednoduše: nechť

$$\alpha = a,a_1a_2 \dots a_n \dots \quad \text{a} \quad \beta = b,b_1b_2 \dots b_n \dots;$$

klademe $\alpha > \beta$, jestliže $a > b$, nebo je-li $a = b$, ale $a_1 > b_1$ nebo je-li $a = b$ a $a_1 = b_1$, ale $a_2 > b_2$ atd. Např. pro dvě čísla $\sqrt{10} = 3{,}16\dots$ a $\pi = 3{,}14\dots$ platí $\sqrt{10} > \pi$. Toto pravidlo platí zřejmě i pro čísla racionální, avšak s jednou výjimkou. Je známo, že každé racionální číslo, které je dáno konečným desetinným zlomkem, může být dvojím způsobem zapsáno ve tvaru nekonečného desetinného zlomku např. takto:

$$0{,}257 = 0{,}257000\dots \quad \text{nebo} \quad 0{,}257 = 0{,}256999\dots$$

K takovým dvěma zápisům téhož čísla nemůžeme našeho pravidla použít.

10. Obor reálných čísel je tedy konstruován a umíme dokonce v tomto oboru porovnávat čísla podle jejich velikosti. Aby však nová čísla byla skutečně *čísly*, musíme ještě zavést pojem aritmetických operací pro tato (i stará) čísla. Žáci si tuto otázku nutně položí; odložit odpověď na tuto otázku až do opakování látky a zde se omezit jen na konstatování, že aritmetické operace lze definovat a mají obvyklé vlastnosti — to je věc pedagogického taktu.

Sotva je možné udělat mnoho v této otázce na střední škole, avšak dát žákům jistou *představu* o těchto otázkách je nezbytné.

Omezme se na sečítání a násobení kladných reálných čísel.

Začněme součtem dvou *racionálních* čísel, která uvedeme ve tvaru nekonečných (periodických) desetinných zlomků:

$$\frac{p}{q} = a,a_1a_2 \dots a_n \dots; \quad \frac{r}{s} = b,b_1b_2 \dots b_n \dots$$

Uvažujeme-li jejich přibližné hodnoty A_n, A'_n a B_n, B'_n, dostaneme z nerovností

$$A_n < \frac{p}{q} < A'_n, \quad B_n < \frac{r}{s} < B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots)$$

sečtením:

$$A_n + B_n < \frac{p}{q} + \frac{r}{s} < A'_n + B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Součet dvou racionálních čísel je uvnitř intervalu, který vymezuje libovolná dolní a horní aproximace těchto racionálních čísel. Kromě toho tento součet je zřejmě jediným číslem s touto vlastností.

Tato poznámka ukazuje, že je přirozené přistoupit podobně k definici součtu dvou reálných čísel (včetně iracionálních):

$$\alpha = a,a_1a_2 \dots a_n \dots; \quad \beta = b,b_1b_2 \dots b_n \dots$$

Sečítejme sobě odpovídající aproximace těchto čísel desetinnými zlomky podobně, jako jsme to dělali u čísel racionálních; dostaneme:

$$A_n + B_n, \quad A'_n + B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Lze dokázat, že *vždy existuje právě jedno reálné číslo* $\gamma = c,c_1c_2 \dots c_n \dots$, *které leží mezi těmito součty*:

$$A_n + B_n < \gamma < A'_n + B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

Toto číslo γ nazýváme součtem čísel α a β:

$$\gamma = \alpha + \beta$$

Ukažme to na příkladě. Uvažujme součet $\sqrt{2}$ a $\sqrt{3}$:

Jelikož $\sqrt{2} = 1{,}4142135\ldots$ a $\sqrt{3} = 1{,}7320508\ldots$, bude posloupnost součtů desetinných aproximací:

$$\begin{cases} 1{,}4 + 1{,}7 = 3{,}1 \\ 1{,}5 + 1{,}8 = 3{,}3 \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}41 + 1{,}73 = 3{,}14 \\ 1{,}42 + 1{,}74 = 3{,}16 \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}414 + 1{,}732 = 3{,}146 \\ 1{,}415 + 1{,}733 = 3{,}148 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}4142 + 1{,}7320 = 3{,}1462 \\ 1{,}4143 + 1{,}7321 = 3{,}1464 \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}41421 + 1{,}73205 = 3{,}14626 \\ 1{,}41422 + 1{,}73206 = 3{,}14628 \end{cases}$$

. . . .

První výpočet ukazuje, že hledaný součet γ je mezi čísly 3,1 a 3,3 a tedy jeho celá část je 3; v dalším kroku je stanovena číslice na prvním desetinném místě: 1. Tak postupně jsou určovány číslice na dalších desetinných místech nekonečného desetinného zlomku $\gamma = 3{,}1462\ldots$, který je podle definice součtem dvou odmocnin $\sqrt{2} + \sqrt{3}$.

Toto jednoduché cvičení nic nedokazuje, ale nesporně velmi pomůže žákům v tom, aby se přesvědčili, že číslo γ, o kterém se mluví v definici součtu, skutečně existuje a je jediné.

Je třeba ovšem poznamenat, že takové postupné splývání desetinných míst v součtech $A_n + B_n$ a $A'_n + B'_n$, kterým jsou určována desetinná místa čísla γ, nenastává vždy. Výjimečný je případ kdy číslo γ je celým číslem nebo konečným desetinným zlomkem, který může být zapsán dvěma způsoby. Tak např. při sčítání dvou čísel $\alpha = 0{,}121121112\ldots$ a $\beta = 0{,}878878887\ldots$ Sečteme-li dolní aproximace, dostaneme postupně:

$$0{,}9;\quad 0{,}99;\quad 0{,}999;\quad 0{,}9999;\quad \text{atd.}$$

součet horních aproximací dává:

$$1{,}1;\quad 1{,}01;\quad 1{,}001;\quad 0{,}0001;\quad \text{atd.}$$

Třebaže nesplývají postupně číslice na desetinných místech je jasné, že existuje jediné číslo, které je větší, než kterékoli číslo první posloupnosti a menší, než kterékoliv číslo druhé posloupnosti

$$0{,}9999\ldots = 1{,}000\ldots$$

To je součet obou čísel.

Zcela analogicky lze vykládat i otázku součinu čísel.

Zde přirozeně násobíme postupné aproximace

$$A_n \,.\, B_n\,,\quad A'_n \,.\, B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a součinem čísel α a β nazveme reálné číslo $\delta = d, d_1 d_2 \ldots d_n \ldots$ (které existuje a je jediné), *které leží mezi těmito součiny*:

$$A_n B_n < \delta < A'_n B'_n \quad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

a které označujeme $\delta = \alpha\beta$.

I v tomto případě je vhodné spokojit se objasněním věci na příkladě. „Znásobme“ ta čísla, která jsme právě sečítali; Postupné součiny aproximací budou:

$$\begin{cases} 1{,}4 \,.\, 1{,}7 = 2{,}38 \\ 1{,}5 \,.\, 1{,}8 = 2{,}70 \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}41 \,.\, 1{,}73 = 2{,}4393 \\ 1{,}42 \,.\, 1{,}74 = 2{,}4708 \end{cases} \quad \begin{cases} 1{,}414 \,.\, 1{,}732 = 2{,}449048 \\ 1{,}415 \,.\, 1{,}733 = 2{,}452195 \end{cases}$$

$$\begin{cases} 1{,}4142 \,.\, 1{,}7320 = 2{,}44939440 \\ 1{,}4143 \,.\, 1{,}7321 = 2{,}44970903 \text{ atd.} \end{cases}$$

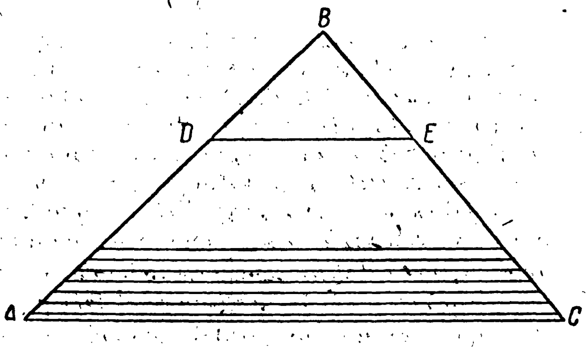
Číslo, které je mezi všemi takto utvořenými dvojicemi, zřejmě začíná číslicemi $\delta = 2{,}449\ldots$

Žáci vědí, že v součinu musíme dostat $\sqrt{6}$; jestliže tuto odmocninu nejprve vyčíslíme

$$\sqrt{6} = 2{,}449\ldots$$

shodnost výsledků bude velmi poučná. Kromě toho rovnice $\sqrt{2} \,.\, \sqrt{3} = \sqrt{6}$ (všechna tři čísla jsou iracionální) dostává smysl teprve tím, co bylo řečeno.

K násobení je možno připojit tytéž poznámky, které jsme připojili ke sčítání: postupné splývání desetinných míst nenastává tehdy, je-li součinem celé číslo nebo konečný desetinný zlomek.



Obr. 3.

Pro ilustraci tohoto výjimečného případu je možné nyní žákům vysvětlit, v jakém smyslu je číslo $\lambda = 1{,}4142135\ldots$, jehož číslice jsme dostali postupným vyčíslováním, skutečně přesnou hodnotou $\sqrt{2}$: vždyť dosud jsme nevěděli, co je čtvercem iracionálního čísla a nemohli jsme prověřit, že čtverec uvedeného čísla je skutečně roven dvěma.

Podle definice součinu reálných čísel (vezmeme-li v úvahu, že v daném případě jsou si oba součinitelé rovni) je třeba umocnit na druhou dolní a horní desetinné aproximace $\sqrt{2}$: výsledky jsou v řádcích (b a b′) na str. 26. Je jasné, že mezi dvojicemi čísel 1,96 a 2,25; 1,9881 a 2,0164; 1,999396 a 2,002225 1,99996164 a 2,00024449 atd. leží právě číslo $1{,}999\ldots = 2{,}00\ldots$ Číslo 2 je tedy čtvercem čísla λ a λ je tedy „přesnou" hodnotou $\sqrt{2}$.

Vše zde směřuje pouze k tomu, aby žáci pochopili nová čísla jako „skutečná" čísla, pro které lze definovat nerovnosti a početní výkony.

O zachování obvyklých vlastností aritmetických operací se stačí pouze zmínit.

11. Pojem iracionálního čísla, který si žáci osvojili, může být a má být použit v geometrii. „Případ nesouměřitelných úseček" by neměl mít roli balastu, který je ochotně vypouštěn z osnov při prvním nedostatku času. Stačí při prvním setkání s nesouměřitelností úseček vysvětlit žákům podstatu věci, aby bylo později možno pouze se odvolat na analogii s důkazem, který byl alespoň jednou doveden do konce.

Zastavme se u známé věty: přímka, rovnoběžná s některou stranou trojúhelníka, vytváří trojúhelník podobný danému. Nechť je dán trojúhelník ABC a jeho příčka DE, rovnoběžná se stranou AC (obr. 3). Dokažme, že platí

$$\frac{AB}{DB} = \frac{CB}{EB} .$$

Případ souměřitelnosti úseček AB a DB (v tomto případě jsou souměřitelné i úsečky CB a EB) snadno vyšetříme poukazem na známou větu o úměrnosti úseček, vyťatých rovnoběžkami na paprscích svazku. Oba podíly jsou zde rovny racionálnímu číslu.

Nechť nyní úsečky AB a DB (a tedy i úsečka CB a EB) jsou nesouměřitelné. Víme již, že v tomto případě jsou oba poměry vyjádřeny iracionálním číslem, tj. nekonečným neperiodickým desetinným zlomkem a máme dokázat, že oba tyto zlomky jsou stejné.

Použijeme k určení poměrů $\frac{AB}{DB}$ proces, použitý v odst. 8. Nechť DB je obsažena v úsečce AB $a$krát se zbytkem menším než DB (na obrázku $a = 2$). Vedeme-li dělicími body rovnoběžky se stranou AC vidíme, že i úsečka EB se vejde dvakrát na úsečku CB. Tedy celé části obou poměrů jsou stejné. Rozdělme nyní úsečku DB na 10 stejných dílů a jednu desetinu úsečky DB přikládejme ke zbytku; nechť se sem vejde $a_1$krát s novým zbytkem, menším než jedna desetina úsečky DB (na obrázku je $a_1 = 6$). Vedeme-li opět rovnoběžky, zjistíme, že i jedna desetina úsečky EB se vejde $a_1$krát do zbytku na úsečce CB. Tedy i cifry na prvním desetinném místě obou poměrů jsou stejné.

Pokračujeme-li takto dále, přesvědčíme se, *že skutečně oba poměry jsou vyjádřeny tímtéž nekonečným desetinným zlomkem* (2,6 ...), což jsme měli dokázat[9]).

12. Není správné ani později nevyužívat možnosti připomenout žákům iracionální čísla. Zejména musí být zdůrazněna iracionálnost čísla π.

Když je v 9. třídě formulován pojem limity posloupnosti, je správné se vrátit k iracionálnímu číslu, k jeho dolní a horní aproximaci A_n a A'_n ($n = 1, 2, 3, \ldots$). Jelikož $0 < \alpha - A_n < \frac{1}{10^n}$ a $0 < A'_n - \alpha < \frac{1}{10^n}$, je zřejmě

$$\alpha = \lim_{n\to\infty} A_n = \lim_{n\to\infty} A'_n .$$

Iracionální číslo je tedy limitou své dolní resp. horní aproximace.

Např. $\sqrt{2}$ je limitou posloupnosti 1; 1,4; 1,414; 1,4142. ..., a π limitou posloupnosti: 3; 3,1; 3,14; 3,141; 3,1415; ... atd.

Tato zmínka je nejenom ilustrací pojmu limity na řadě nových příkladů, ale současně novým způsobem osvětluje zavedení iracionálních čísel pomocí jejich aproximací desetinnými zlomky.

Také výsledky aritmetických operací s iracionálními čísly jsou limitami, ke kterým se blíží výsledky analogických operací s racionálními aproximacemi těchto čísel, např. (používáme označení odst. 10):

$$\alpha + \beta = \lim_{n\to\infty} (A_n + B_n) , \quad \alpha\beta = \lim_{n\to\infty} (A_n . B_n) . \qquad (*)$$

Rádi bychom varovali učitele před jednou dosti rozšířenou chybou. Byly činěny pokusy *definovat* pojem iracionálního čísla pomocí limity: „iracio-

[9]) Poznamenávám, že v posledních vydáních Kiselovovy učebnice je používáno stejného postupu, jako zde.

nálním číslem *nazýváme* limitu posloupnosti racionálních čísel ...". Ve skutečnosti slovo „limita" zde nic neobjasňuje, neboť limitou nazýváme právě číslo (mající jisté vlastnosti). Dostáváme tak logický kruh: vždyť čísla ještě nemáme, ještě jsme je nevytvořili žádnou přesnou definicí. Tedy pomocí limity iracionální číslo definovat nelze, třebaže vyšetřovat iracionální čísla jako limity je nesporně užitečné (potom, když jsme je definovali jinou cestou).

Definice výsledků operací s iracionálními čísly použitím pojmu limitního přechodu je logicky přípustná; je možné např. definovat součet a součin čísel α a β rovnicemi (*). (Existenci těchto limit by bylo třeba samozřejmě nejprve dokázat.) Definice odst. 10 se nám však zdají prostší, tyto je možné snáze osvětlit na příkladech.

Mocnina c^α s iracionálním exponentem se zpravidla definuje právě pomocí limity: $c^\alpha = \lim\limits_{n\to\infty} c^{A_n}$. I v tomto případě bych však dal přednost definici ve smyslu odst. 10.

Logaritmy přirozených čísel, trigonometrické funkce úhlů (vyjádřených celistvým počtem stupňů, minut a vteřin), jejich logaritmy jsou — až na řídké výjimky — *iracionální čísla.* Tento fakt je třeba žákům vštípit: žáci — obklopeni všude racionálními čísly — to zpravidla netuší a domnívají se, že iracionální čísla jsou řídkými výjimkami.

Při praktickém počítání se žáci setkávají sice jen s přibližnými racionálními hodnotami iracionálních čísel, avšak ve vzorcích

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

nebo

$$\sin(a + b) = \sin a \,.\, \cos b + \cos a \,.\, \sin b$$

přece hodnoty funkcí sin a log jsou přesnými hodnotami a ne jejich racionální přiblížení; iracionálním číslům se tedy nelze vyhnout.

Myslím, že z toho, co bylo vyloženo výše, je čtenáři jasný můj přístup k výkladu iracionálních čísel na střední škole. Není zde místa pro žádnou „teorii" iracionálních čísel (opakuji to ještě jednou). Formalisaci pojmu iracionálního čísla žáci na střední škole nepotřebují a kromě toho jejich mentální rozvoj není takového stupně, aby mohli být přivedeni ke zvládnutí této teorie. Pochopit v čem je podstata otázky však žáci mohou i bez formální teorie (s přesným provedením všech důkazů) dodržíme-li dvě podmínky:

důkazy provádíme tehdy, jestli skutečně přinášejí nové poznatky (např. v bodech 4, 5) a

iracionální čísla nenecháme bez souvislosti s ostatním učivem, ale budeme je připomínat a používat v dalším výkladu a ukážeme co nejvíce dalších souvislostí.

Přeložil Jiří Gregor