POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IV — ČÍSLO 1

MATEMATIKA

O NĚKTERÝCH ÚLOHÁCH TEORIE PRAVDĚPODOBNOSTI*)

B. V. Gněděnko

Je velmi obtížné podat v současné době přehled ústředních problémů, které jsou před matematikou, v celé její šíři nebo i jen před kterýmkoli jejím odvětvím. Předně se matematika natolik rozrostla, že většina pracovníků je s to soustředit svůj zájem pouze na malou část nejdůležitějších směrů jejího rozvoje. V důsledku toho vedou osobní záliby toho kterého vědce nutně k zveličování důležitosti úloh, kterými se obírá, v rámci celkového vývoje vědy. Za druhé se matematika rozvíjí tak rychle a je přitom tak úzce spjata se zdokonalováním techniky a pokrokem jiných vědních oborů, že velmi pochybuji o možnosti stanovit jakoukoli dlouhodobou předpověď o směru jejího rozvoje a tím i o možnosti stanovit význam těch či oněch formulací problémů, resp. o možnosti určit prioritu při získání těch či oněch výsledků. Současně však jsem přesvědčen, že je třeba systematicky zpracovávat přehledné stati, které by obsahovaly nejen vylíčení stavu té či oné matematické disciplíny nebo jejího odvětví, ale i formulace problémů, které jsou z některých důvodů důležité. Takové přehledné práce mají zvlášť velký význam pro mladé matematiky, neboť z nich lze čerpat poučení o zvláštních výhledech jednotlivých směrů bádání v matematice.

Asi v roce 1944 přednesl A. N. Kolmogorov na zasedání Moskevské matematické společnosti velmi zajímavý referát o základních problémech teorie pravděpodobnosti. Tento referát nebyl otištěn. Bohužel jsem si tehdy nedělal žádné poznámky a proto nemohu použít jeho obecných formulací problémů, o kterých mluvil. V tomto článku připomenu z nich pouze jeden problém, který byl v posledních letech předmětem velkého počtu studií. V poměrně nedávno publikované práci vynikajícího švédského matematika H. Craméra [1] je formulován značný počet zajímavých konkrétních úloh. Mohu jen doporučit všem účastníkům konference, aby se s touto prací seznámili. Před čtyřmi lety jsem přednesl na všesvazové konferenci o teorii pravděpodobnosti a matematické statistice referát o některých nevyřešených úlohách, které souvisí se studiem součtů nezávislých náhodných veličin a součtů veličin, které tvoří Markovův řetězec [2]. Přibližně v téže době vyšel pozoruhodný přehledný článek A. N. Kolmogorova [3], který se rovněž zabýval problematikou součtů nezávislých náhodných veličin.

Současná teorie pravděpodobnosti je jedním z nejrychleji se rozvíjejících odvětví matematiky, zvláště proto, že je úzce spjata s nejrůznějšími praktickými aplikacemi ve fysice, chemii, biologii, vojenské vědě, technice. Teorie

*) Б. В. Гнеденко, О некоторых задачах теории вероятностей. Ukrainskij matěmatičeskij žurnal, sv. IX, č. 4, 1957.

pravděpodobnosti zaujala pozornost mnoha významných vědců a můžeme pozorovat, že do ní přicházejí nové myšlenky. Z tohoto důvodu se nebudu ve svém referátě zmiňovat o všech směrech, které se v dnešní době rozvíjejí v teorii pravděpodobnosti, byť by měly velkou budoucnost. Nebudu se téměř zmiňovat o bádáních prostředky teorie pravděpodobnosti v současné fysice, mechanice a technice. Tato problematika by musela být předmětem několika speciálních přednášek.

1. Klasická problematika

Klasická problematika se týká limitních zákonů pro součty rostoucího počtu nezávislých náhodných veličin, z nichž každá jednotlivě působí na součet v jistém smyslu nepodstatným vlivem. Velký rozvoj v tomto směru nastal v třicátých letech na základě prací Čebyševových, Markovových a Ljapunovových. V této době byla podána vyčerpávající řešení řady úloh, které byly předtím pokládány pro teorii pravděpodobnosti za základní. Tehdy se podařilo vymezit vyčerpávajícím způsobem třídu limitních rozdělení, k nimž mohou konvergovat distribuční funkce součtů a též stanovit podmínky jak pro existenci těchto limitních rozdělení, tak i podmínky konvergence ke každému z nich. Svého času se zdálo, že tato kapitola teorie pravděpodobnosti je v základech dobudována a že ji bude třeba doplňovat pouze některými novými podrobnostmi. Avšak práce posledních let ukázaly, že tento názor je chybný a že teorie sečítání náhodných veličin v sobě skrývá ještě řadu důležitých a nečekaných výsledků. Tak např. lokální limitní teorémy, které byly dokázány právě v posledních letech, poskytly A. Ja. Chinčinovi matematické prostředky k výkladu jak klasické, tak i kvantové statistické mechaniky. Dále se podařilo objevit zajímavé vztahy mezi limitními rozděleními součtů náhodných veličin a limitními rozděleními členů variační řady. Nakonec byla v zcela poslední době dokázána obecná věta ukazující, že součty libovolných nezávislých náhodných sčítanců konvergují k neomezeně dělitelným náhodným veličinám sestrojeným odpovídajícím způsobem.

Mezi mnoha důležitými problémy z teorie součtů nezávislých náhodných veličin bych chtěl uvést především tyto:

Dosud neexistují přesné odhady rychlosti konvergence distribučních funkcí součtů k limitním rozdělením, ani rychlosti, se kterou se blíží k příslušným doprovodním neomezeně dělitelným rozdělením.

Studium lokálních limitních teorémů pro sčítance s různým rozdělením nebude ještě dlouho ukončeno.

Teorie limitních vět pro součty nezávislých sčítanců zaslouží dalšího rozšíření na složitější případy. V prvé řadě bylo by ji třeba rozšířit na náhodné veličiny, které nabývají svých hodnot z komutativní grupy.

Přirozeně, že formulace problémů pro součty nezávislých sčítanců mohou být východiskem k vybudování příslušných teorií pro součty různým způsobem závislých veličin.

2. Pravděpodobnostní metody v teorii čísel

Axiomatické vybudování teorie pravděpodobnosti umožnilo rozšířit její výsledky a metody i na taková odvětví matematiky, která na prvý pohled s teorií pravděpodobnosti absolutně nesouvisí. Podstatou všech takových aplikací je ta okolnost, že každá abstraktní věda připouští řadu nejrůznějších konkrétních realisací. Jedním z takových mnohoslibných směrů pro aplikace výsledků a metod teorie pravděpodobnosti je teorie čísel. Je známo, že již Gaussovi se v tomto směru podařilo vyslovit první výsledek. Šlo o rozdělení zbytku řetězového zlomku, ve který se rozkládají čísla z intervalu (0,1), když zanedbáme prvých n prvků rozkladu. Podle Gausse konverguje toto rozdělení při $n \to \infty$ k funkci

$$P(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ pro } x \leqq 0 , \\ \dfrac{\ln (1 + x)}{\ln 2} & , \text{ pro } 0 < x \leqq 1 , \\ 1 & , \text{ pro } x > 1 . \end{cases}$$

Je známo, že teprve v roce 1928 podal R. O. Kuzmin jako první přesný důkaz tohoto tvrzení a za několik let později je dokázal P. Lévy pomocí jiné metody založené na teorii Markovových řetězců. Později použili Gaussovy úlohy A. Ja. Chinčin a někteří jiní matematikové jako východiska k vybudování principiálně důležité a svými závěry zajímavé metrické teorie čísel.

Během druhé světové války a v poslední době bylo dosaženo značného úspěchu při zkoumání rozdělení prvočísel v posloupnosti přirozených čísel. Mnohé z objevených zákonitostí mají pravděpodobnostní charakter. Již dávno je známo, že rozdělíme-li přirozená čísla na skupiny po stech po sobě jdoucích čísel a v každé skupině zjistíme počet prvočísel, srovnává se toto rozdělení prvočísel ve stovkách dobře se schematem normálního rozdělení. Tato empirická skutečnost nejednou vedla k vyslovení zajímavých hypothetických vět. Na základě prací Hardyho, Turana, Lebesguea, Erdöse, Kace, Kubiljuse a jiných autorů existuje nyní v additivní teorii čísel dosti ucelený systém vět pravděpodobnostního charakteru. Přehled těchto výsledků je podán v práci I. P. Kubiljuse [4].

Zdá se mi, že práce uvedeného zaměření jsou dosud v počátcích a že jejich ukončení leží v budoucnosti. Na této cestě bude třeba odkrýt ještě mnoho faktů v teorii čísel. Tak např. I. P. Kubiljus dokázal, že v additivní teorii čísel se mohou jako limitní rozdělení vyskytovat pouze rozdělení třídy L. Není však známo, zda všechna rozdělení této třídy mohou vystupovat jako limitní rozdělení pro funkce v teorii čísel. Rovněž tak nevíme, zda stabilní rozdělení různá od normálního rozdělení mohou být limitními rozděleními pro kterékoli zajímavé úlohy z teorie čísel. Důležité by rovněž bylo systematicky prozkoumat konkrétní teoretické problémy z teorie čísel, které by vedly k limitním rozdělením odlišným od normálního. Také je třeba objasnit ony teoretické důsledky, které plynou pro teorii čísel ze známé věty A. Ja. Chinčina o zvláštní roli normálního rozdělení. Neméně je však možno očekávat i z opačného hlediska — totiž od využití přesných analytických prostředků, propracovaných v teorii čísel, při řešení úloh teorie pravděpodobnosti. Zejména použití myšlenek z teorie čísel může se setkat s úspěchem při důkazech a formulacích lokálních vět různých druhů a při hledání přesných odhadů rychlosti konvergence distribučních funkcí součtů k limitním rozdělením.

3. Teorie pravděpodobnosti a funkcionální analysa

Tím, že A. N. Kolmogorov [5] vybudoval axiomatiku teorie pravděpodobnosti, bylo umožněno přirozeně využít pojmů a myšlenek funkcionální analysy v teorii pravděpodobnosti. Z hlediska vyloženého Kolmogorovem není pak např. matematická naděje ničím jiným než abstraktním integrálem Lebesgueovým. Vlastně do poslední doby to bylo snad jediné obecné použití pojmu integrace ve funkcionálních prostorech.

Další využití elementárních pojmů funkcionální analysy v matematické statistice se datuje od roku 1928 a je spjato se jménem V. I. Glivenka. Problém odhadu distribuční funkce z výsledků nezávislých pozorování jej přivedla k zobecnění zákona velkých čísel na nezávislé sčítance, jejichž hodnoty jsou elementy lineárního (tedy současně funkcionálního) prostoru.

Je přirozené, že i rozvoj teorie stochastických procesů přivedl matematiky k použití myšlenek a výsledků funkcionální analysy. Podle našeho názoru obzvlášť velký význam pro vědecké bádání v tomto směru mají práce A. N. Kolmogorova z roku 1935 [6], a z roku 1940 [7]. V prvé z nich byl zaveden pojem charakteristického funkcionálu pro náhodné prvky z Hilbertova prostoru a jsou zde zkoumány některé jeho vlastnosti. V druhé práci bylo při vyšetřování extrapolace a interpolace stacionárních náhodných posloupností použito pojmů a metod geometrie křivek Hilbertova prostoru. Později tyto výsledky našly důležité výsledky v teorii servomechanismů.

Počínaje rokem 1944 vzbudil M. Fréchet [8] u řady mladých matematiků zájem o studium náhodných elementů v abstraktních metrických prostorech. Nejzajímavějších a nejplodnějších výsledků v tomto směru patrně dosáhli R. Fortet a E. Mourierová. Nutno však říci, že přes intensivní práci v uvedené oblasti zůstaly zde dosud nerozřešeny i některé nejelementárnější problémy. Např. není dosud uzavřen problém, jak na případ metrických prostorů zobecnit větu o jedno — jednoznačném přiřazení mezi funkcemi rozdělení a funkcemi charakteristickými, kterážto věta je dobře známa pro prostory o konečném počtu rozměrů.

Podstatný impuls k získání obecných vět dal jeden výsledek Donskerovy práce [9], pojednávající o konvergenci funkcionálů posloupnosti součtů nezávislých náhodných veličin k funkcionálu Wienerova náhodného procesu. Tuto větu ozřejmíme zde raději na základě práce Ju. V. Prochorova [10], jelikož zde jasně vystupuje geometrická interpretace řešeného problému.

Mějme posloupnost serií náhodných veličin $\xi_{n1}, \xi_{n2}, \dots, \xi_{nk_n}$ nezávislých v každé serii a splňujících podmínku limitní zanedbatelnosti, tj. po každé $\varepsilon > 0$

$$\max_{1 \leq k \leq k_n} P\{|\xi_{nk}| > \varepsilon\} \to 0\,, \quad (n \to \infty)$$

a podmínky

$$M\xi_{nk} = 0\,, \quad b_{nk} = D\xi_{nk} > 0\,, \quad \sum_{k=1}^{k_n} b_{nk} = 1\,.$$

Položme

$$\zeta_{n0} = 0\,,\ \zeta_{nk} = \xi_{n1} + \xi_{n2} + \dots + \xi_{nk}\,,\ 1 \leqq k \leqq k_n\,,\ t_{nk} = D\zeta_{nk}$$

a sestrojme náhodnou lomenou čáru $\zeta_n(t)$ s vrcholy v bodech (t_{nk}, ζ_{nk}). Nechť P_n označuje rozdělení jí odpovídající. Nechť dále W označuje wienerovské rozdělení definované těmito podmínkami:

1. pro libovolná, pevná $t_1, t_2, \dots, t_s$ $(0 \leqq t_1 < t_2 < \dots < t_s \leqq 1)$ jsou náhodné veličiny

$$\xi(t_2) - \xi(t_1)\,,\ \ \xi(t_3) - \xi(t_2), \dots, \xi(t_s) - \xi(t_{s-1})$$

vzájemně nezávislé;

2. diference $\zeta(t_k) - \zeta(t_{k-1})$ mají normální rozdělení se střední hodnotou 0 a rozptylem rovným $t_k - t_{k-1}$;

3. s pravděpodobností 1 platí $\zeta(0) = 0$.

Za těchto podmínek pro konvergenci rozdělení P_n k W je nutné a stačí, aby byla splněna podmínka Lindbergova: pro každé $\lambda > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|>\lambda} x^2 \, dF_{nk}(x) = 0 .$$

Za vyslovených podmínek možno tvrdit, že je-li V nějaký funkcionál, platí tato konvergence: pro $n \to \infty$

$$P\{V(\zeta_n(t)) < x\} \to P\{V(\zeta(t)) < x\} .$$

Poslední uvedená věta, nazvaná „principem invariantnosti“, byla předmětem studia I. I. Gichmana (pro případ markovských náhodných procesů) a A. V. Skorochoda. A. V. Skorochod a J. V. Prochorov zobecnili právě uvedenou větu nejen na případ normálního limitního rozdělení, ale i na případy limitních rozdělení libovolných. Při důkazu těchto výsledků aplikoval Prochorov velmi účinnou metodu — zkoumání podmínek kompaktnosti tříd distribučních funkcí v různých funkcionálních prostorech.

Nutno uvést, že myšlenky obsažené ve větách právě popsaného typu byly vyloženy již v dříve uvedené Kolmogorovově přednášce.

Důležitý směr bádání započatých před několika lety W. Fellerem [11] a rozvinutých v Sovětském Svazu E. B. Dynkinem [12], se týká širokého využití teorie semigrup v teorii Markovových procesů.

4. Teorie informací

Jedním z největších úspěchů vědy v posledním desetiletí je bezpochyby vytvoření nové oblasti bádání, která je všeobecně známa pod názvem teorie informací. Tato teorie vznikla při řešení problémů týkajících se přenosu zpráv telefonem, telegrafem, televisí apod. Současně se objevily problémy podobného druhu ve fysiologii i v samé matematice. Zde nutno především připomenout problémy formulované matematickou statistikou. S pracemi R. A. Fishera se před matematickou statistikou objevil problém odhadu množství informací využitého výzkumníkem při použití toho neb onoho statistického kriteria, z celkového množství informace, které nám poskytuje posloupnost napozorovaných hodnot. Ve sdělovací technice je třeba posoudit kvalitu kanálů a různých metod přenosu zpráv podle onoho množství informací, které je možno přenést za stejnou časovou dobu.

Rozvoj teorie informací, její formování ve vědeckou disciplinu je úspěchem posledních devíti let a je úzce spojeno se jménem C. Shannona. Shannon zavedl pojem entropie, množství informací, rychlosti přenosu zpráv a dokázal věty tvořící základy této teorie.

Shannovy objevy nesou prvek jisté překvapivosti charakteristický pro každý významný objev. Především se ukázalo, že pro měření množství informací obsaženého v kvalitativně různých typech přenosu se dá použít se stejným úspěchem jedné a téže míry. Dále se ukázalo, že ve sdělovacích kanálech pracujících s chybami je možné přenášet informace s dostatečně malou pravděpodobností chyb bez podstatného snížení rychlosti přenosu.

Shannon propracoval teorii přenosu diskrétních signálů. V současné době je věnován velmi rozsáhlý okruh prací zpřesňování a dalšímu propracování této teorie. A. N. Kolmogorov a jeho žáci pracovali v posledních letech v těchto třech směrech:

1. vybudování teorie přenosu signálů libovolné povahy;
2. vybudování teorie přenosu spojitých signálů;
3. studium, zda je podstatný požadavek stacionarity a vybudování aspoň nárysu teorie přenosu nestacionárních signálů.

Teorie informací je jednou z nejdůležitějších oblastí současné teorie pravděpodobnosti a jejích aplikací. Bez této teorie je zejména nemožné všestranné studium procesu myšlení. Tento poslední okruh problémů souvisí s novou, rovněž v současné době se rodící nadějnou disciplinou — kybernetikou, kterou lze definovat jako vědu o způsobech přijímání, uchování, zpracování a využití informací ve strojích a živých bytostech.

5. Úlohy hromadné obsluhy

Velkou a důležitou kapitolu teorie pravděpodobnosti tvoří problémy spojené s otázkami tzv. hromadné obsluhy. Pro dostatečné objasnění problémů, které se zde řeší, rozebereme zde některé jednoduché příklady.

Je třeba vybudovat elektrárnu určenou k zásobování velkého počtu spotřebitelů: obráběcích strojů, různých strojních zařízení, nejrůznějších motorů atd., přičemž předpokládáme, že o každém známe množství spotřebovávané energie a průměrný pracovní režim. Je tedy třeba stanovit přibližnou nutnou kapacitu elektrárny. Existující metody výpočtu berou naprosto nedostatečně v úvahu náhodná zastavení práce agregátů, během kterých není energie odebírána. Jak je tato okolnost podstatná, to potvrzuje řada příkladů, kdy opomíjení této skutečnosti vedlo k velikému zvýšení vypočítávané kapacity elektrárny. Z praxe jsou známy případy, kdy kapacita vybudovaných elektráren byla fakticky využívána na pouhých 50—60 %. Ve světové literatuře existuje velký počet prací věnovaných této důležité problematice; na druhé straně je však nutno říci, že do vyhovujícího řešení uvedeného problému je ještě daleko.

Uveďme další příklad. Dělník obsluhuje několik obráběcích strojů. Jednotlivé obráběcí stroje jsou čas od času z některých náhodných příčin vyřazeny z provozu. Doba, kterou potřebuje dělník na spuštění stroje je rovněž závislá na náhodě. Vzniká otázka, jak velká je pravděpodobnost, že se zastaví jeden nebo několik obráběcích strojů v době, kdy je dělník zaměstnán u některého z obráběcích strojů. Další, zcela přirozené a pro praxi důležité otázky lze formulovat asi takto: jak velký je průměrný prostoj obráběcích strojů způsobený okolností, že dělník obsluhuje ne jeden, ale několik obráběcích strojů a není tudíž s to současně spustit opět všechny stroje, zastaví-li se jich současně několik. Kolik obráběcích strojů je nejúčelnější svěřit jednomu dělníkovi při dané organisaci práce?

S podobnými a často daleko složitějšími problémy se setkáme i v mnohých jiných prakticky i teoreticky důležitých vědních oborech: v teorii spojů, při projektování přístavů a letišť, v oblasti železniční dopravy, v obchodě atd. Formulace otázek zde vznikajících nese s sebou mnohé specifické zvláštnosti a je proto účelné považovat je za samostatnou partii teorie pravděpodobnosti.

Současně však je nutno upozornit na to, že většina těchto problémů vede na Markovovy náhodné procesy diskrétního typu se spojitým časem. Mnoho problémů podobného charakteru se objevuje i v nukleární fysice.

Ve světové literatuře se objevuje dnes velký počet prací jak praktického tak teoretického charakteru věnovaných otázkám právě popsaného typu. Zcela zřejmě se rýsuje snaha nalézt v této různorodosti nejrozmanitějších úloh určitý řád a systém. Avšak podle našeho přesvědčení je předčasné mluvit o tom, že taková obecná teorie je pro řešení těchto problémů již vybudovaná. Pro první seznámení s tímto směrem bádání možno doporučit výbornou nevelkou monografii A. Ja. Chinčina [13]. Na závěr nutno podtrhnout, že toto odvětví teorie pravděpodobnosti si zaslouží intensivního rozvíjení jak ve směru řešení speciálních problémů, tak i ve směru budování obecné teorie.

6. Teorie pravděpodobnosti a numerické metody

Bouřlivý rozvoj numerické techniky výpočtové přináší pro teorii pravděpodobnosti řadu nových, významných problémů. Na jedné straně je lákavé a zároveň nutné propracovávat a rozvíjet nejrůznější stroje a přístroje pro řešení statistických úloh — na druhé straně pak je nutné formulovat a řešit v teorii pravděpodobnosti problémy, které úzce souvisí s procesy při výpočtech hromadného charakteru.

Předpokládejme na příklad, že máme řešit systém lineárních algebraických rovnic. Jestliže hodnoty koeficientů v těchto rovnicích jsou získávány z pokusů, mohou tyto hodnoty být zjištěny jen s určitou chybou mající náhodný charakter. Podobná situace se však naskýtá nejen v případě rovnic algebraických, ale i v rovnicích libovolného druhu, v rovnicích diferenciálních, integrálních atd. Není nutno dlouho zdůvodňovat, že vybudování příslušné teorie pro řešení rovnic vycházející z předpokladu, že koeficienty v rovnicích jsou hodnoty náhodných veličin, je předmětem velkého zájmu jak teoretiků, tak i praktiků.

Provádění výpočtů přináší i problém jiného typu (při jeho formulaci se znovu omezíme na případ systému algebraických rovnic). Koeficienty rovnic přicházejí do stroje pouze s určitou přesností a v procesu výpočtů se každý krok rovněž realisuje s určitou, fixovanou přesností. Vzniká přirozená otázka: Jak se projeví na konečném výsledku toto velké množství zaokrouhlovacích zásahů prováděných v procesu výpočtu?

Při navrhování počítacích strojů by bylo účelné znát statistiku o charakteru problémů, které stroje již řeší a které by stroje řešit mohly. Bylo by důležité zabývat se statistikou stability jednotlivých prvků a dílů ve strojích a při synthese schemat brát potom tyto informace v úvahu. Aparátu teorie pravděpodobnosti možno rovněž úspěšně využít při navrhování spolehlivě pracujících mechanismů, sestavených ze součástí ne dost spolehlivě pracujících.

7. Metoda Monte-Carlo

Funkcionálních rovnic při řešení řady problémů v teorii pravděpodobnosti bylo používáno již velmi brzy poté, kdy byl vůbec formulován sám pojem pravděpodobnosti. Tak již J. Bernoulli při řešení slavné úlohy o „ruinování hráče" převedl tento problém na řešení diferenční rovnice, které užíváme při výkladu této úlohy dodnes. Později při řešení různých problémů postupovali stejným způsobem Lagrange, Laplace a mnozí jiní matematici. V roce 1889 dokázal Raleigh, že výraz pro rozdělení částic pohybujících se náhodně podél přímky vyhovuje rovnici pro vedení tepla. Později tento problém tak zvané „náhodné procházky" v dvojrozměrném a třírozměrném prostoru vyšetřovali R. Courant, K. Fridrich, G. Lévy [14]. Autorům se podařilo převést problém nalézt rozdělení polohy bodu konajícího náhodnou procházku na řešení krajových úloh pro rovnice eliptického, hyperbolického a parabolického typu. Ve vyšetřování těchto problémů pak pokračovala řada dalších vědců.

Metoda Monte-Carlo vychází z opačné souvislosti: na jedné straně některé náhodné procesy vedou k řešení určitých diferenciálních, integrálních, integro-diferenciálních nebo algebraických rovnic, na druhé straně však možno nalézt přibližná řešení těchto rovnic experimentálním způsobem. Tato idea není v podstatě nová; již v XVII. a XVIII. století jí bylo využíváno k odhadu neznámé pravděpodobnosti nebo neznámé matematické naděje. Tak např. jsou dobře známy experimenty velké řady matematiků, kteří se pokoušeli pomocí házení jehly na nalinkovaný list papíru nalézt dostatečně přesnou hodnotu čísla π.

Při řešení té nebo oné funkcionální rovnice metodou Monte-Carlo konstruuje se náhodný proces, jehož některý funkcionál představuje řešení této rovnice. Tímto způsobem konstruujeme model v oboru teorie pravděpodobnosti pro určitý fysikální nebo matematický problém. Potom provedeme co největší počet pokusů a zmíněný funkcionál odhadneme pomocí získaných experimentálních výsledků.

Právě popsanou ideu ilustrujme na příkladě. Mějme vypočítat určitý integrál $\int_{\varepsilon} f(P)\,\mathrm{d}P$, kde $f(P)$ je nějaká funkce bodu P z prostoru, ve kterém integrujeme, a ε je množina, přes kterou integrujeme. Nechť bod Q je rovnoměrně rozdělen v ε, a m značí míru množiny ε; potom zřejmě platí rovnice

$$\int_{\varepsilon} f(P)\,\mathrm{d}P = mMf(Q)\,.$$

Jestliže hodnotu m známe, stačí pro přibližný výpočet hledaného integrálu odhadnout hodnotu $Mf(Q)$. Na základě zákona velkých čísel v Čebyševově tvaru to provedeme zcela jednoduše. Stačí, provedeme-li náhodný výběr N bodů z množiny ε. Nechť jsou to body $Q_1, Q_2, \ldots, Q_N$. Potom pravděpodobností blízkou jedné při dostatečně velkých N bude přibližně splněna rovnice

$$M(f)(Q) = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} f(Q_k)\,.$$

Je zřejmé, že tato rovnice poskytuje jednoduchou metodu pro přibližný odhad hodnoty integrálu.

Základní nedostatek metody Monte-Carlo spočívá v nutném provádění velkého počtu pokusů k získání výsledků s dostatečně dobrou přesností. Proto se dlouhou dobu mělo za to, že tato metoda je prakticky nepoužitelná. Avšak nyní, kdy elektronická technika umožňuje rychle provádět pokusy a automatické výpočty po nich následující, jsme přesvědčeni, že pro řešení mnohých problémů má metoda Monte-Carlo nepopiratelné přednosti před kterýmikoli jinými metodami klasickými. Tento závěr spočívá na těchto úvahách:

1. rychlost konvergence k řešení nezávisí na pracnosti úlohy, ale pouze na počtu pokusů;

2. co se týče výpočtové techniky je metoda velmi jednoduchá.

Je známo, že klasické metody řešení prostorových problémů vyžadují ohromného množství aritmetických výpočtů, jejichž rozsah vyrůstá s růstem počtu dimensí geometrickou řadou. Pro výpočet kontinuálních (funkcionálních) integrálů, které mají nyní ve fysice velmi důležité užití, se klasické metody vůbec nehodí, kdežto aplikace metod Monte-Carlo nepůsobí žádných potíží.

Z toho, co bylo řečeno, vyplývá závěr, že metoda Monte-Carlo má velikou budoucnost v moderní výpočtové technice a její rozvoj je jedním z nejdůležitějších problémů. Z řady úloh, které se mi zdají nejaktuálnějšími a nejzajímavějšími, je třeba uvést úlohu najít prostředky umožňující zrychlit konvergenci popisované metody. Mám na mysli toto: ve většině problémů v teorii pravděpodobnosti má konvergence empirických funkcí k teoretickým řád $\frac{1}{\sqrt{N}}$, kde N je počet pokusů. Problém spočívá v hledání takových modelů, na kterých by námi uvedená konvergence byla řádu daleko vyššího, řekněme $\frac{1}{N}$.

8. Teorie her

Může se zdát, že termín „teorie her“ nezní jako název vědecké disciplíny dosti seriosně a že může vyvolat velkou řadu nevědeckých asociací. Je však nutno si připomenout, že sama teorie pravděpodobnosti do jisté míry vděčí za svůj vznik úlohám, které pramenily z oblasti hazardních her. Dále je nutno mít na paměti, že hodnocení vědeckého směru musí vycházet ne tak z rozboru jeho názvu, jako spíše z rozboru formulace problémů, důsledků a spojitostí, které se v něm podařilo odvodit.

Co se týče teorie her, možno s plnou odpovědností tvrdit, že její důsledky a úlohy jí kladené daleko přesahují rámec vlastních hazardních her a že dosáhly řady významných aplikací.

Obecná formulace úloh v teorii her může být takováto: mějme nějaký náhodný proces. Je žádoucí, aby tento proces vedl k nějakému cíli. Za tím účelem je proces vystaven v určité časové okamžiky nějakému nenáhodnému působení. Je úkolem stanovit optimální strategii takových zásahů, při kterých průběh procesu bude pokud možno nejlépe vyhovovat požadavkům problému. Tyto požadavky mohou mít rozličný charakter. Tak si možno např. vytknout za cíl dosáhnout minimalisace odchylek reálného průběhu procesu od požadovaného (takto formulovaná úloha má význam např. pro automatické řízení letadel, pro potřeby automatické kontroly atd.). Pro jiné účely možno požadovat, aby pro danou hladinu velikosti odchylek byl počet zásahů do průběhu procesu minimální atd. Jestliže takto přistupujeme k věci, bylo by možno mluvit ne o teorii her, ale o teorii kontrolovaných procesů.

Teorii her je v současné době věnován velký počet originálních prací a monografií. Zvlášť podrobně jsou v nich zpracovávány hry dvou hráčů. Historie úlohy je taková: v 20tých letech podařilo se J. von Neumannovi dokázat existenci optimální strategie a tzv. určenost hry v případě konečného počtu možných strategií u každého hráče. Bylo rovněž dokázáno, že každá hra tohoto druhu se stává určenou v oboru smíšených strategií, jestliže každý z hráčů volí svoji strategii s určitou pravděpodobností tak, aby matematickou naději své výhry učinil velikou. V tehdejší době však teorie her nenašla žádných aplikací a v důsledku toho nezaznamenala žádoucího rozvoje. Avšak zájem o tuto teorii se znovu obnovil a v posledních letech znatelně vzrostl.

Z velkého množství problémů, které vznikají v rámci teorie her, bych se chtěl omezit jen na tyto dva:

1. Vybudování teorie her, je-li hráčů více než dva. Hry tohoto typu jsou daleko složitější než hry dvou hráčů, už jenom proto, že v případě více hráčů mohou jednotlivé jejich skupiny vytvářet koalice.

2. Vybudování analytického aparátu, pomocí kterého by bylo možno pro určitou konkretisaci hry efektivně určit optimální strategii.

9. Teorie rozhodovacích funkcí

Jeden ze základních směrů bádání v současné matematické statistice tvoří tzv. teorie statistického rozhodování, nebo jinak teorie rozhodovacích funkcí. Problém existence optimálního statistického rozhodování při postupném hromadění informace o průběhu sledovaného procesu převedl A. Wald [15] na příslušné zobecnění Neumannovy věty o hře dvou hráčů.

Důležitým problémem teorie rozhodovacích funkcí je rozvíjení analytického aparátu, který by umožnil efektivní sestrojení optimálních rozhodovacích funkcí. V souvislosti s tím se jeví nezbytným neustále propracovávat již zmíněnou teorii pro procesy se spojitým časem a dokázat příslušnou větu o invariantnosti, tj. větu, která řeší problém konvergence rozdělení funkcionálů optimálních rozhodnutí pro procesy s nespojitým časem k rozdělením funkcionálů optimálních rozhodnutí pro procesy se spojitým časem. Současně jsou zajímavé i věty, které se týkají blízkosti optimálních rozhodovacích funkcí za předpokladu, že jsou navzájem blízké (v jistém smyslu) procesy, na kterých jsou definovány.

Za typickou úlohu pro teorii rozhodovacích funkcí možno pokládat tuto: Pozorujeme nějaký náhodný proces, o jehož rozdělení víme pouze to, že přísluší k některé třídě rozdělení. Je nutné učinit rozhodnutí na základě určité posloupnosti pokusů. Při tom je známo, že

1. pro každé možné rozhodnutí ztráta způsobená přijatým rozhodnutím závisí na skutečném rozdělení procesu;

2. náklady na každý pokus jsou stanoveny.

Užití tohoto obecného schematu v teorii přejímací kontroly sekvenčním způsobem bylo u nás nedávno propracováno V. S. Michalevičem [16].

10. Některé problémy statistiky

Do poslední doby základní studie v této oblasti se týkaly propracování metod pro testování statistických hypothes a pro odhady hodnot parametrů rozdělení na základě posloupnosti výsledků nezávislých pokusů. V tomto směru nashromáždila matematická statistika ohromné množství teoretického materiálu. Nyní již máme k disposici veliký počet účinných kriterií, která nám dovolují na základě výsledků experimentů provést volbu mezi vzájemně si konkurujícími hypothesami. Existují zajímavé pokusy uspořádat systematicky všechny dosud získané závěry nějakým způsobem. Je však nutno říci, že definitivní formy výkladu matematické statistiky nebylo dosaženo. Jeden z problémů, které stojí na cestě k dosažení tohoto cíle a mají při tom nejen všeobecně teoretický, ale i veliký význam pro aplikace, je tento: mějme nějakou množinu statistických kriterií, kterých je možno použít k řešení určitého statistického problému. Je otázkou, kterého z těchto kriterií je nejúčelnější použít. V jistém smyslu inversní problém je tento: stanovit oblast problémů, k jejichž řešení je nejúčelnější použít daného kriteria. Je zřejmé, že pojem „účelnosti" je zde definován nedostatečně přesně a nadto se může měnit od jedné úlohy ke druhé; pro zjednodušení však předpokládáme, že požadavku „účelnosti" je dán přesně definovaný smysl.

Pokusím se ilustrovat tuto úlohu na jednoduchém příkladě. Všimněme si úlohy, s kterou se v praxi často setkáváme: na základě výsledků dvou nezávislých výběrů (posloupností pokusů) máme provést rozhodnutí, že oba výběry jsou ze základních souborů se stejným rozdělením pravděpodobností. S úlohami tohoto typu přijdeme do styku např. při kontrolách stálosti seřízení obráběcích zařízení, stálosti podmínek při provádění experimentů a v mnoha dalších případech. K řešení této úlohy lze užít celé řady statistických kriterií: χ^2, Pearsonova, ω^2 — kriteria Craméra — Misesa — Smirnova, Wilcoxona, N. V. Smirnova atd. Kterému z těchto a ostatních kriterií nutno dát přednost?

Nutno říci, že jsem uvedl pouze jeden z velkého počtu možných problémů, které jsou před statistikou nezávislých pokusů; při tom, byť jsou problémy statistiky nezávislých pokusů sebedůležitější, přesto začínají být na pořadu dne statistické problémy týkající se pokusů závislých. Tyto si určitě zasluhují, aby jim byla věnována mimořádná pozornost. Některé práce v tomto směru již existují, avšak nelze je hodnotit jinak, než jako začátek bádání v této oblasti. Mezi velkým počtem problémů, které se zde naskýtají, mají speciálně velký význam statistická vyšetřování stacionárních procesů a posloupností a procesů se stacionárními přírůstky. O této látce vyšla nedávno první souhrnná monografie napsaná švédským statistikem Rosenblattem [17].

Stručnost mé přednášky si vynutila, abych nechal stranou celou řadu dalších zajímavých otázek. Neměli jsme možnost se zde dotknout ani tak velké oblasti současného bádání, jako je teoretická fysika, kde teorie pravděpodobnosti má podstatnou úlohu. Podobně jsme se nezmínili ani o technických problémech, které by měla teorie pravděpodobnosti řešit. Tyto problémy jsou neobyčejně rozmanité a bezpochyby budou mít na další rozvoj naší vědy značný vliv. Zejména bych chtěl zde vyzdvihnout zajímavou problematiku, která vzniká v souvislosti s automatisací výroby. Další důležité a zajímavé problémy klade matematické statistice a teorii pravděpodobnosti medicina, biologie, jazykověda. Všechny tyto směry obracejí k sobě pozornost mladých vědeckých pracovníků.

Přeložili J. Bílý, Fr. Fabian, J. Sedlák

Literatura

[1] H. Cramér: Problems in Probability Theory, Ann. Math. Stat., v. XVIII, N 2, 1947, 165—193.

[2] Б. В. Гнеденко: Предельные теоремы для сумм независимых слагаемых и цепей Маркова. Укр. матем. журн., т. VI, № 1, 1954, 3—20.

[3] А. Н. Колмогоров: Некоторые работы последних лет в области предельных теорем теории вероятностей, Вестник Московского гос. ун-та, № 10, 1953, 29—38.

[4] И. П. Кубилюс: Вероятностные методы в теории чисел, Успехи матем. наук, т. 11, № 2, 1956, 31—66.

[5] А. Н. Колмогоров: Основные понятия теории вероятностей, ОНТИ, 1936.

[6] А. Н. Колмогоров: La transformation de Laplace dans les espaces linéaires. C. R. Acad. Sci. Paris, 200, N 21, 1717—1718.

[7] А. Н. Колмогоров: Стационарные последовательности в гильбертовском пространстве, Бюлл. Московского гос. ун-та, т. 2, в. 6, 1941.