Jean-Pierre Kahane
Velká postava Gyorgye Pólyi

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 35 (1990), No. 4, 177--191

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137822`

Velká postava Györgye Pólyi

Jean-Pierre Kahane (*Francie*)*)

György Pólya**) se narodil v Budapešti dne 13. prosince 1887. Je tomu něco málo přes 100 let. Zemřel na Stanfordově univerzitě v prosinci 1985, před necelými třemi lety. Tato dvě data vymezují mimořádně plný život a monumentální dílo.

Je zcela přirozené si tento život a toto dílo připomenout zde v Budapešti na 6. mezinárodním kongresu o vyučování matematice. Nejprve proto, že Pólya je jedním z korytejů maďarské matematické školy, která tak mnoho přinesla světu ve 20. století. Dále proto, že Pólya se podrobně a do hloubky zajímal o vyučování matematice a že na veřejnosti je ještě známější pro své dílo pedagogické než pro matematické.

Všichni přítomní přímo či nepřímo znají nějakou část Pólyova díla. Někteří znají Pólyu osobně. Mnozí si vzpomínají na poctu, které se mu dostalo v roce 1972 na druhém mezinárodním kongresu o vyučování matematiky v Exeteru. V roce 1980 byl v Berkeley čestným předsedou čtvrtého kongresu. Již dlouho je Pólya legendární postavou a téměř koincidence výročí jeho smrti a stého výročí narození tuto legendu oživila a vynesla na svět nové dokumenty. Byly právě publikovány v Bulletinu Londýnské matematické společnosti (1987). V Bulletinu vyšel také znamenitý nekrolog Geralda L. Alexandersona a Lestera H. Langeho, příspěvky k různým aspektům Pólyova díla, které napsali Kai Lai Chung, Ralph D. Boas, D. H. Lehmer, Doris Schattschneider, Ronald C. Read, Menahem M. Schiffer a Alan H. Schoenfeld, a také dodnes nejúplnější seznam jeho prací. Všechny jeho hlavní práce jsou ostatně dobře dostupné. Jeho knihy jsou ve všech knihovnách. Nejpopulárnější z nich, *How to solve it* (1945), byla vydána v 17 jazycích a ve více než miliónu výtisků. Hlavní články jsou sebrány ve čtyřech svazcích *Collected Papers* (1974—1984). Pólya je obdivuhodný vědecký autor, který zná všechny registry psaného jazyka: pro odborníky dovede psát velmi hutně, ale dobře ví, kdy je třeba postupovat pomalu. Dovede psát křišťálově jasně, ale dovede svůj výklad také opatřit jiskřivými příkrasami a vtipem. Mám za to, že ovládá všechny jazykové prostředky maďarštiny, němčiny, kterou hlavně používal až do roku 1940, a angličtiny, která se potom stala jeho přijatým jazykem. To, co napsal francouzsky ve švýcarském časopisu L'Enseignement mathématique (poznamenávám, že to byl v té době stejně jako dnes oficiální orgán Mezinárodní komise pro vyučování matematice ICMI) nebo v Comptes Rendus Akademie věd, je jediná řada perel: jasně a hutně jsou zde řečeny hlavní myšlenky, které dále rozvíjí ve svých pozdějších pracích.

*) Projev prezidenta ICME na 6. kongresu o vyučování matematice v Budapešti

**) Pólya — čti *Pója* (pozn. překl.).

JEAN-PIERRE KAHANE: *La grande figure de Georges Pólya. L'adresse du président.* Proceedings of ICME-6 (1988), 79—97. Přeložil OTAKAR JAROCH.

Mezi vámi je mnoho těch, kteří měli možnost se seznámit s Pólyovými myšlenkami ve své mateřštině. Můj úkol je apriorně o to obtížnější. Jestliže Pólyu už znáte, co vám o něm řeknu? Po pravdě je však látka tak bohatá, že stačí otevřít a znovu otevřít Pólyovo dílo, abychom našli něco nového. Jestliže vám tedy nic nového neřeknu, bude to jen a jen moje chyba.

Aby riziko bylo co nejmenší, budu nejprve mluvit o Pólyově životě a jeho velkých etapách: Budapešť, Curych, Stanford. O jeho osobnosti a celoživotním přátelství s Gáborem Szegö. O vlivech, kterým byl vystaven, a o vlivu, který měl sám. O jeho zájmech a o směrech, kterými se nesly jeho vědecké práce. Pak vám nabídnu krátký slovník matematických termínů, které nesou Pólyovo jméno: Pólyova křivka, Pólyova funkce, Pólyova indikatrix, Pólyova hustota, Pólyovy-Schurovy funkce, Pólyova-Szegöho dimenze, Pólyova „náhodná procházka", Pólyova teorie, nemluvě o celé řadě vět, které jsou po Pólyovi pojmenovány. A nakonec chci ilustrovat a komentovat některé jeho myšlenky o heuristice, o přijatelném uvažování a všeobecně o vyučování matematice.

Od svého mládí žil Pólya v ovzduší intelektuálního zápalu. Jeho otec byl jako právník zaměstnán u pojišťovací společnosti, byl to však také ekonom, spisovatel, překladatel, lingvista. Klasickým se stal jeho překlad díla Adama Smithe, Bohatství národů (Wealth of Nations). Jeho starší bratr se zajímal o matematiku, ale stal se nakonec chirurgem a univerzitním profesorem. Jeho matka pocházela ze čtvrti Buda ze staré rodiny, ve které se udržovala velká kulturní tradice.

Pólyovi bylo 10 let, když jeho otec zemřel a zanechal pět sirotků. Jeho starší sestry začaly pracovat v téže pojišťovně jako otec, zatímco on sám studoval na lyceu moderní i klasické jazyky. Později se pak stávalo, že Pólya citoval v originálu Homéra, Vergilia nebo Danta. Heinovy verše překládal do maďarštiny již na lyceu. Matka ho vedla k povolání otcovu, a proto se po ukončení lycea zapsal na univerzitu, aby studoval práva. Jeho právnická studia však netrvala déle než jeden semestr. Studium práv bylo pro něho nudné, když existovalo tolik jiných zajímavých věcí. Dal se na studium literatury a po dvou letech měl kvalifikaci vyučovat latinu a maďarštinu. Pokračoval ve studiu filozofie a musil si zapsat přednášky z fyziky a z matematiky, jak bylo tenkrát pravidlem. Profesorem fyziky byl slavný Loránd Eötvös a profesorem matematiky mladý Lipót Fejér. Pólya podlehl kouzlu Fejérovy osobnosti a stal se matematikem.

Později to různě vysvětloval. Ve svých 90 letech měl rád vtipné odpovědi a při jednom rozhovoru s Alexandersonem neodolal pokušení: „nepokládal jsem se za dost dobrého pro fyziku a byl jsem příliš dobrý pro filozofii: matematika byla uprostřed". Ale při jiných příležitostech (1961, 1969), když se sám ptá, proč ve 20. století dalo Maďarsko světu tolik vynikajících matematiků, uvádí faktory méně osobní a mnohem závažnější: kvalita vyučování matematice na lyceu, jeho provázání na matematický výzkum přes Matematické listy (Matematikai Lapok, maďarský časopis pro dobré studenty lycea, který publikoval úlohy zadávané nejlepšími matematiky) a osobní role Fejérova, jehož zaujetí pro výklad, výměnu názorů a vyučování nakonec přešlo na Pólyu.

Je pozoruhodné, že u Pólyi šlo zaujetí pro matematiku ruku v ruce se zájmem o všechny světové problémy. Na univerzitě byl jedním ze zakladatelů kroužku Galileo Galilea, jehož samotné jméno bylo za vlády Habsburků revolučním symbolem. Tehdy se ostatně Pólya zajímal take o Ernsta Macha — nejslavnějšího představitele empiriokriticismu —

a to více než o názor jeho odpůrce, kterým byl Vladimír Iljič Lenin. Po celý svůj život se živě zajímal o demokratické procedury: poměrné zastoupení, jehož vynikající matematickou teorii předkládá (1919), nebo způsob volby prezidenta Spojených států, který podrobuje zdrcující kritice (1961). Za války v roce 1914 byl již usazen v Curychu a připojil se k Russelovu pacifismu. Starost o světový mír byla jedna z posledních myšlenek, kterou nedlouho před svou smrtí vyjádřil tím, že podepsal mezinárodní výzvu matematiků k zmrazení jaderných zbraní (mimochodem řečeno, výzvu podepsal také profesor Á. Császár a já sám).

Píšeme rok 1910 a György Pólya je matematikem. Zdržuje se jeden rok ve Vídni, odkud se vrací do Budapešti, aby obhájil svou disertaci o interpretaci pravděpodobnosti jako objemu nebo podílu objemů v n-dimenzionálním prostoru. Následuje dlouhý pobyt v Göttingen, kde tenkrát působili Klein, Hilbert, Runge, Landau, Weyl, Hecke, Courant a Toeplitz. Po návštěvě Paříže se nakonec na Hurwitzovo pozvání usazuje na vysoké škole technické (Eidgenössische Technische Hochschule) v Curychu. Hurwitz zemřel v roce 1919 a byl to potom Pólya, kdo redigoval jeho spisy. Pólya jmenuje Hurwitze na prvním místě mezi matematiky, kteří na něho měli vliv. Od Hurwitze jsou zejména také některé úlohy ze známé knihy Pólya-Szegö: *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis* (Úlohy a věty z analýzy).

Je na čase hovořit o Gáborovi Szegö. Je o sedm let mladší než Pólya. Když se spolu v Budapešti po prvé setkali, vyhrál právě Szegö Eötvösovu soutěž a Pólya obhájil doktorát. Od té doby nelze jejich životy navzájem od sebe oddělit. Ve svém prvním článku vyřešil Szegö jeden Pólyův problém. Potom společně pracují na „bibli" několika generací analytiků, na známé knize úloh Pólya-Szegö, která vyšla v roce 1925. To vždy byla Pólyova oblíbená kniha a stojí za to si poslechnout, co o ní před několika lety řekl v předmluvě k vydání Szegöových spisů:

„Byl to báječný čas. Pracovali jsme s nadšením a soustředěně. Měli jsme podobné pozadí. Jako všichni mladí maďarští matematici té doby jsme byli pod vlivem Leopolda Fejéra. Oba jsme byli čtenáři téhož dobře vedeného maďarského matematického časopisu pro středoškolské studenty, ve kterém se kladl důraz na řešení úloh. Zajímali jsme se o stejný typ otázek ve stejné oblasti, avšak jeden z nás znal více v tomto oboru, druhý v jiném. Byla to krásná spolupráce. Kniha Pólya-Szegö je výsledkem naší spolupráce a je mou nejlepší knihou a také nejlepší knihou Gábora Szegö."

Tato formulace je paradoxní: ani mnohotvárné Pólyovo dílo, ani hluboký vliv, který měl Szegö na moderní analýzu, nelze redukovat na knihu Pólya-Szegö. Ale je pravda, že to je příkladná kniha, která představuje souhrn tehdejších znalostí ve zcela původním zpracování formou na sebe navazujících problémů. Dnes i v dohledné budoucnosti zůstane významnou klasickou matematickou knihou.

Spolupráce se Szegöm tím nekončí. Zatímco Pólya buduje svoji kariéru v Curychu, usazuje se Szegö v Německu, v Berlíně a potom v Královci. Rasové pronásledování však přinutilo Szegöho k emigraci do Ameriky, kde našel uplatnění na Stanfordově univerzitě. V roce 1940 prchá také Pólya z válečné a zfašizované Evropy. Szegö, který v té době vede katedru matematiky na Stanfordově univerzitě, jej pozve, aby k němu přišel. Pro Pólyu je to začátek nové kariéry. Vyjádřením spolupráce se Szegöm je několik společných článků. Na Stanfordově univerzitě vyústila jejich spolupráce v nové knize, vydané v roce 1951: *Izoperimetrické nerovnosti v matematické fyzice.* Jejich přátelství se stalo legendou. I když jsou již oba na odpočinku, chodí se na Stanfordově univerzitě stále na návštěvu k Pólyům a k Szegöovým. Szegö umírá jako první dne 7. srpna 1985, a Pólya o měsíc později. Na Stanfordově univerzitě zůstává jeho celoživotní družka, paní Stella Pólyová, které odtud posílám i jménem kongresu uctivé a srdečné pozdravy.

Nezmínil jsem se ještě o svazcích, které spojují Pólyu s Anglií. Hardy jej tam pozval v roce 1924 a Pólya strávil jeden rok v Oxfordu a potom v Cambridge. Tam se seznámil s Littlewoodem a Inghamem. Začala spolupráce mezi Hardym, Littlewoodem a Pólyou, která vedla k jiné krásné knize, *Inequalities*, vydané v roce 1934. Hardy byl výjimečná a podmanivá osobnost. Byl to čistý matematik par excellence a taková byla také jeho reakce na tradiční hegemonii aplikované matematiky v Anglii. Na Pólyu působilo kouzlo Hardyho osobnosti. Sám byl také čistý matematik — dostával sice největší část své inspirace z matematiky již vytvořené, ale odmítal při tom jakákoliv omezení kromě těch, která by si uložil sám. Na rozdíl od Hardyho byl Pólya čistý matematik přístupný aplikacím a vyhledával inspiraci ve vnějším světě.

O jeho politických zájmech jsem se již zmínil. Uvedu ještě tři jiné příklady: náhodná procházka, struktura organických molekul a kmitání membrán.

Náhodná procházka (*random walk, promenade au hasard, Irrfahrt*) je pojem, který zavedl Pólya, a za okamžik se k němu vrátíme. Pólya říká, že dostal tento nápad, když neočekávaně dvakrát za sebou potkal jednoho ze svých studentů v dámské společnosti. Trochu ho to uvedlo do rozpaků. Ale namísto toho, aby na setkání zapomněl, vykonstruoval model náhodných setkání, který se stal základem toho, čemu se dnes říká rekurence nebo transience.

V Curychu se Pólya stýkal s kolegy z jiných oborů a vyučoval matematiku velmi různorodým studentům: chemikům, architektům, inženýrům. Problém izomerů v organické chemii (tj. molekul, které jsou složeny z těchže atomů, avšak různě uspořádaných) je otázkou matematickou a Pólya jako první navrhl model a předložil řešení. Zde je počátek Pólyovy *kombinatorické teorie.*

Na Stanfordově univerzitě se Pólya a Szegö znovu vraceli k problémům hmotného světa a ke vztahům mezi fyzikou a geometrií. U problému kmitání membrán, torzního odporu a i u jiných otázek jde o to, „odhadnout fyzikální veličiny z údajů geometrických, odhadnout to, co je nejméně přístupné, na základě údajů přístupnějších" — cituji z předmluvy jejich knihy *Izoperimetrické nerovnosti.* Matematická analýza, použitá na již prozkoumané fyzikální modely, je privilegovaným prostředkem k tomu, abychom pronikli do podstaty věcí.

V nekonečné složitosti hmotného světa tak Pólya otevírá nové cesty („náhodná procházka", kombinatorika konfigurací) a hloubí nové brázdy (extrémální úlohy, nerovnosti izoperimetrického typu).

Otevřenost k vnějšímu světu se však nezastavuje jen u světa hmotného. Viděli jsme, že Pólya vykonával povolání učitele ještě dříve, než se stal matematikem. Matematika je pro něho neoddělitelně předmětem zkoumání i předmětem vyučování. V Curychu ho výuka inženýrů přivádí k úvahám o pedagogických metodách, které později rozpracuje jako *věrohodné uvažování.* Jinak řečeno: jak přesvědčit, aniž bychom dokazovali. A v téže souvislosti: jak matematik sám sebe přesvědčuje o pravdivosti nějakého tvrzení dříve, než je dokáže? Jaká je u matematických objevů role pozorování, dohadu a verifikace? Na Stanfordově univerzitě se věnuje heuristice, jejíž otcovství přiznává velkému Eulerovi. Jaký je nakonec samotný cíl vyučování? Podle Pólyi je tímto cílem naučit žáka, aby samostatně myslel. Spíše než látku přednášet, je lépe ji rozdělit na dílčí problémy, které by žák sám řešil. Tyto problémy jsou *úlohy k řešení* a *tvrzení, která je třeba dokázat.* Rozložení na dílčí problémy, to je právě sám projekt knihy Pólya-Szegö: *Aufgaben* ... Ale podle Pólyi sem také patří Descartův program *Regulae ad directionem ingenii*, který označuje jako klasickou práci o logice objevování. A konečně i projekt Eukleidův, pokud jeho teorémy v původním smyslu nejsou nic jiného než tvrzení, která je třeba dokázat. O těchto otázkách pojednává většina prací, které Pólya píše na Stanfordově univerzitě: *How to solve it* (1945), *Mathematics and plausible reasoning* (1954), *Mathematical Discovery* (1962). Vrátím se k nim v poslední části svého projevu. (Jejich ruské překlady jsou [14], [15], [16] – Pozn. překl.)

Pólya nikdy nepřestane vyučovat. Kombinatoriku přednášel, ještě když mu bylo 90 let. Za své dlouhé kariéry napsal sedm významných spisů a více než 250 článků. Abych se vrátil k jeho působení v Curychu – tam pracoval hlavně v těchto oborech: počet pravděpodobnosti, zejména centrální limitní věty (Zentraler Grenzwertsatz – terminologie pochází od něho) a „náhodná procházka"; speciální funkce; určité integrály; nuly mnohočlenů a celých funkcí; teorie aproximace; algebraické rovnice; singularity a aritmetické vlastnosti analytických funkcí; Taylorovy a Dirichletovy řady, řady lakunární; celé funkce exponenciálního typu a Fourierovy integrály; lineární funkcionály na prostorech funkcí; numerické nerovnosti; bilineární formy; kapacity a dimenze, teorie potenciálu; konvexní tělesa; kombinatorické problémy; úvahy o heuristice a vyučování. Převážně o těchto tématech pojednává 150 článků z tohoto období.

Nebude možné si udělat představu tohoto bohatství. Než vám z něho předložím výběr ve tvaru malého slovníčku, chtěl bych uvést citaci. Pólya měl významný vliv na mnoho matematiků mé generace (například pro mne byl v letech 1950 již legendární postavou). N. G. de Bruijn, citovaný Alexandersonem, popisuje Pólyův vliv těmito slovy:

„*Snad více než kterýkoli jiný matematik ovlivnil mou práci v matematice právě György Pólya. Teplo jeho osobnosti vyzařuje celým jeho dílem. Podivuhodný vkus, křišťálově čistá metodologie, jednoduché prostředky, úžasné výsledky. Kdyby mne někdo vyzval, abych jmenoval jednoho a jen jednoho matematika, kterým bych já sám chtěl nejraději být, okamžitě odpovídám: Pólya.*"

Malý slovníček, který následuje, nemůže ani zdaleka docenit Pólyovo dílo. Zastavil jsem se u toho, co lze nejsnadněji vyložit. Jde tedy o velmi povrchní výběr, který je třeba doplnit serióznějším rozborem, o kterém však již byla řeč (komentáře v Collected Papers, 1974–1984; zpráva v Bulletinu Londýnské matematické společnosti, 1987).

Pólyova křivka (1913) je varianta Peanovy křivky, která zaplňuje pravoúhlý trojúhelník. Vycházíme z pravoúhlého trojúhelníku, výškou jej rozdělíme na trojúhelníky dva, které jsou podobné výchozímu trojúhelníku a které označíme 0 a 1. Na obou trojúhelnících operaci opakujeme a dostáváme čtyři nové trojúhelníky 00, 01, 10, 11. Stejným způsobem pokračujeme: vznikají trojúhelníky stále menší a menší, avšak podobné výchozímu trojúhelníku. Každá nekonečná posloupnost nul a jedniček odpovídá do sebe vloženým trojúhelníkům, jejichž průnik se redukuje na jediný bod. Tímto způsobem každému číslu $t \in \langle 0, 1 \rangle$, zapsanému ve dvojkové soustavě, odpovídá v trojúhelníku bod a každým bodem trojúhelníku také projdeme, když proměnná t projde intervalem $\langle 0, 1 \rangle$.

V případě, že výchozí pravoúhlý trojúhelník je rovnoramenný, jde o konstrukci Cesàrovu (1905), kterou nezávisle objevili Paul Lévy a W. Sierpiński. V tomto případě jsou v kterékoli etapě dělení všechny malé trojúhelníky shodné a to má zajímavé důsledky, když porovnáme hodnoty t a jejich obrazy. Většina bodů jsou body prosté, ale vyskytují se též body dvojnásobné a čtyřnásobné.

Pólya ukazuje, že ostrý úhel α v pravoúhlém trojúhelníku lze volit tak, aby násobnost bodů byla nejvýše 3. Z pozdější doby je známo, že v každém spojitém zobrazení z $\mathbb{R}^m$ na $\mathbb{R}^{m+p}$ se vyskytují body násobnosti $p + 2$ (Hurewicz 1939).

Také si všímá toho, že vycházíme-li z pravoúhlého trojúhelníku, jehož přepona má jednotkovou délku a úhel $\alpha \neq \pi/4$, pak při n-tém kroku vznikne $\binom{n}{k}$ trojúhelníků, jejichž přepony mají délku $(\cos \alpha)^{n-k} (\sin \alpha)^k$. Pokračujme v této úvaze dále. Je-li $\pi/6 < \alpha < \pi/4$, pak délky přepon klesají pomaleji než 2^{-n} (délka dyadických intervalů v n-tém kroku) a odtud plyne, že funkce $f(t)$, kterou je Pólyova křivka parametrizována, nemá nikde derivaci. Je-li $\pi/12 < \alpha < \pi/6$, pak má většina přepon délku klesající pomaleji než 2^{-n}, ale některé klesají rychleji: funkce $f(t)$ není diferencovatelná skoro všude, avšak na nespočetné množině má nulovou derivaci. Pro $\alpha < \pi/12$ má většina přepon délku, která se zmenšuje rychleji než 2^{-n} a funkce $f(t)$ má skoro všude derivaci rovnou nule. Rozbor všech těchto případů s podrobnými důkazy provedl Peter Lax (1973).

Ve skutečnosti však přirozeným parametrem Pólyovy křivky není t, nýbrž s, což je dvojnásobek obsahu proběhnuté oblasti, který se mění od 0 do 1, když t probíhá interval $\langle 0, 1 \rangle$ (obr. 1).*) Je-li $F(s)$ obraz argumentu s, snadno ověříme, že F nemá nikde derivaci, a také že

$$(\#) \qquad \|F(s) - F(s')\|^2 \leqq |s - s'| \,.$$

Ukažme ještě použití Pólyovy křivky na problém, který v podstatě předložil S. Kakutani. Dán je pravoúhlý trojúhelník s odvěsnami a, b a libovolný počet bodů v tomto trojúhelníku. Dokažte, že body $M_1, M_2, \ldots, M_n$ lze očíslovat tak, že

$$\sum_{m=1}^{n-1} |M_m M_{m+1}|^2 \leqq a^2 + b^2 \,.$$

Odpověď: Podle (#) stačí v typickém případě ($a = \cos \alpha$, $b = \sin \alpha$) očíslovat body v pořadí, v jakém se vyskytují na Pólyově křivce. Variantou tohoto problému je uvažovat obdélník o stranách a, b, libovolný počet bodů v obdélníku, a dokázat, že body M_0,

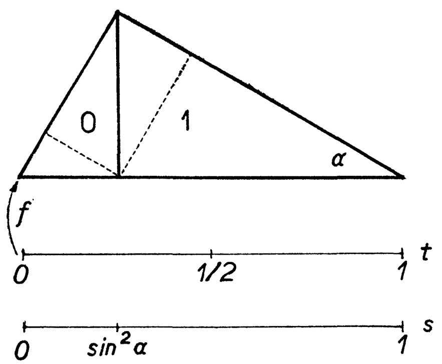
*) Dvojnásobek obsahu výchozího trojúhelníka (obr. 1) je $\sin \alpha \cos \alpha$. Chceme-li, aby platilo $t = 1 \Rightarrow s = 1$, je snad lépe zavést s jako dvojnásobek obsahu proběhnuté oblasti dělený číslem $\sin \alpha \cos \alpha$. — Pozn. překl.

$M_1, \ldots, M_{n-1}; M_n \equiv M_0$ lze očíslovat tak, že

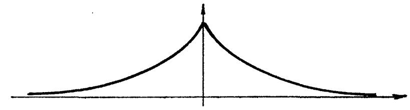
$$\sum_{m=0}^{n-1} |M_m M_{m+1}|^2 \leqq 2(a^2 + b^2).$$

Původně byl tento problém zadán pro čtverec $(a = b)$ a řeší se pomocí křivky Cesàrovy.

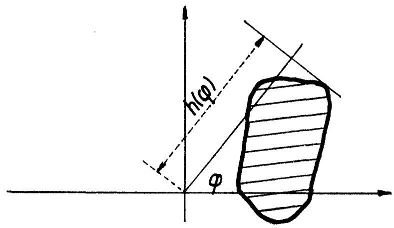
Pólyovy funkce (1949) jsou funkce $f(x)$, $x \in \mathbb{R}$, které jsou kladné, sudé, konvexní na polopřímce $x \geqq 0$ a mají nulové limity $f(+\infty) = f(-\infty) = 0$. Představují velmi užitečnou třídu charakteristických funkcí v teorii pravděpodobnosti (obr.2). Snadno se to ukáže, uvažujeme-li extrémální Pólyovy funkce, což jsou funkce znázorněné rovnoramennými trojúhelníky.



Obr. 1.



Obr. 2.



Obr. 3.

Pólyova indikatrix (1922) celé funkce exponenciálního typu $f(z)$ je funkce

$$h(\varphi) = \limsup_{r \to \infty} \frac{\ln f(r\, e^{i\varphi})}{r}.$$

Je to opěrná funkce uzavřené, omezené a konvexní oblasti, která je Pólyovým diagramem funkce $f(z)$, srv. obr. 3. Například Pólyův diagram funkce $f(z) = e^{az}$ je $\{a\}$ a konjugovaný diagram funkce $f(z) = \sum_1^N c_n \exp(a_n z)$ je nejmenší konvexní oblast, která obsahuje body a_n. Celé funkce exponenciálního typu mají velký význam ve Fourierově analýze (věta Paleyova-Wienerova 1934, věta Plancherelova-Pólyova 1937), a tento pojem zavedl Pólya v roce 1919.

Pólyovy-Schurovy funkce (1914) jsou funkce komplexní proměnné, které lze v okolí počátku aproximovat mnohočleny s reálnými kořeny. Nutně to jsou celé funkce exponenciálního typu násobené Gaussovou funkcí. Pólyovy práce o reálných kořenech mají své důsledky v teorii fázových přechodů, jak to ukazuje Marc Kac ve svém komentáři k Sebraným pracím (*Collected Papers*, svazek II).

Dvěma perlami jsou *Pólyovy věty* o funkcích, jejichž funkční hodnoty pro celé argumenty jsou celá čísla (1915, 1920). Nejmenší celá transcendentní funkce, která zobrazí $\mathbb{N}$ do $\mathbb{Z}$, je $f(z) = 2^z$ a nejmenší celá transcendentní funkce, která zobrazí $\mathbb{Z}$ do $\mathbb{Z}$ je

$$f(z) = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^z - \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^{-z}\right].$$

Hustota posloupnosti kladných čísel (λ_n) je definována jako limita $\lim (n/\lambda_n)$ pro $n \to \infty$, pokud tato limita existuje. *Pólyova maximální hustota* kladné posloupnosti Λ je infimum hustot všech posloupností, které mají hustotu a obsahují Λ. Pólya ukazuje, že infima je dosaženo a že maximální hustota má význam v souvislosti s rozložením singularit Dirichletových řad s exponenty λ_n, tedy řad $\sum a_n \exp(-\lambda_n s)$. Nejjednodušším výsledkem je, že je-li hustota nulová, pak je Dirichletova řada konvergentní v polorovině (je to zobecnění jedné Fabryho věty), ale že tomu tak nezbytně není, je-li maximální hustota kladná ($D > 0$). V tomto případě však leží na každém uzavřeném intervalu o délce πD na přímce konvergence jeden singulární bod (1923, 1927, 1939, 1942).*)

Kapacitní dimenze Pólyova-Szegöova (1931) je pojetí dimenze, která na rozdíl od dimenze Minkowského, Bouligandovy nebo Hausdorffovy se nezakládá na geometrických úvahách, nýbrž na teorii potenciálu. Zajímavým způsobem se zavádí ve Fourierově analýze: kapacitní dimenze kompaktu $K \subset \mathbb{R}^n$ je δ, jestliže pro každé $\alpha < \delta$ má K míru $\mu \neq 0$, jejíž Fourierova transformace $\hat{\mu}(u)$ patří do prostoru $L^2(\mathbb{R}^n, \mathrm{d}u/(1 + |u|)^{n-\alpha})$, a jestliže tomu tak není pro žádné $\alpha > \delta$. Hlavním výsledkem Frostmanovy disertace (1934) je, že dimenze Hausdorffova a Pólyova-Szegöova jsou si rovny.

Pólyova náhodná procházka (1921, 1938), o které již byla řeč, je proces nesmírně jednoduchý: neustále a zcela náhodně skáčeme z jednoho bodu v $\mathbb{Z}^n$ do některého bodu sousedního, aniž bychom preferovali některý směr. Otázka zní: dostaneme se skoro jistě do předem určeného bodu? Odpověď je záporná pro $n \geqq 3$ a kladná pro $n = 1$ nebo $n = 2$. Jak žertovně říká Pólya, ve dvojrozměrném prostoru je pravda, že všechny cesty vedou do Říma.

Pólyova teorie v kombinatorice umožňuje pomocí generujících funkcí více proměnných stanovit počet konfigurací, které dostaneme, když dané předměty umísťujeme do vrcholů daného mnohostěnu. V chemii se tato metoda stále používá při určování počtu izomerů. Její první výklad, a to jeden z nejlepších, je na dvou stránkách v Comptes-Rendus (1935). Poslední Pólyův výklad je v knize Pólya-Tarján-Woods z roku 1983. Například se ukazuje, že maximální počet alifatických alkoholů $C_nH_{2n+1}OH$ je postupně roven 1, 2, 4, 8, 17, 39 pro $n = 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Pólyova teorie měla v kombinatorice značný úspěch nepochybně ze tří důvodů: je sama o sobě zajímavá, má praktické použití, a také díky Pólyovu věhlasu. Hlavní principy této teorie však již v roce 1927 uveřejnil málo známý matematik J. Howard Redfield. Jeho článek *The theory of group-reduced distributions* (Amer. J. Math. 49 (1927),

*) Novější formulace těchto výsledků jsou např. v knize A. F. LEONTJEV: *Rjady eksponent*, Nauka 1976. — Pozn. překl.

str. 433–455) však dlouho nevyvolal žádnou pozornost. Pólya si ho nevšiml a zdá se, že ani Redfield si nevšiml článků Pólyových. Redfield zemřel roku 1944 a napsal právě tento jediný článek. Po druhé byl opět objevený článek publikován roku 1984 v časopisu Journal of Graph Theory a nyní díky spravedlivému obratu věcí Redfieldova sláva roste ve stínu věhlasu Pólyova. Lze tak soudit podle práce Pólya-Read (1987), která obsahuje základní text Pólyův z roku 1937 i Readův komentář o celém průběhu této záležitosti.

Pozornosti si zaslouží také *Pólyova heuristika*, ke které se ještě vrátím. Teď se však chci zmínit o Pólyově přísloví. Různá vydání práce Jak to řešit? (*How to solve it*? — řekl jsem již, že byla přeložena do sedmnácti jazyků) obsahují slovníček heuristiky a v tomto slovníčku je heslo *moudrost přísloví*. Pólya se musel dobře bavit, když prohlížel jeho různé překlady. Nechal přeložit přísloví anglická jako opravdová přísloví francouzská, německá, italská atd. Při tom se stává, že překlad obohacuje originál. Také připojil přísloví, které sám vymyslel a které zní mnohem lépe v angličtině než ve francouzštině. Jistě je znáte: *Your five best friends are What, Why, Where, When, and How. You ask What, you ask Why, you ask Where, When, and How — and ask nobody else when you need advice.**)

Nezmínil jsem se ještě o všech poctách, kterých se Pólyovi dostalo. Na konci tohoto slovníčku termínů, které nesou Pólyovo jméno, se patří ještě uvést *Pólyovu cenu* v kombinatorice, kterou uděluje Společnost pro průmyslovou a aplikovanou matematiku (SIAM), *Pólyovu cenu* za matematický výklad, kterou uděluje Americká matematická asociace, a *Pólyovu cenu*, kterou právě zřídila Londýnská matematická společnost, aby jí byla ve Spojeném království oceňována výjimečná matematická práce. Na Stanfordově univerzitě nese jedna z budov jeho jméno: *Pólyova kolej*. Pro matematika je to vzácné uznání. Pólyovo jméno je tak vytesáno do kamene, ale zůstane ještě mnohem déle vryto do paměti lidí.

V poslední části tohoto projevu se chystám rozvinout a komentovat některé Pólyovy myšlenky o heuristice, věrohodném uvažování a o roli problémových úloh při vyučování.

Pólyovy názory na tyto věci jsou starého data. V roce 1919 uveřejnil v jednom švýcarském pedagogickém časopisu první nástin myšlenek, které později rozvinul v Matematickém objevu (Mathematical Discovery). Jde o svého druhu geometrickou reprezentaci postupu, jak nalézt řešení problému (geometrické znázornění myšlenkového řetězce, *Geometrische Darstellung einer Gedankenkette*). V časopisu Enseignement Mathématique uveřejnil v roce 1931 jako resumé přednášky, přednesené před švýcarskou společností profesorů matematiky, její stručný výtah, který se později stal slavným jako součást práce Jak to řešit? (*How to solve it*?)

1. Především problému porozumět.

2. Nalézt cestu, která vede od neznámého k známým údajům, je-li třeba, tedy přes několik meziproblémů (analýza).

3. Vypracovat řešení (syntéza).

4. Verifikace a kritické zhodnocení.

---

*) Tvých pět nejlepších přátel je Co, Proč, Kde, Kdy a Jak. Zeptáš se Co, zeptáš se Proč, zeptáš se Kde, Kdy a Jak — a víc se už nikoho nebudeš ptát, když potřebuješ poradit.

Ohledně dalších podrobností odkazuji na příslušné stránky práce *How to solve it*? Zdůrazním však jeden z Pólyových pokynů pro analýzu nebo chcete-li jeho představu pracovního postupu: Lze najít příbuzný problém, jehož řešení je snadnější? Nějaký zvláštní problém? Analogický problém? – To je právě jedna z myšlenek, kterou bravurně rozvíjí ve své knize o matematice a věrohodném uvažování (její název je dále zkracován *MVU*).

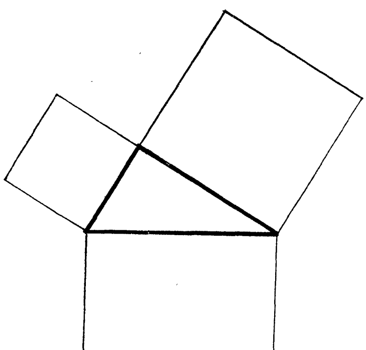
Osvětlím tento postup na třech geometrických úlohách.

První příklad (úloha k řešení, *MVU*, kapitola 2). Dokažte Pythagorovu větu.

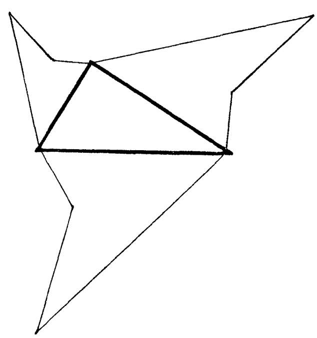
Zcela přirozená je úvaha Eukleidova, totiž sestrojit tři čtverce nad třemi stranami pravoúhlého trojúhelníka (obr. 4) a dokázat, že plošný obsah největšího čtverce je roven součtu obsahů obou čtverců nad odvěsnami. Lze ovšem zobecňovat: namísto čtverců sestrojíme nad stranami pravoúhlého trojúhelníka tři podobné mnohoúhelníky. Jejich plošné obsahy budou úměrné plošným obsahům čtverců, a stále tedy jde o to dokázat, že obsah největšího mnohoúhelníku je roven součtu obsahů mnohoúhelníků sestrojených nad odvěsnami (obr. 5). Teď přejdeme ke zvláštnímu případu (obr. 6). Stačí v pravoúhlém trojúhelníku nakreslit výšku a Pythagorova věta je dokázána. Obr. 6 je analogií obr. 4, kterou jsme dostali napřed zobecňováním a potom volbou zvláštního případu.

Ani není třeba upozorňovat na příbuznost obrázků 6 a 1. Není nakonec tento pěkný důkaz Pythagorovy věty vedlejším výsledkem při studiu Pólyovy křivky?

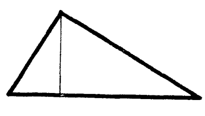
Druhý příklad. Je dán trojúhelník T a tři polopřímky, které vycházejí z jeho vrcholů, procházejí trojúhelníkem T a spolu se stranami trojúhelníku T vymezují čtyři trojúhelníky a tři čtyřúhelníky. Předpokládáme, že tyto čtyři trojúhelníky jsou rovnoploché. Dokažte, že v tomto případě mají stejný obsah také všechny tři čtyřúhelníky (obr. 7).



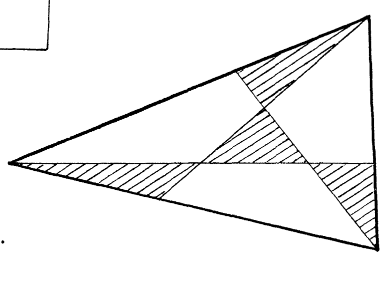
Obr. 4.



Obr. 5.



Obr. 6.



Obr. 7.

Jde o afinní problém. Je tedy každý zvláštní případ ekvivalentní případu obecnému. Volme za T rovnostranný trojúhelník. Je-li obrazec invariantní vůči rotaci o třetinu plného úhlu kolem středu trojúhelníku, pak jsou malé trojúhelníky přiléhající ke stranám trojúhelníku T shodné. Čtyřúhelníky jsou rovněž shodné. Není-li tomu tak, pak tyto malé trojúhelníky shodné nejsou (obr. 8 a 9).

Důkaz dostáváme zobecněním úlohy, která je snadněji řešitelná: mají-li tři malé trojúhelníky, které přiléhají ke stranám trojúhelníka T, stejný plošný obsah, pak jsou rovnoploché i tři čtyřúhelníky.

Třetí příklad (*MVU* kapitola 3). Uvažujeme pět rovin v obecné poloze v prostoru. Na kolik prostorových oblastí je těmito rovinami prostor rozdělen?

Situaci si lze obtížně představit. Začněme proto s analogickými úlohami a uvažujme méně než pět rovin. Jedna rovina dělí prostor na dva poloprostory, dvě roviny na čtyři prostorové oblasti, tři roviny na osm oblastí. Při každém kroku tedy rozdělí nová rovina, kterou zavedeme, každou existující prostorovou oblast na dvě. Induktivní úvahou usoudíme, že n rovin dělí prostor na 2^n prostorových oblastí. Odpověď na naši úlohu je tedy: 32. (Viz další výklad! — Pozn. překl.)

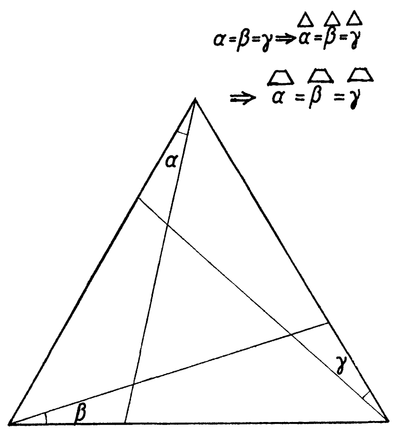
A teď poslední Pólyovo doporučení: verifikace a kritické zhodnocení. Je naše metoda řešení použitelná na jinou úlohu?

Zajisté. Namísto n rovin v trojrozměrném prostoru uvažujme n nadrovin v prostoru o p dimenzích. Opět a z těchže důvodů je počet dílčích oblastí 2^n pro jakkoli velké p.

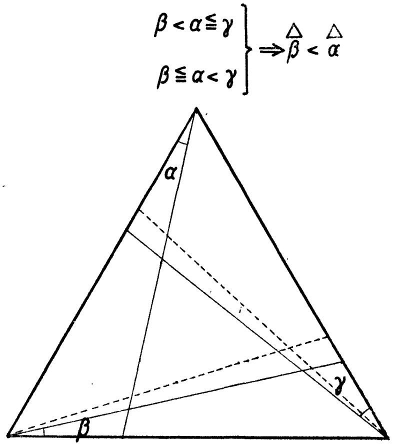
Vida, to by tedy mělo platit i pro $p = 2$ a $p = 1$. Avšak n bodů nerozděluje přímku na 2^n intervalů (s výjimkou $n = 0$ a $n = 1$), nýbrž na $n + 1$ interval. Kde je chyba? Je to v tom, že n-tý bod nedělí všechny předcházející intervaly, nýbrž jen jeden jediný interval.

Podobně je tomu pro $p = 2$: n-tá přímka v obecné poloze dělí jen n již existujících oblastí, protože protíná $n - 1$ existující přímky v $n - 1$ bodech, a je tedy sama dělena na n intervalů. Pro $p = 2$ tedy vychází $1 + n + \frac{1}{2}n(n - 1)$ místo 2^n.

Místo 2^n dostáváme v obecném případě (tentokrát správně provedenou indukcí)



Obr. 8.



Obr. 9.

výsledek $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \binom{n}{2} + \ldots + \binom{n}{p}$ a to je jediný mnohočlen stupně p, který pro $n = 0, 1, 2, \ldots, p$ má hodnotu 2^n.

Vztahy mezi pozorováním, hypotézami a verifikací tvoří jádro Pólyovy heuristiky a jeho teorie věrohodného uvažování. Věrohodnost je druh kvalitativní pravděpodobnosti. Pólya si nedovoluje přiřazovat jí nějakou hodnotu, nýbrž vyšetřuje, jak se mění v závislosti na testech různých typů. Jeho teorie tedy pojednává o více věrohodném a o méně věrohodném.

Pozoruhodný příklad aplikace heuristiky je Pólyův článek o dvojicích prvočísel p, $p + d$, které se navzájem liší o dané sudé číslo d (American Math. Monthly 1959). Přesvědčivým způsobem ukazuje, jak za použití tabulek přicházíme k domněnce

$$\pi_d(x) \cong \pi_2(x) \prod_{p|d} \frac{p-1}{p-2}, \quad \text{kde } p \text{ jsou prvočísla větší než 2;}$$

$\pi_d(x)$ je počet prvočísel $p \leqq x$ takových, že $p + d$ je také prvočíslo. To vede k heuristické domněnce $\pi_2(x) \cong C \,.\, x/\ln^2 x$, kde

$$C = \prod_p \left(1 - \frac{1}{(p-1)^2}\right); \quad p \text{ jsou prvočísla větší než 2.}$$

Ve své úvaze Pólya ukazuje, že myšlenkové pochody matematika a fyzika si jsou velmi blízké. „*Matematici a fyzikové uvažují stejně; jsou vedeni a někdy i zaváděni týmiž problémy věrohodného uvažování.*" Je velmi pozoruhodné, že současně a nezávisle na Pólyovi předložil jeden anglický fyzik a jeden matematik, lord Cherwell a E. M. Wright, dva heuristické „*důkazy*" obecnější domněnky o asymptotickém rozložení prvočísel tvaru p, $p + a_1, \ldots, p + a_k$, kde $a_1, a_2, \ldots, a_k$ jsou daná sudá čísla (Quarterly J. Math., Oxford 1960).

Po tom, co bylo řečeno, poznamenejme, že v' této oblasti matematiky je obrovská vzdálenost mezi domněnkou a důkazem. Není ještě známo, zda $\pi_2(x) \to \infty$, a vše mluví pro to, abychom tento problém pokládali za velmi obtížný.

V teorii čísel je heuristika zároveň nutností i zdrojem nepříjemností. Nutností, abychom mohli postupovat vpřed – zde je skvělým vzorem Euler. Je však také zdrojem nepříjemností, což ukazují dva slavné příklady.

První příklad je z Hardyho knihy o Ramanujanovi. Jde o srovnání funkce $\pi(x)$ udávající počet prvočísel, která nejsou větší než x, a integrálního logaritmu $\mathrm{li}(x)$, což je primitivní funkce k $1/\ln x$. Velká věta o prvočíslech, kterou v roce 1896 dokázal Hadamard, je ekvivalence $\pi(x)$ a $\mathrm{li}(x)$. Avšak již Gauss si všiml toho, že $\pi(x) \leqq \mathrm{li}(x)$ až kam sahají naše tabulky prvočísel. Je to pravda pro $x \leqq 10^7$ a všechny zkoušky pro $x \leqq 10^9$ potvrzují tuto domněnku. Avšak v roce 1912 domněnku vyvrátil Littlewood, nedovedl však odhadnout, kdy nerovnost přestane platit. Od roku 1933 je známo, že smysl nerovnosti se obrací ještě pro argument menší než zcela nedostupné číslo

$$x = 10^{10^{10^{34}}}.$$

Není divu, že všechny přímé výpočty se zdály domněnku potvrzovat.

Druhý příklad je jeden Pólyův problém, který byl nazván Pólyovou domněnkou (1919): pro každé celé $n = p_1^{\alpha_1} p_2^{\alpha_2} \dots p_k^{\alpha_k}$ položme $\lambda(n) = 1$, když $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ je sudé číslo, a $\lambda(n) = -1$, když je součet $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_k$ lichý. Vyšetřujeme funkci $L(x) = \sum_{n \leqq x} \lambda(n)$ a tážeme se, zda vždy platí $L(x) \leqq 0$. Je to totiž pravda pro všechna x, pro která byla funkce $L(x)$ vypočtena. V roce 1958 však C. B. Haselgrove dokázal, že smysl nerovnosti se obrací dříve než argument dosáhne hodnoty $x = 1{,}845 \,.\, 10^{361}$.

Tyto příklady by nás měly ochránit před úrazem. Na hypotézy v teorii čísel banální metody verifikace prostě nestačí. Vždy musíme prověřovat velmi vzdálené důsledky. Právě testy zaměřené dopředu na velkou dálku odlišují v této oblasti přístup matematika a fyzika.

Bylo diskutováno místo heuristiky ve vyučovacím procesu. Někteří se obávali, že k vyučování matematiky se přidává výuka heuristiky matematiky. Je správné si tuto otázku položit a vycházet z toho, co bylo Pólyovou hlavní starostí: pomoci žákovi a pomoci mu, aby myslel samostatně. Nezdá se, že by se vnucovala prohloubená výuka heuristiky, zvláště kdyby se heuristika měla vyvinout v samostatnou disciplínu. Naopak, moderní prostředky – kalkulačky a počítače – dávají žákům možnost pozorovat, ověřovat a experimentovat, kterou jejich předchůdci neměli. Studie ICME o vlivu informatiky a stejně tak moje zpráva na Mezinárodním kongresu matematiků v Berkeley byly z velké části věnovány právě této otázce, ale nebudu se k ní již vracet.

Pólyova heuristika hrála roli ve filozofii matematiky. Úvahu o Eulerově vzorci $S + V = H + 2$ (počet stěn mnohostěnu + počet jeho vrcholů = počet hran + 2), kterou najdeme v knize Matematika a věrohodné uvažování (*MVU*), má své pokračování v práci Imre Lakatose (Důkazy a jejich vyvrácení, *Proofs and Refutations*, Cambridge University Press 1976). Lakatos v této úvaze pokračuje tam, kde Pólya přestal, to jest v okamžiku, kdy se zdá, že tento vzorec, ověřený na nejdůležitějších případech, platí pro širokou třídu mnohostěnů. Jak ale příslušný závěr formulovat a jak jej dokázat? Objevují se protipříklady. Patří se však, aby Mistr z každého protipříkladu vyvodil další předpoklad nebo dokonce nový pojem. Je paradoxní, že vyvracíme-li jednotlivé kroky důkazu jeden za druhým, nezničí to celou vyslovenou větu. A obráceně, vyvrátíme-li větu, neruší se tím rozčlenění důkazu na jednotlivé kroky. Cestou chyb a jejich oprav se postupně objevují topologické metody a definice. Lakatos jde dále než Pólya, ale po téže cestě. Ostatně když se Pólya v jedné ze svých posledních prací, Domněnky a důkazy (*Guessing and Proving*), vrací k příkladu Eulerova vztahu, obohacuje svůj výklad o Lakatosovy poznámky, které formuluje *à la Pólya* (mám na mysli komentář k obrázku č. 4 v práci Domněnky a důkazy).

Pólyova heuristika snad jednou bude hrát roli v umělé inteligenci. Toho se dohaduje A. Schoenfeld ve své analýze Pólyova díla (1987). Pólyova heuristika skutečně navozuje myšlenku obecných strategií, které jsou méně než většina expertních systémů vázány na oblast svého použití.

Pólyovy úvahy o heuristice úzce souvisí s významnou myšlenkou týkající se vyučování. Jde o prioritu, kterou třeba přiznat řešení úloh. O Pólyově houževnatosti v tomto ohledu svědčí kniha *Aufgaben und Lehrsätze* (1924), později pak práce *How to solve it?* (1945, Jak to řešit?) a mnoho článků, které následují.

V sedmdesátých letech se Pólya stavěl proti formalizaci, se kterou byla spojována moderní matematika, a to právě proto, že problémy předkládané k řešení byly ochuzené a suché. V osmdesátých letech se mohl Pólya těšit z toho, že vyhledávání a řešení problémů mělo znovu příznivý ohlas. A tato zkušenost je již nezvratná.

Dvě závažné otázky vyvstanou, podíváme-li se nyní na devadesátá léta. Můžeme se a máme se vůbec při vyučování vyrovnávat s exponenciálním růstem matematické produkce? Můžeme se a máme se při vyučování vyrovnávat s růstem a rozmanitostí společenské potřeby matematických znalostí? Podle mého názoru na tyto otázky není odpověď ano nebo ne, ale co a jak. Pólyův příklad nám může pomoci dobře se orientovat.

V roce 1920 se tehdejší moderní matematika velmi vzdálila od vyučování, dokonce i od vyučování na univerzitách. *Pólya-Szegö* není jen dobrá kniha s problémy na sebe navazujícími, je to především dílo s přímým záběrem na současnou vědu, které si klade za cíl zpřístupnit současnou vědu a daří se mu to. Právě proto, že tato kniha byla ve své době velmi moderní, stala se a zůstane klasickou. Potřebovali bychom dnes stovky knih problémů věnovaných matematice naší doby a navíc ještě další materiály (publikace, audiovizuální záznamy, informatizované soubory), pomocí kterých bychom se seznamovali s pokrokem v matematice. Když říkám my, mám na mysli matematiky, učitele matematiky, studenty, žáky a vůbec veřejnost, které se to týká. Zde by byl prostor pro široký a sladěný akční program v rámci každého národa i v měřítku mezinárodním.

Mezi roky 1914 a 1940 přednášel Pólya nejrozmanitějším studentům. Obsah jeho přednášek ani metody vyučování nebyly vždy stejné. Jaká matematika je nezbytná pro jednotlivé lidské činnosti? Co se má vykládat mladým lidem a co má být předmětem trvalého vzdělávání? Kdo má vyučovat a jak? Tyto otázky byly nedávno předmětem výzkumu ICMI a zdaleka nejsou vyčerpány.

Mnoho prostředků pro vyučování nabízí matematika sama. Je totiž současně jazykem, intelektuálním cvičením i vědou.

Ze sedmdesátých let si musíme zapamatovat, že matematika je jazykem a že máme povinnost uchovat tento jazyk v dobrém stavu a vyučovat ho.

Z osmdesátých let si musíme zapamatovat, že matematika je intelektuálním cvičením, které je nenahraditelné, protože více než kterýkoli jiný předmět vede žáky při řešení úloh k vědeckému myšlení.

V devadesátých letech bude třeba, aby se matematika při vyučování ukázala být tím, čím skutečně je, totiž rozvíjející se vědou, která postupuje rychle dopředu v některých oborech, v jiných se naopak vrací zpět, znovu aktualizuje svůj historický vývoj a má přímý vliv na téměř všechny ostatní vědy i moderní technologie.

Nemyslím, že jsem nevěrný Pólyovu odkazu, když takto promítám do příštích let to, co vidím jako výsledek jeho díla a jeho osobního příkladu.

Literatura

Základní prameny jsou [1] a [2], kde se nachází většina citovaných článků a knih. Nalezneme zde zejména ty Pólyovy práce, u kterých jsem uvedl jen název a datum. Další prameny pouze doplňují přehled literatury.

[1] G. PÓLYA: *Collected Papers* (I, II, 1974; III, IV 1984).

[2] *Obituary George Pólya.* Bulletin of the London Mathematical Society *19* (1987), 559—608.

[3] *Matematikusok felhivása a fegyverkezési verseny megfékezésére*. Matematikai Lapok *32* (1981 až 1985), 215—216.
[4] G. PÓLYA: *On my cooperation with Gábor Szegö*. In: GÁBOR SZEGÖ: *Collected Papers*, vol. I (1982), 11.
[5] E. CESÀRO: *Remarques sur la courbe de von Koch* (1906). In: *Opere scelte*, vol. II, 464—479.
[6] W. HUREWICZ: *Über dimensionserhöhende stetige Abbildungen*. Journal für die reine und angewandte Mathematik *169* (1933), 71—78.
[7] P. LAX: *The differentiability of Pólya's function*. Advances in Mathematics *10* (1973), 456—464.
[8] O. FROSTMAN: *Potentiel d'équilibre et capacité des ensembles* (*thèse*). Lund 1935.
[9] LORD CHERWELL, E. M. WRIGHT: *The frequency of prime-patterns*. Quarterly J. Math. Oxford *11* (1960), 60—63.
[10] G. H. HARDY: *Ramanujan*. Cambridge University Press, 1940.
[11] I. LAKATOS: *Proofs and refutation, the logic of mathematical discovery*. Cambridge University Press, 1976.
[12] I.C.M.I. Study Series (A. G. HOWSON and J.-P. KAHANE, Editors): *The influence of computers and informatics on mathematics and its teaching*. Cambridge Univ. Press, 1986. — *School mathematics in the 1990's*. Cambridge Univ. Press, 1986. — *Mathematics as a service subject*. Cambridge Univ. Press, 1988.
[13] J.-P. KAHANE: *Enseignement mathématique, ordinateurs et calculettes*. Proc. Intern. Congress of Mathematicians, Berkeley 1986 (1987), 1682—1696.
[14] D. POJA: *Kak rešať zadaču*. Gos. uč. ped. izd. min. prosv. RFSFR, Moskva 1959.
[15] D. POJA: *Matematika i pravdopodobnyje rassužděnija*. IIL, Moskva 1957.
[16] D. POJA: *Matematičeskoje otkrytije*. Nauka GRFML, Moskva 1970.

Človek nie je stroj a zakrpatie, ak sa mu odoprie možnosť sebavýchovy a sloboda úsudku ... Volná výmena myšlienok a výsledkov je nutná pre zdravý vývoj vedy a kultúrneho života vôbec.

V prvom rade je škola povinná vychovávať nie budúcich úradníkov, vedcov, docentov, právnikov a spisovateľov, ale budúcich ľudí ... Bez tvorivých samostatne mysliacich a usudzujúcich osobností nie je dokonalejší vývoj spoločnosti mysliteľný, práve tak ako vývoj jednotlivej osobnosti bez živnej pôdy ľudského spoločenstva.

A. Einstein