Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Paul R. Halmos

Jádro matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 5, 273--281

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137792

Jádro matematiky

Paul R. Halmos, Bloomington, USA

Úvod. V čem je *skutečné* jádro matematiky? V axiómech (jako je postulát o rovnoběžkách)? Ve větách (jako je základní věta algebry)? V důkazech (jako je Gödelův důkaz nerozhodnutelnosti)? V pojmech (jako jsou množiny a třídy)? V definicích (jako je Mengerova definice dimenze)? V teoriích (jako je teorie kategorií)? Ve vzorcích (jako je Cauchyův intergrální vzorec)? V metodách (jako je metoda postupných aproximací)?

Matematika by jistě nemohla existovat bez těchto součástí, jsou všechny podstatné. Nicméně já si vážně myslím, že žádná z nich není jádrem matematiky, že hlavní oprávnění matematikovy existence je v řešení problémů, a že tedy *skutečným* jádrem matematiky jsou problémy a jejich řešení.

„Věta" je uznávané slovo ve slovníku většiny matematiků, avšak ne tak vždy slovo „problém". „Problémy", jak toho slova matematici z povolání někdy užívají, jsou skromná cvičení určená pro studenty, kteří se později naučí, jak dokazovat věty. Tyto citové odstíny však nejsou vždy na místě.

Komutativnost sčítání přirozených čísel a řešitelnost algebraických rovnic v tělese komplexních čísel, to obojí jsou věty, avšak jedna je považována za triviální (blízká základním definicím, snadno pochopitelná, snadno dokazatelná) a ta druhá za hlubokou (tvrzení není zřejmé, v důkaze se užívá zdánlivě vzdálených pojmů, výsledek má mnoho překvapivých aplikací). Nalézt neporazitelnou strategii na hru tic-tac-toe*) a najít rozmístění všech nulových bodů Riemannovy zeta-funkce, to obojí jsou problémy, ale jeden je triviální (každý, kdo rozumí definicím, rychle najde odpověď, téměř bez duševního úsilí a také bez pocitu uspokojení a řešení nemá zajímavé důsledky) a druhý je hluboký (nikdo dosud nenalezl odpověď, ačkoliv ji mnozí hledali, známá částečná řešení vyžadují velkého úsilí a poskytují hluboký pohled na problém a kladná odpověď by měla mnoho netriviálních důsledků). Ponaučení: věty mohou být triviální a problémy mohou být hluboké. Ti, kdo věří, že jádro matematiky je v problémech, nemusejí se nutně mýlit.

Sbírky úloh. Kdybyste chtěli přispět k matematice napsáním článku nebo knihy o matematických problémech, jak byste si s tím měli poradit? Měly by to být úlohy elementární (bez použití kalkulu), na úrovni pregraduovaných nebo graduovaných studentů nebo by to měly být badatelské problémy, na které nikdo nezná odpověď? Jsou-li řešení známa, mělo by je vaše dílo obsahovat nebo ne? Měly by být úlohy

*) Jednodušší verze hry v piškvorky.

Paul R. Halmos: *The Heart of Mathematics.* The American Mathematical Monthly, Vol. *87* (1980) No. 7, pp. 519—524.

uspořádány v nějakém systematickém pořadí (a v tom případě samo umístění úlohy je současně určitým návodem k jejímu řešení) nebo mají být uspořádány „náhodně“? Co by měl čtenář z vaší práce získat: rozptýlení, techniku nebo fakta (nebo ze všeho něco)?

Na tyto otázky byly již podány všechny možné odpovědi. Literatura o matematických problémech je rozsáhlá a stále roste. Pohled na část rejstříků označených Q A 43 (podle klasifikace Kongresové knihovny) může být vzrušujícím a pamětihodným zážitkem, ale také v jiných částech rejstříků jsou roztroušeny bohaté prameny problémů. Následuje krátký přehled spíše typických než zcela náhodně vybraných sbírek úloh, které lze objevit i při velmi zběžné prohlídce knihovny.

Hilbertovy problémy. Nejriskantnější a asi nejnevděčnější druh sbírek úloh, které je možno matematickému publiku nabídnout, je sbírka badatelských problémů. Vaše problémy mohou být vyřešeny za pár týdnů nebo měsíců nebo let a vaše sbírka proto může zastarat rychleji než většina matematických učebnic. Nejste-li právě osobnost Hilbertova formátu, nemůžete si být nikdy jisti tím, že se vaše problémy neukáží být triviální nebo – co horšího – právě ortogonální k pravdě, kterou všichni hledáme: špatně formulované, nikam nevedoucí a bez trvalé hodnoty.

Seznam vědeckých problémů, které měly velký vliv na matematické bádání dvacátého století, byl předložen Hilbertem v posledním roce devatenáctého století na mezinárodním sjezdu matematiků v Paříži [3]. Prvním z 23 problémů je hypotéza kontinua: je každá nespočetná podmnožina množiny $\mathbb{R}$ reálných čísel ve vzájemně jednoznačné korespondenci s $\mathbb{R}$? Dokonce ani v roce 1900 nebyla tato otázka nová a ačkoliv byl od té doby učiněn velký pokrok a jedni si myslí, že problém je rozřešen, jiní cítí, že fakta nejsou dosud uspokojivě prozkoumána.*)

Hilbertovy problémy jsou různě hluboké a dotýkají se mnoha částí matematiky. Některé jsou geometrické (mají-li dva čtyřstěny stejný objem, mohou být vždy rozděleny na stejný konečný počet menších čtyřstěnů tak, že odpovídající si kousky jsou kongruentní? – odpověď je ne) a některé patří do teorie čísel (je $\sqrt{2}^{\sqrt{2}}$ transcendentní? – odpověď je ano). Některé Hilbertovy problémy jsou dosud nerozřešeny. Mnoho informací shromážděných až do roku 1974 bylo zpracováno z moderních hlediska a sebráno do jednoho svazku v roce 1976 [5], avšak zvídavost matematické obce na tom neustala, neboť od té doby byl uveřejněn pozoruhodný počet jak přehledných, tak i původních vědeckých příspěvků.

---

*) Jedni si myslí, že problém je rozřešen pracemi K. Gödela (*Consistency proof for the Generalized Continuum Hypothesis*, 1939; *The Consistency of the Axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with the Axioms of Set Theory*, 1940) a P. J. Cohena (*The Independence of the Continuum Hypothesis*, 1964) a že postavení hypotézy kontinua, která je nerozhodnutelná z přijatých axiómů teorie množin, je podobné jako postavení pátého Eukliďova postulátu o rovnoběžkách, že totiž otázka po její pravdivosti ztrácí smysl. Jsou jiní, především zemřelý K. Gödel, který vidí věci složitěji. Na rozdíl od pátého Euklidova postulátu existuje jakási asymetrie mezi Cantorovou hypotézou kontinua a některými jinými předpoklady o mohutnosti kontinua. Gödel se domnívá, že dosud přijímané axiómy teorie množin nepopisují úplně skutečnost, která je podle něho dobře určena pojmy i větami teorie množin a v níž musí být Cantorova domněnka pravdivá nebo ne. Pozn. př.

Pólya-Szegö. Asi nejproslulejší a dosud nejbohatší sbírkou úloh je Pólyova-Szegöova [6], která původně vyšla v roce 1925 a byla znovu vydána (v anglickém překladu) v roce 1972 a 1976. Za své více než půlstoleté čilé existence (prozatím) byla pilířem nesčetně mnoha seminářů, standardní knihou odkazů a téměř nevyčerpatelným zdrojem zkušebních otázek, které jsou jednak podnětné, jednak lze na ně odpovědět. Jejich úroveň sahá od střední školy po hranice výzkumu. V první úloze se autor ptá na počet způsobů, jak proměnit dolar na mince po 1, 5, 10, 25 a 50 centech; v původním vydání šlo o švýcarské franky a mince po 1, 2, 5, 10, 20 a 50 (rappech). Od tohoto nevinného začátku postupují úlohy mírnými, ale vyzývavými kroky k Hadamardově větě o třech kruzích, Čebyševovým polynomům, mřížovým bodům, determinantům a k Eisensteinově větě o mocninných řadách s racionálními koeficienty.

Dörrie. Původní název (německy) je *Triumf matematiky* [1]. Je to kniha, která si zaslouží, aby byla více známa, než se zdá být. Je eklektická, rozprostřená do dvoutisícileté historie a sahá v obtížnosti od elementární aritmetiky k látce probírané ve vyšších semestrech.

Obsahuje např. tuto zvláštnost přičítanou Newtonovi (*Arithmetica Universalis*, 1707). Jestliže „a krav spase b luk v c dnech, a' krav spase b' luk v c' dnech, a'' krav spase b'' luk v c'' dnech, v jakém vztahu jsou veličiny a až c''? Předpokládá se, že na všech loukách je stejné množství trávy, že denní přírůstek na loukách je konstantní a že všechny krávy sežerou denně stejně množství." Odpověď:

$$\begin{vmatrix} b & bc & ac \\ b' & b'c' & a'c' \\ b'' & b''c'' & a''c'' \end{vmatrix} = 0$$

To je ze stovky problémů problém třetí.

Problémy se více než kdekoliv jinde kloní ke geometrii, ale obsahují také Catalanovu otázku, kolik lze utvořit různých součinů z n prvků v multiplikativním systému, který je zcela nekomutativní a neasociativní („kolika různými způsoby může být vypočten součin n různých činitelů po párech," problém 7) a Fermatovo-Gaussovo tvrzení o nemožnosti (vyjádřit třetí mocninu jako součet dvou třetích mocnin, problém 21).

Dva další příklady by měly poskytnout jasnou představu o příchuti celé sbírky: „každý čtyřúhelník může být považován za perspektivní obraz čtverce" (problém 72) a „na kterém místě zemského povrchu vypadá svisle zavěšená tyč nejdelší?" (problém 94). Styl a přístup jsou zastaralé, avšak mnoho úloh patří k těm věčně zajímavým; je to výborná kniha k zamyšlení, ponoříte-li se do ní.

Steinhaus. Můj minipřehled pokračuje polským příspěvkem, Steinhausem [7], obsahujícím (jako Dörrie) přesně 100 úloh, které jsou ryze elementární a při kterých se dobře pobavíte. Řekne-li se „sbírka úloh", většina lidí pomyslí na něco podobného této knize; je to skutečně vynikající exemplář svého druhu. Úlohy však nejsou stejně zajímavé ani stejně obtížné. Navíc odhaluje tato sbírka jinou stránku řešení úloh: někdy je téměř nemožné odhadnout, jak je která úloha obtížná, a tedy, jak je zajímavá, dokud není známo její řešení.

Uvedu tři příklady. (1) Existuje posloupnost $x_1, \ldots, x_{10}$ deseti čísel taková, že (a) x_1 je obsaženo v uzavřeném intervalu $\langle 0, 1\rangle$, (b) x_1 a x_2 jsou obsaženy v různých polovinách intervalu $\langle 0, 1\rangle$, (c) každé z čísel x_1, x_2, x_3 je obsaženo v různých třetinách tohoto intervalu a tak dále až do $x_1, x_2, \ldots, x_{10}$? (2) Jestliže z 3000 bodů v rovině neleží žádné tři v jedné přímce, existuje 1000 disjunktních trojúhelníků (myslí se vnitřek s hranicí) s vrcholy v těchto bodech? (3) Existuje uzavřený kruh v rovině, který obsahuje právě 71 mřížových bodů?

Úsudky o zajímavosti a obtížnosti jsou samozřejmě subjektivní, takže vše, co mohu učinit, je tlumočit jen své vlastní hodnocení. Příklad (1) je obtížný a nezajímavý, příklad (2) je překvapivě snadný a středně zajímavý a příklad (3) je o něco těžší, než na první pohled vypadá, a je docela zajímavý. Na obranu těchto názorů se zmíním o kritériu, kterého jsem používal: jestliže čísla 10, popř. 1000, popř. 71 v jednotlivých úlohách nemohou být nahrazena libovolnými přirozenými čísly, jsem nakloněn se domnívat, že odpovídající problémy jsou natolik speciální, že jsou nudné.

Ukazuje se, že odpověď na úlohu (1) je *ano*, a Steinhaus to dokazuje udáním řešení (zcela konkrétně: $x_1 = 0{,}95$, $x_2 = 0{,}05$, $x_3 = 0{,}34$, $x_4 = 0{,}74$ atd.). Týmž způsobem dokazuje, že odpověď je *ano* pro posloupnost 14 čísel namísto deseti, a na třech stránkách nevábně vypadajících výpočtů dokazuje, že odpověď je *ne* pro posloupnost 75 čísel. Zmiňuje se, že ve skutečnosti je odpověď *ano* ještě pro 17 a *ne* pro každé přirozené číslo větší než 17. Já si myslím, že je to nudné.

Na úlohy (2) a (3) je odpověď *ano* (a v úlohách lze čísla 1000, popř. 71 nahradit libovolným n).

Glazman-Ljubič. Kniha Glazmanova-Ljubičova [2] je neobvyklá (neznám žádnou podobnou toho druhu) a přes některé chyby je to krásný a vzrušující příspěvek k problémové literatuře. Kniha je ve skutečnosti jakýsi nový druh učebnice (konečněrozměrné) lineární algebry a lineární analýzy. Začíná definicí (komplexního) vektorového prostoru a pojmy lineární závislosti a nezávislosti; první úlohou v této knize je dokázat, že množina skládající se právě z jednoho vektoru x je lineárně nezávislá, právě když $x \neq 0$. Kapitoly následují jedna po druhé v logické souvislosti, právě jako v obvyklých učebnicích: lineární operátory, bilineární funkcionály, normované prostory atd.

Kniha není výklad prózou; snad by ji bylo možno nazvat výkladem poezií. Podává pečlivě definice a nutné pozadí výkladu. Hlavní její část tvoří úlohy; všechny jsou formulovány jako tvrzení a úloha je tato tvrzení dokázat. Důkazy v knize nejsou. Jsou tam odkazy, ale čtenář je upozorněn, že jich nemusí používat.

Skutečně novou myšlenkou v knize je silná koncentrace na jeden cíl: je to skutečně kniha o funkcionální analýze napsaná pro čtenáře, o kterém se zpočátku ani nepředpokládá, že ví, co je to matice. Začátečníkovi se důmyslně předkládá snadný případ, průhledný případ, motivující případ, konečněrozměrný případ, čistě algebraický případ některé z nejhlubších analytických skutečností, které kdy funkcionální analýza odkryla. Probíraná látka obsahuje spektrální teorii, Toeplitzovu-Hausdorffovu větu, Hahnovu-Banachovu větu, částečně uspořádané vektorové prostory, momentový problém, disipativní operátory a mnoho jiných takto analyticky znějících výsledků. Podle této knihy by mohly být sestaveny krásné přednášky (a já bych si je sám rád sestavil) a student vychovaný takovými přednáškami by se stal v okamžiku zázračným dítětem ve funkcionální analýze.

(Politováníhodným rysem této knihy, alespoň v anglické verzi, je úmyslně neortodoxní terminologie. Příklad: (kanonická) projekce z vektorového prostoru do faktorového prostoru se zde nazývá „kontrakce“ a co většina lidí nazývá kontrakcí, nazývá se „kompresí“. Naštěstí pojem, jehož standardní technické označení je komprese, se v knize neprobírá.)

Klambauer. Posledním příspěvkem k problémové literatuře, o kterém zde bude řeč, je Klambauerova kniha [4]. Jejím předmětem je reálná analýza a ačkoliv obsahuje několik elementárních úloh, má poměrně vysokou úroveň. Je to vynikající a vzrušující kniha. Jsou tam ovšem chyby včetně tiskových a několik zbytečných opakování; a to, že chybí rejstřík, je k zlosti a činí látku daleko obtížnější, než ve skutečnosti je. Kniha je však bohatým pramenem podnětných otázek, dobře známých i ne tak dobře známých příkladů a protipříkladů a standardních i ne tak standardních důkazů. Měla by být v knihovně každého milovníka problémů, každého učitele analýzy (od základů počínaje), a proto každého vážného zájemce o tento obor.

Obsah prozrazuje, že kniha je rozdělena do čtyř částí: aritmetika a kombinatorika, nerovnosti, posloupnosti a řady, reálné funkce. Uvádím po několika příkladech z každé kapitoly, které mají objasnit rozsah díla a snad poodhalit jeho příchuť, a jak doufám, povzbudit chuť na další problémy.

V kombinatorické části se má dokázat „pravidlo pro dělení devítkou“ (zjištění dělitelnosti čísla devítkou prostřednictvím součtu cifer v jeho desetinném rozvoji), má se určit počet nul na konci desetinného rozvoje čísla 1000! a koeficient u x^k ve výrazu $(1 + x + x^2 + \ldots + x^{n-1})^2$. Spolu s takovými úlohami jsou tam také nemotivované formule, které by se asi spíše líbily našim otcům, a je tam také pár zvláštností (jako úloha, ve které se doporučuje použít principu dobrého uspořádání k důkazu iracionality $\sqrt{2}$). Jednoduchou, avšak pozoruhodnou zvláštností je tvrzení: jsou-li m, n různá přirozená čísla, potom

$$m^{n^m} \neq n^{m^n} .$$

Kapitola o nerovnostech obsahuje mnoho známých nerovností (Hölderovu, Minkovského, Jensenovu) a mnoho jiných, které jsou analyticky cenné, avšak poněkud více specializované, a tedy poněkud méně známé. Zvláštností, na niž pravděpodobně jen málo lidí tuší odpověď, je otázka, co je pro každé přirozené n větší: $\sqrt{n}^{\sqrt{(n+1)}}$ nebo $\sqrt{(n+1)}^{\sqrt{n}}$?

Kapitola o posloupnostech obsahuje podrobný a úplný rozbor, jediný který jsem kdy viděl, okouzlujícího (a netriviálního) problému o konvergenci nekonečného procesu označeného symbolem

$$x^{x^{x^{\cdot^{\cdot^{\cdot}}}}}$$

Studenty by mohlo zajímat, že výsledek patří Eulerovi; odkazuje se na článek *De formulis exponentialibus replicatis*, Acta Academica Scientiarum Imperialis Petropolitanae, 1777. A ještě jeden hlavolam: co je uzávěrem množiny všech reálných čísel tvaru $\sqrt{n} - \sqrt{m}$ (kde n a m jsou přirozená čísla)?

Kapitola o reálných funkcích je také bohatá. Obsahuje problém transcendence čísla e, některé základní vlastnosti Cantorovy množiny*), Lebesgueův příklad spojité, avšak nikde nediferencovatelné funkce a důkaz F. Riesze (pomocí „lematu o vycházejícím slunci"**), že každá spojitá***) monotónní funkce je diferencovatelná skoro všude. Je tu rozbor trpasličí zvláštnosti zvané Osgoodova věta, což je Lebesgueova věta o dominantní konvergenci****) pro spojité funkce na uzavřeném, ohraničeném intervalu. Je tu Weierstrassova věta o aproximaci spojitých funkcí polynomy (inteligentně rozdělená na jednohubková lemata) a také jeden Gaussův důkaz základní věty algebry. Naposled se zmíním o otázce, která by měla být kladena mnohem častěji, než asi ve skutečnosti je: existuje řada funkcí spojitých na uzavřeném, ohraničném intervalu, která konverguje absolutně a stejnoměrně, pro kterou však selhává Weierstrassův M-test†)?

Problémové přednášky††). Jak můžeme my, dnešní učitelé, využít problémové literatury? Naším údělem je předat pochodeň matematických znalostí budoucím technikům, inženýrům, přírodovědcům, humanistům, učitelům a posléze vědecky aktivním matematikům: jsou tady problémy vůbec k něčemu?

Ovšemže jsou. Údělem každého smysluplného života je řešení problémů; význačnou součástí odborného života techniků, inženýrů, vědců atd. je řešení matematických problémů. Je povinností všech učitelů a učitelů matematiky zvlášť předkládat studentům spíše problémy než fakta. Zřejmě více uspokojí učitele, může-li vejít do posluchárny a podat uhlazený výklad o Weierstrassově M-testu, než vést zmatenou a bludnou hodinu, která *skončí* nakonec otázkou: „Je předpoklad omezenosti v testu nutný?" Já tvrdím, že taková pořádně zmatená hodina vedoucí studenta k hledání protipříkladu je nesmírně cenná.

---

*) Cantorova diskontinua. Pozn. př.

**) Buď g funkce spojitá na $\langle a, b\rangle$ a $E = \{x \in (a, b): (\exists t)(t > x \,\&\, g(t) > g(x)\}$. Potom $E = \emptyset$ nebo je E otevřená (tj. $E = \bigcup_{k=1}^{+\infty} (a_k, b_k)$ a $(a_k, b_k) \cap (a_j, b_j) = \emptyset$ pro $j \neq k$) a $g(a_k) \leqq g(b_k)$ pro všechna k. Pozn. př.

***) Další úloha (36a) by mohla znít: dokažte, že předpoklad spojitosti ve větě je možno vypustit (neboť monotónní funkce má nejvýše spočetně mnoho bodů nespojitosti). Pozn. př.

****) Protože si nejsem dost jist sugestivností názvu, kterého jsem užil, raději uvedu znění věty (Lebesgueovy):

Buď A měřitelná množina a $f_1, f_2, \ldots$ měřitelné na A funkce takové, že

(*a*) $\lim_{n \to +\infty} f_n = f$ skoro všude na A,

(b) existuje integrovatelná na A funkce g taková, že $|f_n| \leqq g$ pro $n = 1, 2, \ldots$ na A.

Potom $\int_A f = \lim \int_A f_n$. Pozn. př.

†) V češtině také neobvyklý název: M-test pochází zřejmě z existence konvergentní číselné majorantní řady. Pozn. př.

††) V originále „problem courses". Pozn. př.

Měl jsem přednášky, jejichž jediným obsahem byly úlohy řešené studenty (kteří je potom vyložili ostatním). Počet vět vyložených studentům v takovéto přednášce byl přibližně poloviční než při obvyklém způsobu výuky. Výklad v problémové přednášce však znamená, že studenti získají inteligentně pochybovačný postoj a určitou techniku vyplňování mezer, jež se obyčejně v důkazech přeskakují; výklad v obvyklé přednášce často neznamená o mnoho více, než že se studenti naučí názvy vět, dostanou strach z důkazů a získají jedině starost, zda se důkazy neobjeví u zkoušky.

Vykládaná látka. Mnoho učitelů si dělá starosti s množstvím látky, kterou musejí v přednášce vyložit. Jakýsi cynik vyslovil formuli: poněvadž si studenti zapamatují průměrně 40 % z toho, co jim řeknete, je tedy třeba nacpat do každé přednášky 250 % toho, o čem si myslíte, že jim utkví v paměti. I když je to mazané, asi to nebude k ničemu.

To nelze říci o seminářích. Studenti, kteří se zúčastnili mých seminářů, byli často chváleni svými dalšími učiteli. Chválena byla jejich pohotovost, jejich schopnost proniknout rychle ke kořenům věci a jejich inteligentně kladené otázky, které ukazovaly, že vědí, oč v hodině jde. To vše se odbývalo na několika úrovních, v kalkulu, lineární algebře, teorii množin a ovšem ve vyšších semestrech — v teorii míry a funkcionální analýze.

Proč bychom měli vyložit vše, o čem se domníváme, že by studenti měli vědět? I když si myslíme (abychom zůstali u příkladu již známého), že Weierstrassův M-test je nesmírně důležitý a že každý student matematiky musí vědět, že existuje, a musí ho umět užívat — přesto může být lépe jej v semináři v příslušném oddílu analýzy vypustit. Představme si, že je 40 takových důležitých témat, které musejí být studentům za semestr vyloženy. Znamená to, že musíme uspořádat 40 celých přednášek a věřit, že jim všechny utkví v paměti? Nebylo by lépe věnovat se tak 20 tématům po deseti minutách (pojmenování, tvrzeni a jeden způsob aplikace) a zabývat se ostatními dvaceti do hloubky, s problémy řešenými studenty, s protipříklady sestavenými studenty a aplikacemi objevenými studenty? Pevně věřím, že poslední metoda naučí více a lépe. Něco při tom spadne pod stůl, ale mnoho se toho vynese nad stůl (stará slovní hříčka, která by se měla uchovat*), a tím tato metoda pootevře dveře, jejichž samotnou existenci bychom ani netušili za pevně zbudovanou stavbou ze zvládnutých faktů. Co se týče Weierstrassova testu nebo čehokoliv jiného, co přijde v semináři příliš zkrátka — tak tedy existují knihy a časopisy a studentům se přinejhorším řekne, aby si je přečetli.

Problémové semináře. I když problémová přednáška může být věnována přísně vymezenému tématu, není to nutné — může být také věnována vytříbení zvídavého postoje a zdokonalení techniky rozborem problémů roztroušených po různých odvětvích. Takové technické přednášky, někdy nazývané problémovými semináři, se mohou konat na všech úrovních (pro začátečníky, kandidáty na Ph. D. nebo jakoukoliv skupinu mezi tím).

Nejlepší způsob, jak vést problémový seminář, je klást problémy, avšak pro vševědoucího učitele je právě tak zlé položit v problémovém semináři úplně všechny otázky,

---

*) V originále: Some of the material doesn't get *covered* but lot of it gets *discovered.*

jako je zlé vyložit v běžné přednášce úplně všechno. Vřele doporučuji, aby na problémovém semináři byli studenti povzbuzováni k odkrývání problémů po svém (nejdříve možná lehkou modifikací problémů, které se naučili od jiných) a že by se jim za tyto objevy mělo dostat veřejného uznání (a osvědčení za složení dílčí zkoušky k získání hodnosti). Tak jako nemůžete dát studentům odpovědi na všechny otázky, tak také jim nemůžete položit všechny otázky. Nejtvrdším oříškem při řešení problémů je položit si správnou otázku a jediná cesta, jak se tomu naučit, je zkoušet to. Zvláště na badatelské úrovni: položil-li jsem kandidátovi hotový problém pro disertaci, ještě jsem ho nenaučil vědecky pracovat. Jak má najít svůj další problém, až na něho nebudu dohlížet?

Není snadné naučit někoho klást správné otázky, právě tak, jako není snadné naučit někoho plavat nebo hrát na violoncello, to však nesmí být záminkou proto, abyste to vzdali. Nemůžete plavat za někoho jiného; nejlepší, co můžete udělat, je dohlížet na něho se sympatiemi a povzbuzovat ho svým souhlasem, pokud hledá ve správném směru. Vaše rada někdy pomůže udělat ze špatných otázek dobré, ale nic nemůže nahradit neustálé pokusy a nic nemůže nahradit cvik.

Jeden zřejmý návrh: zobecňujte; další poněkud méně zřejmý: specializujte; mírně pozměněný návrh: zkuste netriviální specializaci zobecnění. Jiná velmi dobře známá rada pochází od Pólyi: udělejte to snazší. (Pólyovo rčení zaslouží být stále a stále propagováno. Trochu podrobněji říká: nemůžete-li rozřešit nějaký problém, potom existuje snazší problém, který rozřešit umíte, a vaším prvním úkolem je najít jej.) Moje oblíbená rada: netrvejte hned na přirozených otázkách („co je ...?, „kdy je ...?„, nakolik je ...?“) avšak soustřeďte se nejdříve na snadnou (ale netriviální) otázku typu ano-ne („je pravda, že ...?“).

Doslov. Pevně věřím, že problémy jsou jádrem matematiky, a doufám, že je budeme prosazovat stále více a více jako učitelé v učebnách, na seminářích, v knihách a článcích a že vypěstujeme z našich studentů lepší autory a řešitele problémů, než jsme my sami.

Přeložil a poznámkami opatřil Přemysl Vihan

Literatura

[1] H. Dörrie: *100 Great Problems of Elementary Mathematics.* Dover, New York, 1965.
[2] I. M. Glazman and Ju. I. Ljubič: *Finite-Dimensional Linear Analysis: A Systematic Presentation in Problem Form.* MIT, Cambridge, 1974.
[3] D. Hilbert: *Mathematical Problems.* Bull. Amer. Math. Soc. *8* (1902), 437—479.
[4] G. Klambauer: *Problems and Propositions in Analysis.* Dekker, New York, 1979.
[5] *Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems.* AMS. Providence, 1976.
[6] G. Pólya and G. Szegö: *Problems and Theorems in Analysis.* Springer, Berlin 1972, 1976.
[7] H. Steinhaus: *One Hundred Problems in Elementary Mathematics.* Basic Books, New York, 1964.

Autor dosáhl Ph. D. na univerzitě v Illinois; učil (postupně) na univerzitách v Illinois, Syrakusách, Chicagu, Michiganu, na Havaji, v Indianě, Santa Barbaře a opět v Indianě s pobyty různé délky v Institute for Advanced Study, pak v Montevideu, Miami, Harvardu, Tulane, na Washingtonské

univerzitě (Seattle), v Berkeley, Edinburghu a Perthu. Uveřejnil osm nebo více knih a mnoho článků; obdržel Guggenheimovu nadaci a je členem Royal Society of Edinburgh a Maďarské akademie věd. MAA mu udělila Chauvenetovu cenu a dvě Fordovy ceny. Pracoval aktivně jako funkcionář jak v AMS, tak v MAA a od 1. ledna 1982 je redaktorem časopisu The American Mathematical Monthly.

Zabývá se teorií míry a ergodickou teorií, algebraickou logikou, operátory v Hilbertových prostorech; také přispěl k teorii pravděpodobnosti, matematické statistice, teorii topologických grup a Booleových algeber. (Redakce časopisu The American Mathematical Monthly.)

Sir William Henry Bragg
(1862—1942)

Jen málo objevů poskytlo uplatnění ve vědě tolika fyzikům jako objev rentgenového záření. Výzkum vlastností neviditelných X-paprsků byl zvláště první dvě desetiletí po Röntgenově „šťastné náhodě" v listopadu 1895 zdrojem překvapivých informací jak o stavbě atomů, tak o mikroskopické i makroskopické struktuře hmoty. Výsledky úsilí soustředěného počátkem 20. století ve většině fyzikálních laboratoří na hledání podstaty rentgenového záření zasáhly nejen do přírodních věd, ale nalezly své trvalé místo i v technické praxi.

Připomeňme si nositele Nobelovy ceny za fyziku, „jejichž činnost v oblasti výzkumu a využití rentgenového záření přinesla lidstvu největší užitek":

1901: Wilhelm Conrad Röntgen (1845 až 1923) — objev paprsků, které byly na jeho počest pojmenovány rentgenovými.

1914: Max Theodor Felix von Laue (1879 až 1960) — objev difrakce rentgenových paprsků při průchodu krystaly.

1915: Sir William Henry Bragg (1862 až 1942), Sir William Lawrence Bragg (1890 až 1971) — výzkum struktury krystalů pomocí rentgenových paprsků.

1917: Charles Glover Barkla (1877—1944) — objev charakteristického záření prvků.

Několika Nobelovými cenami se za dosavadní historii mohou pochlubit tři rodiny (Curieovi 1903, 1911, 1935; Braggovi 1915; Thomsonovi 1906, 1937). Pouze v případě Braggů ji však převzali otec zároveň se synem za společné vědecké výsledky.

Anglický fyzik, matematik a krystalograf, člen anglické akademie věd Royal Society v Londýně William Henry Bragg se narodil 2. července 1862 ve Wigtonu. Již při studiu na Trinity College i ve světoznámé Cavendishově fyzikální laboratoři v Cambridgi (1881—1885) vynikal mimořádnými matematickými a fyzikálními znalostmi. Koncem roku 1885 přijal místo profesora matematiky a fyziky na universitě v Adelaide. Během 24 let svého australského působení přednášel také ve městě Dunedin na Novém Zélandu. Po návratu do Anglie se stal vedoucím katedry fyziky a matematiky na univerzitě v Leedsu a od roku 1915 v Londýně.

Vědecká činnost W. H. Bragga se zpočátku soustřeďovala na výzkum elektronů a problémy radioaktivity, a to jak z hlediska teoretického tak experimentálního. Stejně aktuální byla počátkem našeho století i třetí oblast Braggova vědeckého zájmu — zkoumání struktury krystalů pomocí rentgenového záření. Právě zde dosáhl spolu se svým synem vynikajících objevů.

Do historie fyziky vešla dvě setkání W. H. Bragga s rentgenovými paprsky. Poprvé to bylo před rokem 1912, v období bouřlivých diskusí o podstatě rentgenového záření. W. H. Bragg patřil mezi velmi horlivé obhájce korpuskulární teorie. Svůj názor opíral o pokusy, při nichž potvrdil objev A. Righiho, že zelektrovaná tělesa se vybíjejí účinkem iontů vznikajících ve vzduchu, jímž procházejí rentgenové paprsky. Bragg uvažoval takto: Je-li rentgenové záření vlnové povahy, bude jeho energie rozložena spojitě po vlnoploše. Protože molekula přijme jen tolik energie, kolik jí předá část dopadající vlnoplochy, bude moci slabší zdroj záření uvolnit elektron (vytvářet ionty) až po značně dlouhé době. Skutečnost je však jiná — elektrony se uvolňují okamžitě i při malé intenzitě záření. Tento zdánlivý rozpor objasnila až kvantová