William Wistar Comfort

O riešení niektorých nerozhodnutelných topologických problémov

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 27 (1982), No. 5, 252--272

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137789

Připojuji proto literaturu, v níž zájemce najde zasvěcenější výklad o prof. W. Sierpińském a jeho díle.

Literatura

[1] M. M. FRYDE: *Wacław Sierpiński — Mathematician.* The Polish Review, Vol. *VIII.*, No. 1, 1963, 1—8.

[2] M. S.: *Polish mathematician honored at tercentenary of Académie des Sciences.* The Polish Review Vol. *XI.*, No 3, 1966, 3—7.

[3] *Odnowienie po 50-ciu latach doktoratu Wacława Sierpińskiego.* Wiadomości matematyczne, Seria II., 1959, 1—7.

[4] A. ROTKIEWICZ: *W. Sierpiński's works on the theory of numbers.* Rendiconti del circolo matematico di Palermo, Serie II — Tomo *XXI*, 1972, 5—24.

[5] A. SCHINZEL: *Wacław Sierpiński.* Warszawa 1976.

[6] W. SIERPIŃSKI: *O polskiej szkole matematycznej.* Problemy, *XIX.*, Nr. 3, 1963, 146—155.

[7] W. SIERPIŃSKI: *The Warsaw school of mathematics and the present state of mathematics in Poland.* The Polish Review, Vol. *IV.*, No 1—2, 1959, 1—13.

O riešení niektorých nerozhodnuteľných topologických problémov

W. W. Comfort, Middletown, USA

1. Úvod

Dovoľte, aby som sa vám poďakoval za milé privítanie a príhovor. Takisto ďakujem Paulovi Meyerovi z organizačného výboru za pozvanie. Je pre mňa potešením a cťou prednášať na tejto Akadémii.

Chcel by som popísať niekoľko axióm známych z literatúry a niektoré problémy, ktoré boli pomocou týchto axióm vyriešené alebo rozhodnuté. Som však predovšetkým topológ a nie logik alebo množinový teoretik. Domnievam sa, že vás zaujmem a možno i pobavím úvahami na tému: Axiómy ako dopravný prostriedok na priblíženie sa k topologickým problémom. Axiómy, o ktorých budem hovoriť, sa navzájom líšia a slúžia rôznym (niekedy dokonca protichodným) cieľom. Hneď na začiatku vás chcem upozorniť, že ani jednu z nich nemienim odporúčať ako najvyhovujúcejšiu ľudským

W. WISTAR COMFORT: *Deciding some undecidable topological statements.* Annals of the New York Academy of Sciences, Vol. 321 (1979) — Papers in Mathematics, pp. 9—26. Preložil PETER VOJTÁŠ.

danostiam. Ako to už býva s mnohými rozhodnutiami v našom živote, môžeme podľa rôznych hľadísk dospieť k odlišným optimálnym rozhodnutiam. Je tu dosť miesta i pre osobný vkus. Niekedy matematik zistí, že pre neho axióma, ktorú predtým bez výhrady používal, stratila svoju doterajšiu príťažlivosť. Ak ju potom zavrhne v prospech inej, nestráca tým nič ani spoločensky, ani profesionálne.

Samotnú vedeckú prácu väčšiny moderných matematikov neovplyvňuje, ale ani neurčuje žiadna koherentná filozofia zahrňujúca svet, ktorý obývame, ba ani pravidlá hry, ktoré sú rozumné a prijateľné. Sme ochotní prijať nové axiómy tak ako príležitostnú obchodnú objednávku a pocit straty zo starých axióm nebýva väčší, než ho máme ráno z ponožiek, ktoré sme včera večer zvliekli.

Samozrejme, sú prominentní matematici, ktorí veľmi dbajú na schémy axióm a povolené odvodzovacie pravidlá. V tejto súvisloti si človek bezprostredne spomenie na Erretta Bishopa ([3]), ktorý je činný dodnes, a na L. E. J. Brouwera (1881–1966). Svoj známy prínos k základom algebraickej topológie ([10]) dosiahol Brouwer v kontexte vážnych pochybností o legitímnosti niektorých všeobecne prijímaných praktík vrátane dôkazov používajúcich zákon vylúčeného tretieho ([8]). Brouwerove pochybnosti o týchto veciach, aj keď v pokusnej a neuhladenej forme, sa objavili v jeho kariére už veľmi skoro (pozri jeho doktorskú dizertáciu [7]). Podľa H. Freudenthala a A. Heytinga ([37]) o niekoľko rokov neskôr povedal: „... v svojej topologickej práci som sa pokúšal používať postupy, od ktorých som očakával, že by sa dali urobiť konštruktívne“. Vysoké ocenenie Brouwera a jeho historickej dôležitosti podal G. Kreisel ([57]).

Treba pripomenúť, že moderného logika alebo množinového teoretika pri jeho výbere axióm, s ktorými bude pracovať, nevedie výlučne intuícia, čo je alebo by mala byť pravda v našom (fyzikálnom) svete. Tak ako fyzici posledných desaťročí boli nútení znovu a znovu pretvárať svoje myslenie tak, aby zodpovedalo princípom, podľa ktorých sa riadi správanie sa atómov a kozmu, takisto sa musia matematici prispôsobovať novému, neustálemu vývoju.

Nie každá otázka, ktorá sa dá sformulovať, dá sa aj zodpovedať. Dnešný množinový teoretik v hľadaní zaujímavých axióm, ktoré determinujú alebo riešia ťažké otázky, nie je odkázaný len na princípy, ktoré sú intuitívne alebo evidentne pravdivé. Zdá sa, že sme intuíciu dočasne opustili preto, lebo sme donútení nedôverovať jej. Ak zaujímavá axióma alebo princíp riešia alebo rozhodujú ťažký problém, stávajú sa vzhľadom na túto schopnosť vhodnými pre ďalšie využitie a skúmanie. Pokúsme sa najprv porozumieť potrebe nových axióm.

2. Pravdivá a nerozhodnuteľná?

Začnem citáciou vety, ktorú mi zhruba pred dvoma desaťročiami povedal istý matematik, ktorého si vážim a rešpektujem. Citujem podľa pamäti, ale veta sa mi vtedy zdala taká pozoruhodná, nepravdepodobná, bizarná a smiešna, že si myslím, že som si jej znenie zapamätal doslovne: „Uvedomujem si, že Veľká Fermatova veta*) môže byť

*) V literatúre sa táto veta často nazýva Posledná Fermatova veta. (Pozn. prekl.)

nerozhodnuteľná; v tom prípade je však pravdivá". V čase tohoto rozhovoru som nemohol podať precízne a korektné definície ani „nerozhodnuteľnosti", ani „pravdivosti". Mal som ale pocit istoty, že viem toho dosť o obidvoch, aby som mohol byť presvedčený, že žiadne tvrdenie nemôže byť také i onaké. Ak sme nejaké tvrdenie už natoľko preskúmali, že ho môžeme považovať za pravdivé, istotne nemôže byť toto tvrdenie nerozhodnuteľné. Pokúsme sa pochopiť, prečo bol môj zmätok neopodstatnený a prečo je citovaná veta celkom rozumná.

V histórii nájdeme veľa príkladov nasledujúceho javu. Nejaký matematik – povedzme Euklides ([34]) ako kompilátor, G. Peano ([77]), E. Zermelo ([104]) alebo A. A. Fraenkel ([35, 36]) zostavili krátky zoznam axióm s úmyslom opísať reálny svet, prípadne aritmetické vlastnosti prirodzených čísiel, teóriu čísiel či nejakú inú podstatnú časť matematiky. Zo začiatku bola v každom prípade nádej, alebo dokonca očakávanie, že sa dokáže, že navrhovaný systém axióm je kategorický, t.j. že každé dva systémy alebo modely spĺňajúce tieto axiómy budú izomorfné v nejakom vhodnom zmysle.

Zásluhou práce K. Gödela [40] teraz už chápeme, že takýto program nemôže mať úspech. Teória $\mathscr{T}$ je neúplná, ak existuje tvrdenie S také, že ani S ani negácia $\neg S$ sa nedá odvodiť z daných axióm teórie $\mathscr{T}$.*) Druhá Gödelova veta o neúplnosti tvrdí, zhruba povedané, že každá rekurzívna axiomatizácia celých čísiel je neúplná. Všeobecnejšie, každá neprotirečivá**), formálne axiomatizovaná teória obsahujúca celé čísla a rekurzívne funkcie je neúplná. Konkrétne, Gödel spísal spočítateľne veľa postupností dôkazov, ktoré môžu slúžiť ako dôkaz alebo vyvrátenie zmysluplného tvrdenia v známom systéme. Potom formuloval tvrdenie S, ktoré nie je rozhodnuté žiadnym z týchto dôkazov. Postup vytvorenia tvrdenia S je podobný, ale oveľa komplikovanejší ako Cantorova diagonálna metóda ([11]) pri dôkaze nespočítateľnosti reálnych čísiel.

Vráťme sa teraz k nášmu problému. Tvrdíme, že isté prirodzené tvrdenia, medzi nimi možno Veľká Fermatova veta, môžu byť súčasne nerozhodnuteľné aj pravdivé. (Ako si pamätáme, Veľká Fermatova veta je tvrdenie, že ak a, b, c, n sú kladné celé čísla a $n > 2$, potom $a^n + b^n \neq c^n$.) Predpokladajme na chvíľu, len kvôli vysvetleniu argumentácie, že Veľká Fermatova veta je skutočne nerozhodnuteľná. To by znamenalo, že na základe používaných axióm a všeobecne prijatých pravidiel odvodzovania nemôžeme podať jej dôkaz a ani nemôžeme k nej skonštruovať protipríklad.

V každom konkrétnom modeli je Veľká Fermatova veta buď pravdivá, alebo nepravdivá. V konkrétnom modeli to môžeme rozhodnúť použitím trikov a techník, ktoré sa v iných modeloch nedajú aplikovať (sú dokonca bez zmyslu). Analyzujme náš bežný model $\mathbf{Z}$ celých čísiel, ktorý sa skladá z množiny $\{0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots\}$ spolu s aritmetickými operáciami nám dobre známymi. Našťastie model $\mathbf{Z}$ má túto vlastnosť: Existuje strojový program, ktorý nájde každú štvoricu $k = \langle a, b, c, n \rangle$ kladných celých čísiel takú, že $n > 2$ a $a^n + b^n = c^n$. (Napísať taký program je jednoduchou úlohou i pre študenta začiatočníka. Vyberieme jazyk vhodný na komunikáciu s počítačom, ktorý

*) V tom prípade hovoríme, že tvrdenie S je nerozhodnuteľné v teórii $\mathscr{T}$. (Pozn. prekl.)

**) Teória $\mathscr{T}$ je neprotirečivá, ak neobsahuje spor, t.j. ak neexistuje tvrdenie S také, že S a $\neg S$ sú dokázateľné v teórii $\mathscr{T}$. Pojmy a označenia, ktoré v tomto článku nie sú definované, môže čitateľ nájsť v základných učebniciach matematickej logiky, teórie množín a topológie. (Pozn. prekl.)

používame. Definujeme $f(k) = a + b + c + n$, pre k ako vyššie. Potom pre $m = 5$, $6, \ldots$ zariadime, že počítač vypíše všetky štvorice $k = \langle a, b, c, n \rangle$ také, že $f(k) = m$ a v každom prípade zistí, či $a^n + b^n = c^n$. Nemusíme žiadat tlač každého neúspešného prípadu, ale musíme mať istotu, že kedykoľvek počítač nájde k, pre ktoré platí rovnosť, bude nás o tom informovať.) A teraz argumentujeme nasledovne: Ak v našom modeli existuje protipríklad na Veľkú Fermatovu vetu, tak ho nájdeme. Ak teda Veľká Fermatova veta je nerozhodnuteľná na základe axióm teórie množín, potom je pravdivá v našom modeli.*) A tak by sa mohlo stať, že by nejaké tvrdenie bolo súčasne nerozhodnuteľné aj pravdivé.

Pre zdôraznenie poznamenávam explicitne, že zatiaľ nie je známe, či Veľká Fermatova veta je rozhodnuteľná na základe Zermelových-Fraenkelových axióm teórie množín. V každom prípade máme konkrétne (kombinatorické) tvrdenia o celých číslach, ktoré aj keď sú pravdivé, nedajú sa rozhodnúť v Zermelovom-Fraenkelovom systéme axióm teórie množín. Podľa nedávneho Matijasevičovho riešenia desiateho Hilbertovho problému ([47]) existuje polynóm $P(x_0, \ldots, x_{13})$ s celočíselnými koeficientami, pre ktorý platí:

$$\text{(1)} \qquad \text{ak } x_0, \ldots, x_{13} \text{ sú celé čísla, potom } P(x_0, \ldots, x_{13}) \neq 0\,,$$

ale vlastnosť (1) sa nedá v Zermelovom-Fraenkelovom systéme dokázať. (Históriu desiateho Hilbertovho problému a príspevkov M. Davisa, J. Robinsona a J. Matijaseviča k jeho rozriešeniu podal Davis v prácach [27, 28] a pre laika prístupným spôsobom v práci [26]). Polynóm P je prefíkané zakódovanie istého nerozhodnuteľného tvrdenia. Tvrdenie samo o sebe nebolo nikdy skúmané a ako diofantická rovnica je pre teóriu čísiel nezaujímavé. Naproti tomu J. Paris a L. Harrington ([76]) ukázali, že istý veľmi prirodzený výsledok konečnej kombinatoriky — jednoduché rozšírenie Ramseyovej vety, je pravdivý, ale na základe obvyklých axióm Peanovej aritmetiky prvého rádu nedokázateľný.

3. Piaty Euklidov postulát

V nádeji, že to objasní spomínaný fenomén, opíšem teraz jeho iný prípad — známy nám všetkým. Myslím tým vzťah piateho Euklidovho postulátu k prvým štyrom. Aby sme si to mierne zjednodušili, predpokladajme, že postulát je v tvare, ktorý prijal Euklidov komentátor Proclus a o nejakých trinásť storočí neskôr škótsky fyzik John Playfair: Daným bodom môžeme viesť s danou priamkou práve jednu rovnobežku. Vďaka prácam N. I. Lobačevského ([66, 67]) a J. Bólyaiho ([5]) dnes už vieme, že tento postulát sa nedá dokázať z ostatných. Je totiž nepravdivý v istých štruktúrach, ktoré sú modelmi ostatných štyroch; sú to tzv. neeuklidovské geometrie (napr. Kleinova hyperbolická geometria ([54, 55])). Či už svet, v ktorom žijeme, je alebo nie je euklidovský

*) Ak je Veľká Fermatova veta nerozhodnuteľná, existuje model $\mathfrak{M}$ teórie množín, v ktorom je pravdivá. Náš bežný model $\mathbf{Z}$ celých čísiel je počiatočným úsekom modelu $\mathbf{Z}^{\mathfrak{M}}$ celých čísiel z hľadiska modelu $\mathfrak{M}$ a operácie sčítanie a n-tej mocniny sú na ňom rovnaké. (Pozn. prekl.)

(vďaka Einsteinovi vieme, že nie je celkom taký, je mierne zakrivený), vy a ja azda môžeme súhlasiť s definíciou bodu a priamky, ktorá je pre nás vzájomne uspokojivá. Bod je pre nás usporiadaná trojica reálnych čísiel $P = \langle x, y, z \rangle$. Majme daný bod $\bar{P} = \langle \bar{x}, \bar{y}, \bar{z} \rangle$ a usporiadanú trojicu reálnych čísiel $\langle a, b, c \rangle$, z ktorých aspoň jedno je nenulové. Priamka je množina L bodov tvaru $\langle \bar{x} + ta, \bar{y} + tb, \bar{z} + tc \rangle$, kde $t \in \mathbf{R}$. Rovnobežnosť priamok nadefinujeme zrejmým spôsobom. Dá sa ukázať, že daným bodom $P_0 = \langle x_0, y_0, z_0 \rangle$ prechádza jediná priamka rovnobežná s priamkou L. Je to priamka definovaná predpisom $\langle x_0 + ta, y_0 + tb, z_0 + tc \rangle$.

Euklidov piaty postulát je teda nerozhodnuteľný a pravdivý. Podrobnejšie: je nerozhodnuteľný na základe ostatných štyroch a je pravdivý v našom každodennom modeli trojrozmerného euklidovského priestoru.

Poznamenávam na záver, že spomínané znenie Gödelovej vety o neúplnosti bolo vysoko neformálne a samo o sebe dosť neúplné. Nebudeme sa tu zaoberať jej starostlivou a precíznou formuláciou, je však vhodné pripomenúť, že predpoklad o tom, že axiómy (ktoré popisujú nejaké rozšírenie množiny $\mathbf{Z}$) sú dané rekurzívne, je netriviálny a nemôže byť vynechaný. Ináč totiž, ako poznamenáva J. R. Shoenfield ([86]), môžeme získať úplné rozšírenie teórie popisujúcej množinu $\mathbf{Z}$ jednoducho tak, že ako nové axiómy pridáme všetky vety pravdivé v modeli $\mathbf{Z}$.

Niektoré špecifické axiómy

Preberme si teraz stručne niektoré z tých axióm, ktoré topológovia (a iní) v priebehu posledných rokov pridali k Zermelovmu-Fraenkelovmu systému axióm teórie množín, a uveďme niektoré dôvody, pre ktoré ich vybrali. Podľa štandardného zvyku označíme Zermelov-Fraenkelov systém axióm teórie množín ZF, axiómu výberu označíme AC a ZFC bude označovať systém ZF spolu s axiómou výberu.

4. Axióma výberu

Na väčšinu z nás táto dobre známa axióma silne pôsobí svojou intuitívnosťou: je ekvivalentná tvrdeniu, že súčin systému neprázdnych množín je neprázdny, a tvrdeniu, že súčin kompaktných topologických priestorov je kompaktný (pozri J. L. Kelley [53]). (Naproti tomu J. D. Halpern ([44]) ukázal, že axióma výberu neplynie z tvrdenia, že súčin kompaktných Hausdorffových priestorov je kompaktný.) Medzi dôsledky axiómy výberu užitočné pre množinových teoretikov patrí to, že každý filter sa dá rozšíriť do ultrafiltra. Toto tvrdenie a vlastne prvá zmienka o ultrafiltroch pochádza od F. Riesza z r. 1908 ([78]). Jeho prednáška však v tom čase nevzbudila takú pozornosť, akú by si bola zaslúžila. Pre topológiu bodových množín je axióma výberu skutočne nenahraditeľná. Okrem iného umožňuje pre každý úplne regulárny Hausdorffov priestor X skonštruovať jeho Čechovu-Stonovu kompaktifikáciu $\beta(X)$. Všetci nepochybne poznáme nasledujúcu charakterizáciu priestoru $\beta(X)$. Uvažujme všetky kompaktné Hausdorffove priestory, do ktorých sa dá priestor X vnoriť na hustý podpriestor. Medzi nimi existuje jediný priestor $\beta(X)$ s nasledujúcou vlastnosťou: Každá spojitá funkcia z X do intervalu $[0, 1]$ (alebo ekvivalentne, každá spojitá funkcia z X do ľubovoľného kompaktného Hausdorffovho priestoru) sa dá spojite rozšíriť na celé $\beta(X)$. E. Čech ([13]) a M. H. Stone ([94]) podali detailné definície priestoru $\beta(X)$ v r. 1937. Poznamenajme, že niektoré aspekty konštrukcie a jej vlastnosti boli v r. 1930 anticipované A. N. Tichonovom ([99]); v tejto súvislosti pozri poznámky Čecha [13, str. 823] a Stona [95, str. 26].

Spomínané dve „aplikácie“ axiómy výberu – existencia ultrafiltrov a definícia priestoru $\beta(X)$ – veľmi úzko súvisia. Napr. ak je priestor X diskrétny, potom je niekedy výhodné stotožniť $\beta(X)$ (ako množinu) s množinou všetkých ultrafiltrov na množine X. (Toto hľadisko pri systematickom výklade uplatnili napr. L. Gillman a M. Jerison ([39]) a W. W. Comfort a S. Negrepontis ([22]).)

V jednom svojom článku ([17]) som sa pokúsil (bez použitia axiómy výberu) každému úplne regulárnemu priestoru X priradiť priestor, ktorý má niektore vlastnosti priestoru $\beta(X)$. Tento článok obsahuje citácie na podobné práce iných autorov v rôznych oblastiach matematiky.

Axióma výberu je mnohým ľuďom „intuitívne zrejmá“ a má mnohé prijateľné a užitočné dôsledky. Napriek týmto faktom musíme uznať, že isté dôsledky axiómy výberu sú nepríjemné a neprirodzené. Napríklad použitie axiómy výberu nám umožní skonštruovať lebesguovsky nemerateľnú podmnožinu reálnych čísiel ([101]). Navyše je tu znepokojujúci Banachov-Tarského paradox*) ([1]): Guľa o polomere r sa dá rozložiť na konečný počet kusov (R. M. Robinson ([79]) ukázal, že minimálny možný počet je 5) a znovu zložiť do gule o polomere $2r$. (K. R. Stromberg v práci [96] podáva elegantný, elementárny a sebestačný výklad tohoto výsledku.) Vzhľadom na takéto anomálie neprekvapuje, že rôzni matematici hľadali alternatívy k axióme výberu (pre obsiahly zoznam ekvivalentov axiómy výberu vás odkazujem na prácu H. Rubin a J. Rubin [80]).

5. Axióma determinovanosti

Táto axióma nebola navrhnutá explicitne preto, aby negovala alebo protirečila axióme výberu, a to napriek tomu, ako sa o chvíľku ukáže, že je s ňou nezlučiteľná. Aby sme mohli vysloviť axiómu determinovanosti pouvažujme najprv o nasledujúcej hre. Máme dvoch hráčov I a II a danú množinu $A \subseteq {}^{\omega}\omega$**). V priebehu hry hráči I a II definujú prvok f z ${}^{\omega}\omega$ tak, že striedavo definujú jeho hodnoty. Konkrétne hráč I vyberie $f(1)$, potom hráč II vyberie $f(2)$, potom hráč I vyberie $f(3)$ atď. Hráč I vyhral partiu, ak postupnosť f (prvok množiny ${}^{\omega}\omega$) patrí do množiny A, ináč $f \in {}^{\omega}\omega - A$ a hru vyhráva hráč II. Nech $G(A)$ označuje práve popísanú hru. Povieme, že hra $G(A)$ je determinovaná, ak jeden z hráčov má vyhrávajúcu stratégiu. (Avšak, pojem stratégia je odborný

*) Viz též PMFA 3/1981, str. 151. (Pozn. red.)

**) ${}^{\omega}\omega$ je množina všetkých zobrazení z ω do ω, ω je množina všetkých prirodzených čísiel – prvé nekonečné ordinálne číslo. (Pozn. prekl.)

výraz, ktorý potrebuje definíciu. Pre naše potreby bude stačiť, ak neformálne povieme, že vyhrávajúca stratégia pre hráča I je efektívne pravidlo vedúce k víťazstvu, ktoré definuje $f(2n + 1)$ za predpokladu, že pre všetky k, $0 < k < 2n$, už čísla $f(k)$ boli definované; stratégia pre hráča II je definovaná analogicky.) Konečne môžeme teda formulovať axiómu determinovanosti. Hovorí jednoducho, že hra $G(A)$ je determinovaná pre každé $A \subseteq {}^{\omega}\omega$.

Môžete povedať: „To je všetko pekné a krásne, ale či od každej axiómy nepožadujeme, aby bola intuitívne zrejmá, alebo prinajmenšom, aby zobrazovala nejaký aspekt reálneho sveta, ako ho poznáme?" Dozaista niektoré z hier $G(A)$ sú determinované. Ak napr. A je otvorená*) množina $A = \{f \in {}^{\omega}\omega; f(2) = f(4) = 19\}$, potom určite hráč II má vyhrávajúcu stratégiu. Vôbec ale nemám pocit, že každá hra $G(A)$ je (alebo by mala byť aspoň v istom zmysle) determinovaná. Nie som ani kvalifikovaný, ani nútený odpovedať adekvátne na túto kritiku. Myslím si však, že niektorí z tých, ktorí s touto axiómou extenzívne a produktívne pracovali, by to mohli urobiť efektívne a s pôžitkom ([73, 74, 75]). (V tejto súvislosti pozri oduševnený a vyhranený úvod v [56].)

V každom prípade musíme pripustiť, že táto axióma má niektoré príjemné dôsledky. Napr. za jej predpokladu sú všetky podmnožiny množiny R reálnych čísiel lebesguovsky merateľné ([74]) a každá nespočítateľná podmnožina množiny **R** obsahuje perfektnú množinu. Pripomínam ďalej dôležitý výsledok, ktorý nedávno dokázal D. A. Martin ([71]) v teórii ZFC: Nech A je borelovská množina topologického priestoru ${}^{\omega}\omega$, potom hra $G(A)$ je determinovaná. Prinajhoršom môžeme teda povedať, že axióma determinovanosti je príjemné a prirodzené zovšeobecnenie istej vety dokázateľnej v teórii ZFC.

Najprekvapivejší dôsledok axiómy determinovanosti je jej vplyv na chovanie ordinálnych a kardinálnych čísiel. Kardinálne čísla $\aleph_1$ a $\aleph_2$ sú merateľné, ale čísla $\aleph_n$ pre $2 < n < \omega$ nie sú merateľné (v zmysle definovanom v nasledujúcom paragrafe). Kombinatorické dôkazy týchto a iných dôsledkov tejto axiómy sa uvádzajú v [56].

Povedal som na začiatku, že nebudem brojiť za alebo proti nejakej konkrétnej axióme. Dovoľte mi však osobne zájsť trochu ďalej a priznať sa, že mne sa zdá axióma determinovanosti nepríjemnou a celkom neprijateľnou. Moje dôvody sa dajú označiť ako sebecké a z hľadiska zákonov a logiky neprípustné. Vieme totiž, že z tejto axiómy vyplýva, že každá podmnožina množiny **R** je lebesguovsky merateľná. Pritom W. Sierpiński v [88] má krásnu vetu, že pomocou ľubovoľného netriviálneho ultrafiltra na množine ω môžeme explicitne definovať nemerateľnú podmnožinu množiny **R**. Z axiómy determinovanosti teda vyplýva, že na (diskrétnom) priestore ω neexistujú netriviálne ultrafiltre, symbolicky: $\beta(\omega) - \omega = \phi$.

No a teraz si predstavte, že som naplnil podstatnú časť svojej výskumnej činnosti štúdiom a publikáciami o priestore $\beta(\omega)$, a to so zvláštnym dôrazom na jeho spletitý podpriestor $\beta(\omega) - \omega$. Môj osobný odpor voči prijatiu axiómy determinovanosti je potom ľahko pochopiteľný. Veď axióma determinovanosti zaručuje, že som trávil svoj čas vyšetrovaním vlastností prázdnej množiny.

---

*) ${}^{\omega}\omega$ tu chápeme ako topologický priestor daný metrikou $\varrho(f, g) = 1/2^n$, kde $n = \min\{i; f(i) \neq g(i)\}$ ak $f \neq g$, ináč $\varrho(f, g) = 0$. (Pozn. prekl.)

6. Axiómy „veľkých kardinálnych čísiel" a Gödelova axióma V = L

Zatiaľ sme nemárnili čas vymenúvaním axióm teórie ZF. Pripomeňme si ale, že niektoré z týchto axióm sa týkajú operácií, ktoré definujú nové množiny pomocou už daných. Predstavme si daný model teórie ZF, ktorý obsahuje všetky ordinálne čísla. Odstráňme z neho všetky množiny, ktoré nie sú explicitne dané axiómami. To, čo zostane, je možno menší model. V skutočnosti je to najmenší tranzitívny model teórie ZF, ktorý obsahuje všetky ordinálne čísla. Označme ho L. Povieme, že množina x je konštruktívna, ak platí $x \in L$. Gödelova axióma $V = L$*) ([42]) hovorí, že každá množina je konštruktívna. Teória ZF je neprotirečivá vtedy a len vtedy, ak je neprotirečivá teória $[ZF + (V = L)]$. Keďže zovšeobecnená hypotéza kontinua a axióma výberu sa dajú dokázať z axiómy $V = L$, sú tiež neprotirečivé s teóriou ZF**). (Poznamenávam, že GCH implikuje AC. Tento výsledok pochádza od A. Lindebauma a A. Tarského ([65]) a jeho dôkaz je uvedený v [89]).

Využitie axiómy $V = L$ viedlo k rozriešeniu niekoľkých otázok v topológii (pozri § 9, Suslinov problém) a v iných odvetviach matematiky. Niektoré príklady a historicko-filozofické poznámky o názoroch K. Gödela a iných množinových teoretikov na túto axiómu nájde čitateľ v [29].

Aj keď tvrdenie $V = L$ je neprotirečivé s teóriou ZFC, nie je vetou tejto teórie. S teóriou ZFC je totiž neprotirečivé, že existuje kardinálne číslo κ, ktoré je väčšie než $\aleph_0$ a menšie než $2^{\aleph_0}$ (pozri P. J. Cohen [14, 15, 16]).

Niektoré axiómy veľkých kardinálnych čísiel (ale nie všetky) implikujú negáciu tvrdenia $V = L$. Jedna z nich ([97, 100]), ktorá nás sprevádzala niekoľko desaťročí, vznikla z otázky z oblasti teórie miery: Existuje kardinálne číslo α, ktoré je nosičom***) dvojhodnotovej σ-aditívnej miery, ktorá priraďuje mieru 0 každej jednoprvkovej množine a mieru 1 celému priestoru? (Alternatívne: Existuje α také, že pre nejaký netriviálny ultrafilter p na α platí $\cap\mathcal{F} \in p$ vždy, ak $\mathcal{F} \subseteq p$ a $|\mathcal{F}| \leqq \aleph_0$?) Dá sa ukázať, že najmenšie také kardinálne číslo je merateľné, tj. že existuje netriviálny κ-úplný ultrafilter na κ, t.j. netriviálny ultrafilter p taký, že $\cap\mathcal{F} \in p$ vždy, ak $\mathcal{F} \subseteq p$ a $|\mathcal{F}| < \varkappa$. Nie je ľahké nahliadnuť, že merateľné kardinálne číslo je veľké, ba dokonca veľmi veľké. S. Ulam ([100]) a A. Tarski ([97]) ukázali, že každé také kardinálne číslo je silne nedosiahnuteľné, t.j. α je regulárne a $2^\beta < \alpha$ pre každé $\beta < \alpha$. W. P. Hanf a D. Scott ([45]) (pozri tiež H. J. Keisler [52, Veta 1]) ukázali, že také kardinálne číslo α má α silne nedosiahnuteľných predchodcov.

V teórii ZFC sa nedá dokázať tvrdenie, že existuje nespočítateľné, silne nedosiahnuteľné kardinálne číslo. Dokonca, v teórii ZFC sa ani nedá dokázať neprotirečivosť tohoto tvrdenia s teóriou ZFC. (Diskusiu o tomto fakte, ktorý vyplýva z Druhej Göde-

---

*) V je univerzálna trieda, trieda všetkých množín. (Pozn. prekl.)

**) Hypotéza kontinua je tvrdenie $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, v ďalšom ju budeme označovať CH. Zovšeobecnená hypotéza kontinua je tvrdenie $(\forall\alpha)\,(2^{\aleph_\alpha} = \aleph_{\alpha+1})$; v ďalšom ho budeme označovať GCH. Tvrdenie φ je neprotirečivé s teóriou $\mathcal{T}$, ak teória $[\mathcal{T} + \varphi]$ je neprotirečivá. (Pozn. prekl.)

***) t.j. každá podmnožina čísla α je merateľná. (Pozn. prekl.)

lovej vety o neúplnosti, nájdeme v [86, § 9.10] alebo v [24, str. 56–88].) Existencia takéhoto nedosiahnuteľného kardinálneho čísla neimplikuje platnosť ani neplatnosť tak CH, ako aj axiómy $V = L$. Silnejší predpoklad, a to existencia nespočítateľného merateľného kardinálneho čísla implikuje $V \neq L$, ale nerozhoduje o platnosti CH.

Výsledky odvodené z predpokladu existencie veľkých kardinálnych čísiel majú neočakávaný tvar. Niektoré „hľadia dole" (hovoria o chovaní kardinálnych čísiel (oveľa) menších od príslušného veľkého kardinálneho čísla) a iné „hľadia hore". Z každého uvedieme iba po jednom príklade. Prvý vyzerá zvlášť prekvapivý z hľadiska už spomínaného faktu, že najmenšie merateľné kardinálne číslo je nedosiahnuteľné z malých kardinálnych čísiel $\aleph_0$ a $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c} = |\mathbf{R}|$, ktoré používame v klasickej analýze. V tvrdení druhého výsledku, ktorý uvedieme, sa vyskytuje pojem silne kompaktné kardinálne číslo. Kardinálne číslo α sa nazýva silne kompaktné, ak na každej množine sa každý α-úplný filter dá rozšíriť do α-úplného ultrafiltra. Pre naše potreby poznamenajme, že každé silne kompaktné kardinálne číslo je merateľné.

Veta (R. M. Solovay [90]). Teória [ZFC + „existuje merateľné kardinálne číslo"] je neprotirečivá vtedy a len vtedy, ak je neprotirečivá teória [ZFC + „Lebesguova miera má σ-aditívne rozšírenie definované pre všetky podmnožiny množiny reálnych čísiel"].

Veta (R. M. Solovay [91]). Nech α je silne kompaktné kardinálne číslo a $\beta > \alpha$ je singulárne, silne limitné kardinálne číslo. Potom platí $2^\beta = \beta^+$.*)

Poznámky o vzájomných vzťahoch a užitočnosti axióm o veľkých kardinálnych číslach možno nájsť v [31]. Vzťah medzi viacerými triedami veľkých kardinálnych čísiel je popísaný v [22, zvlášť § 8]. Kunenov pútavý úvod do transcendentálnej hierarchie nedosiahnuteľných vlastností ([60, § 7]) je zároveň fantazmagorický i rigorózny.

7. Martinova axióma

Posledná špeciálna axióma, o ktorej sa chcem zmieniť, má prinajmenšom v jednej zo svojich formulácií zreteľnú topologickú príchuť. V skutočnosti často hovoríme o „hypotéze kontinua topológov". Pre navodenie situácie dovoľte mi poukázať na jednu verziu Baireovej vety o kategórii: V (lokálne) kompaktnom topologickom priestore je prienik spočítateľne mnohých hustých otvorených množín opäť hustá množina. Alebo duálne: V (lokálne) kompaktnom priestore žiadna otvorená množina okrem prázdnej množiny nie je zjednotením spočítateľne mnohých riedkych podmnožín. Martinova axióma**) znie takto ([92, 72, 58]): Ak kompaktný Hausdorffov priestor spĺňa podmienku spočítateľných reťazcov, potom vnútro každého zjednotenia $< 2^{\aleph_0}$ riedkych podmnožín je prázdna množina. (Hovoríme, že priestor spĺňa podmienku spočítateľných reťazcov (skrátene spĺňa CCC; CCC-priestor), ak každý systém navzájom disjunktných neprázdnych otvorených množín je nanajvýš spočítateľný.) Na základe Baireovej

*) J. H. Silver dokázal, že ak GCH platí pod číslom β a $cf(\beta) \geqq \aleph_1$ potom sa predpoklad existencie silne kompaktného kardinálneho čísla dá vynechať. β^+ označuje prvé kardinálne číslo väčšie než β.

**) Martinovu axiómu označíme MA. (Pozn. prekl.)

vety o kategórii bezprostredne vidíme, že Martinova axióma vyplýva z hypotézy kontinua. Martinova axióma je teda zaujímavá len v prípade, že hypotéza kontinua neplatí. Mnohí matematici skutočne prijímajú za formuláciu Martinovej axiómy tvrdenie, ktoré sme uviedli spolu s negáciou hypotézy kontinua.

V nasledujúcom paragrafe predvedieme jedno použitie Martinovej axiómy v topológii (zasvätené poznámky o tejto axióme a ďalšie jej aplikácie viď M. E. Rudinová [82] a J. R. Shoenfield [87]).

Niektoré nerozhodnuteľné topologické tvrdenia

8. CCC × CCC = CCC?

Priestor sa nazýva separabilný, ak v ňom existuje spočítateľná hustá podmnožina. Zrejme súčin konečne mnohých separabilných priestorov je separabilný. Nie je ťažké ukázať, že súčin spočítateľne mnohých separabilných priestorov je separabilný. (Musíme byť pritom trochu opatrní. Ak D_n je hustá v priestore X_n pre $n < \omega$, potom zrejme $\Pi\{D_n;\ n < \omega\}$ je hustá v priestore $\Pi\{X_n;\ n < \omega\}$. Ale z $|D_n| \leqq \aleph_0$ nemôžeme odvodiť $|\Pi\{D_n;\ n < \omega\}| \leqq \aleph_0$ ale iba $|\Pi\{D_n;\ n < \omega\}| \leqq 2^{\aleph_0}$. Napriek tomu nie je ťažké použitím množiny $\{D_n;\ n < \omega\}$ definovať spočítateľnú hustú podmnožinu priestoru $\Pi\{X_n;\ n < \omega\}$. Oveľa prekvapivejší je fakt, že súčin $2^{\aleph_0}$ separabilných priestorov je separabilný. To je špeciálny prípad (pre $\alpha = \aleph_0$) výsledku často citovaného ako Hewitova-Marczewského-Pondiczeryho veta: Nech $\alpha \geqq \aleph_0$, $|I| \leqq 2^{\alpha}$, $\{X_i;\ i \in I\}$ je systém topologických priestorov a pre každé $i \in I$ je $d(X_i) \leqq \alpha$, potom $d(\Pi\{X_i;\ i \in I\}) \leqq \alpha$ ($d(X)$ – hustota priestoru X – je najmenšie kardinálne číslo, ktoré je mohutnosťou nejakej hustej podmnožiny priestoru X). Dôkaz tejto vety spolu s vhodne formulovaným obrátením a odkazmi na literatúru o hustote súčinových priestorov sa dá nájsť v [22, str. 77 nn]. Môj dôkaz prípadu $\alpha = \aleph_0$ ([18]) vyzerá tak jednoducho, že si ho môžeme v krátkosti predviesť.

Veta 8.1. Nech $|I| \leqq 2^{\aleph_0}$ a pre každé $i \in I$ nech platí $d(X_i) \leqq \aleph_0$. Potom pre priestor $X = \Pi\{X_i;\ i \in I\}$ platí $d(X) \leqq \aleph_0$.

Dôkaz. Keďže sa (diskrétny) priestor $\mathbf{Z}$ celých čísiel dá (spojite) zobraziť na hustý podpriestor priestoru X_i, dá sa aj priestor $\mathbf{Z}^{(2^{\omega})}$ spojite zobraziť na hustý podpriestor priestoru $X = \Pi\{X_i;\ i \in I\}$. Stačí teda ukázať, že $d(\mathbf{Z}^{(2^{\omega})}) \leqq \aleph_0$. Nech $\mathbf{R}$ označuje reálnu os s obvyklou topológiou. Ukážeme najprv, že priestor $\mathbf{R}^{(2^{\omega})}$, ktorý sa dá prirodzene stotožniť s priestorom ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$*), je separabilný. Nech $n < \omega$ a $\{\langle x_i, y_i\rangle;\ i \leqq n\} \subseteq \mathbf{R} \times \mathbf{R}$ je taká podmnožina, že $x_i \neq x_j$ pre $i \neq j$. Potom pre dané $\varepsilon > 0$ existuje polynóm f s racionálnymi koeficientmi taký, že pre $i \leqq n$ platí

$$|f(x_i) - y_i| < \varepsilon\,.$$

*) ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$ je množina všetkých reálnych funkcií jednej premennej. (Pozn. prekl.)

Teda (spočítateľná) množina polynómov s racionálnymi koeficientami (označme ju $\mathbf{P}$) je hustá v priestore ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{R}$. Teraz každému $f \in \mathbf{P}$ priradíme $\bar{f}$: $\mathbf{R} \to \mathbf{Z}$ také, že

$$|f(x) - \bar{f}(x)| \leqq 1/2 \quad \text{pre každé} \quad x \in \mathbf{R}\,.$$

Zrejme množina $\{\bar{f}; f \in \mathbf{P}\}$ je hustá v priestore ${}^{\mathbf{R}}\mathbf{Z}$, a teda

$$d(\mathbf{Z}^{(2^\omega)}) \leqq |\mathbf{P}| = \aleph_0\,. \qquad \text{q.e.d.}$$

Chvíľku sme sa zaoberali separabilnými priestormi, lebo je zrejmé, že každý separabilný priestor spĺňa CCC. Navyše E. Marczewski ([69]) ukázal, že ľubovoľný súčin separabilných priestorov spĺňa CCC. (Tento výsledok sa dá ešte podstatne zovšeobecniť. Pozri napr. N. Noble a M. Ulmer [75] alebo W. W. Comfort a A. W. Hager [20, Veta 3.2] alebo W. W. Comfort a S. Negrepontis [22, Veta 3.9].) Moji bývalí študenti ([75]) ukázali, že ak priestor $\Pi\{X_i;\ i \in F\}$ spĺňa CCC pre každú konečnú $F \subseteq I$, potom aj priestor $\Pi\{X_i;\ i \in I\}$ spĺňa CCC. (Aj tu sú možné podstatné zovšeobecnenia, pozri napr. [22, § 3].)

Tieto výsledky evokujú prirodzenú otázku: Je súčin konečne mnohých CCC-priestorov opäť CCC-priestor? Symbolicky: CCC × CCC = CCC? Znie to ako prirodzená otázka nie príliš ťažká na rozriešenie Tento problém sme mali riešiť my, poslucháči graduovanej prednášky z topológie, a bol pritom označený ako náročný. V skutočnosti je v teórii ZFC nerozhodnuteľný. Situáciu pochopíme, ak ho budeme rozoberať spolu s iným, dokonca známejším problémom.

9. Suslinov problém

Je známa veta, pochádzajúca už od G. Cantora ([12]), že reálna os $\mathbf{R}$ (i) je husto usporiadaná, (ii) je úplná, (iii) nemá prvý ani posledný prvok a (iv) je separabilná; navyše je jediný takto usporiadaný priestor (až na izomorfizmus voči usporiadaniu). (Poznamenajme, že je to veta z teórie usporiadania, alebo ak chcete topologická, ale nie je to algebraická veta. Pre tento prípad ignorujeme algebraické vlastnosti množiny $\mathbf{R}$)*). M. Suslin v [93] položil nasledujúcu otázku: Môže podmienka – (iv′) spĺňa CCC – nahradiť podmienku (iv)? Poznamenajme, že Suslin sa nepýtal, či $\mathbf{R}$ má vlastnosť CCC. Isteže má. Ani sa nepýtal, či vlastnosť CCC je všeobecne ekvivalentná separabilnosti (lebo vedel, že nie je). Suslin sa skôr pýtal, či sú separabilita a CCC ekvivalentné za predpokladu ostatných troch podmienok. To je Suslinov problém. Suslinov priestor (resp. Suslinova priamka) je taký priestor, ktorý negatívne odpovedá na Suslinov problém, t.j. je to neseparabilný priestor s vlastnosťami (i), (ii), (iii) a (iv′).

Aký je vzťah medzi Suslinovým problémom a otázkou, či súčin dvoch CCC-priestorov je CCC-priestor? D. Kurepa ([61, 62]) ukázal, že ak S je Suslinova priamka, potom (S spĺňa CCC) $S \times S$ nespĺňa CCC. Neskôr T. Jech ([48]) a S. Tennenbaum ([98]) dokázali, že existencia Suslinovej priamky je neprotirečivá s teóriou ZFC. Ba čo viac, Tennenbaum dokázal túto neprotirečivosť ako s teóriou ZFC + GCH, tak aj s teóriou

---

*) Napr. Interval (0, 1) a množina $\mathbf{R}$ sú izomorfné voči usporiadaniu. (Pozn. prekl.)

ZFC + $\neg$CH. R. B. Jensen ukázal ([50]), že existencia Suslinovej priamky vyplýva z axiómy $V = L$. Dôležitý a inšpirujúci dôkaz tohoto tvrdenia dal podnet pre formulovanie kombinatorického princípu *káro* a sústredil pozornosť na vzťah medzi rekurzívnou definíciou Gödelovho konštruktívneho univerza **L** a čistou kombinatorikou (podrobnosti o Jensenových výsledkoch možno nájsť v [30]).

V jednej nepublikovanej práci R. Laver ukázal, že ak $2^{\aleph_0} = \aleph_1$, potom existuje CCC-priestor X taký, že $X \times X$ nespĺňa CCC. F. Galvin v [38] podal jednoduchý dôkaz Laverovho výsledku spolu s mnohými zovšeobecneniami.

V protiklade k týmto výsledkom R. M. Solovay a F. Rowbottom a nezávisle K. Kunen ukázali, že za predpokladu MA + $\neg$CH má každý CCC-priestor nasledujúcu vlastnosť: Z každého systému mohutnosti $\aleph_1$ neprázdnych otvorených podmnožín sa dá vybrať centrovaný*) podsystém rovnakej mohutnosti. Z toho už bezprostredne vyplýva, že za predpokladu MA + $\neg$CH je súčin konečne veľa CCC-priestorov opäť CCC-priestor. (Dôkazy týchto výsledkov uvádza I. Juhász v [51].) Další dôležitý Jensenov výsledok hovorí, že neexistencia Suslinovej priamky je neprotirečivá s teóriou ZFC + CH. Dôkazu tohoto tvrdenia je venovaná druhá časť práce [30].

Niekoľko predchádzajúcich paragrafov medzi iným poukazuje na to, že dva slávne problémy zo všeobecnej topológie sú nerozhodnuteľné na základe axióm teórie ZFC. Špeciálne existujú modely teórie ZFC, v ktorých neexistuje Suslinova priamka a súčasne každý súčin CCC-priestorov spĺňa CCC a sú modely teórie ZFC, v ktorých existuje Suslinova priamka (ktorá spĺňa CCC a ktorej štvorec nespĺňa). Z toho hľadiska sú tieto naše problémy podobné už uvedenému problému o piatom Euklidovom postuláte a možno aj problému o Veľkej Fermatovej vete.

Treba však poznamenať, že sú tu isté rozdiely. V našom každodennom modeli trojrozmerného Euklidovho priestoru s „bodom", „priamkou" a „rovnobežnosťou" v ich bežnom význame je piaty Euklidov postulát evidentne pravdivý a ľahko sa dokáže. Ak je Veľká Fermatova veta skutočne nerozhodnuteľná, je pravdivá v našom modeli celých čísiel. Naproti tomu neexistuje teraz špeciálny privilegovaný model teórie ZFC (matematikmi všeobecne uznávaný), v ktorom by sa Suslinov problém alebo CCC-problém mohli považovať za rozhodnuté. Videli sme, že existujú modely, a nie nutne bizarné a neprirodzené, v ktorých sa na tieto otázky odpovedá kladne, a iné, v ktorých odpovede sú negatívne. Pre úplnejší a zasvätenejší rozbor Suslinovho problému a problémov z neho odvodených odkazujeme záujemcov na [81, 82] a [30]. Suslinov problém, problém CCC $\times$ CCC = CCC a niektoré podobné topologické tvrdenia, riešenie ktorých závisí od axióm teórie množín, sú predmetom dôkladného a podrobného výskumu z elementárneho hľadiska v práci [2].

10. Fréchetove usporiadanie na množine ${}^{\omega}\omega$

Často sa stáva, že dobre formulované nedvojzmyselné otázky o dobre definovaných matematických objektoch nemôžu byť zodpovedané absolútne. Prekvapivý príklad

*) t.j. prienik ľubovoľných konečne veľa prvkov podsystému je neprázdny. (Pozn. prekl.)

tejto skutočnosti súvisí s množinou ${}^{\omega}\omega$ funkcií z ω do ω, ktorá je usporiadaná tzv. Fréchetovým usporiadaním:

$$f < g \quad \text{ak} \quad \left|\{n \in \omega;\, g(n) \leqq f(n)\}\right| < \aleph_0 .$$

Ľahko vidíme, že $<$ je čiastočné usporiadanie množiny ${}^{\omega}\omega$.

Medzi otázky, ktoré nie sú rozhodnuté axiómami teórie ZFC patria tieto dve:

(1) Existuje konfinálna*) lineárne usporiadaná podmnožina množiny ${}^{\omega}\omega$?

(2) Existuje vzájomne jednoznačné zobraznie z ${}^{\omega}\omega$ na lineárne usporiadanú podmnožinu množiny ${}^{\omega}\omega$, ktoré zachováva usporiadanie?

Otázka (2) sa ukázala byť mimoriadne zaujímavou vďaka súvislosti s nedávnym riešením (R. M. Solovay a H. Woodin) otázky, ktorú položil I. Kaplansky: Existuje nespojitý homomorfizmus z algebry $C[0, 1]$ do nejakej Banachovej algebry? ($C[0, 1]$ označuje Banachovu algebru spojitých funkcií z intervalu $[0, 1]$ do komplexných čísiel. Kaplanského otázka je zovšeobecnením klasickej Geľfandovej vety, ktorá tvrdí, že každý homomorfizmus z algebry $C[0, 1]$ do komplexných čísiel je spojitý.) H. G. Dales ([25]) a J. Esterle ([33]) ukázali, že za predpokladu CH je odpoveď na Kaplanského otázku pozitívna. Woodin ukázal, že v každom modeli teórie ZFC s nespojitým homomorfizmom zmieneného druhu má otázka (2) kladnú odpoveď. Použitím Martinovej axiómy a Cohenovej metódy forcingu**) Solovay skonštruoval model teórie ZFC, v ktorom odpoveď na otázku (2) je negatívna.

Som povďačný profesorovi T. Jechovi za to, že mi poslal kópiu svojej prednášky pre študentov ([49]) o práci Solovaya a Woodina o probléme nespojitého homomorfizmu.

Keď sa už zaoberáme čiastočným usporiadaním priestoru ${}^{\omega}\omega$, nemôžem pritom odolať pokušeniu a nezmieniť sa o jednej z mojich obľúbených viet. Aby som to mohol urobiť, vezmime do úvahy nasledujúce štyri kardinálne čísla: (i) minimálna mohutnosť konfinálnej podmnožiny množiny ${}^{\omega}\omega$, (ii) minimálny počet kompaktných podpriestorov priestoru **R**, ktorých zjednotnie je množina iracionálnych čísiel, (iii) minimálna mohutnosť λ, pre ktorú existuje vnorenie množiny racionálnych čísiel na uzavretý podpriestor priestoru ${}^{\lambda}\omega$, (iv) minimálny počet obojakých množín potrebných na pokrytie vnútrajšku neotvorenej nulovej množiny v $\beta(\omega) - \omega$. Nie je ťažké nahliadnuť, že každé z týchto kardinálnych čísiel je nespočítateľné a menšie alebo rovné $2^{\aleph_0}$. Moja obľúbená veta (väčšina základných čŕt tejto vety pochádza od S. H. Hechlera ([46])) tvrdí, že všetky tieto kardinálne čísla sú si navzájom rovné. Hechler takisto dokázal, že je neprotirečivé s teóriou ZFC, že toto kardinálne číslo môže nadobúdať ľubovoľnú hodnotu λ takú, že $cf(\lambda) > \omega$ a $\lambda \leqq 2^{\aleph_0}$.

Pomocou rovnosti medzi (i) a (ii) Comfort a Negrepontis ([23, Dôsledok 11.8]) ukázali, že nie každá bairovská množina v parakompaktnom priestore je parakompakt-

*) Podmnožina $K \subseteq P$ čiastočne usporiadanej množiny $(P, <)$ sa nazýva konfinálna, ak platí $(\forall x \in P)\,(\exists y \in K)\,(x < y)$, alebo ekvivalentne, ak $P = \bigcup \{\{x;\, x < y\};\, y \in K\}$. (Pozn. prekl.)

**) Slovenský preklad anglického pojmu forcing nie je ešte zaužívaný. V ruštine sa používa termín *вынуждение*, v poľštine *wymuszanie*. Snáď by bol v slovenčine vhodný výraz *vynútenie*, resp. *metóda vynucovania*. (Pozn. prekl.)

ná, a za predpokladu CH, že nie každá bairovská množina v lindelöfovskom priestore je lindelöfovská.

Istý argument, založený na vlastnostiach čiastočne usporiadaného priestoru $\langle {}^{\omega}\omega, < \rangle$, pochádzajúci od B. Balcara, R. Frankiewicza a P. Simona, som použil v prehľadnom článku [19] na dokázanie takéhoto tvrdenia: Ak α a γ sú také kardinálne čísla, že $\alpha > \gamma \geqq \omega$ a priestory $\beta(\alpha) - \alpha$ a $\beta(\gamma) - \gamma$ sú homeomorfné, potom $\gamma = \omega$ a $\alpha \leqq \omega_1$. Ďalšie informácie a dôkazy o tejto jednoducho definovanej množine sa uvádzajú v [82, § VII].

11. Čiastočne usporiadaná množina $\beta(\alpha)$

Existuje ešte iná čiastočne usporiadaná množina blízka topológom, ktorí sú oboznámení s teóriou ultrafiltrov. Vlastnosti tohoto usporiadania nie sú úplne determinované axiómami teórie ZFC. Nech je α nekonečné kardinálne číslo a nech $\beta(\alpha)$ označuje, ako je to obvyklé, Čechovu-Stonovu kompaktifikáciu diskrétneho priestoru α. Pre $f \in {}^{\alpha}\alpha$ nech $\bar{f}$ označuje (jedinú) spojitú funkciu z $\beta(\alpha)$ do $\beta(\alpha)$ takú, že $f \subseteq \bar{f}$. Rudinovej-Keislerove usporiadanie $\lesssim$ je definované na $\beta(\alpha)$ takto: $p \lesssim q$, ak existuje $f \in {}^{\alpha}\alpha$ také, že $\bar{f}(q) = p$. Presne povedané, relácia $\lesssim$ ešte nie je čiastočným usporiadaním množiny $\beta(\alpha)$, lebo z $p \lesssim q$ a $q \lesssim p$ ešte nevyplýva $p = q$. Existuje ale prirodzená relácia ekvivalencie $\sim$ na $\beta(\alpha)$, ktorá zachováva usporiadanie $\lesssim$ a pritom $\langle \beta(\alpha)/_{\sim}, \lesssim \rangle$ je už čiastočne usporiadaná množina. Tieto a iné technické podrobnosti nás teraz nemusia zaujímať (rigorózne pojednanie o vlastnostiach relácie $\lesssim$ je v [22, § 9]).

Mnohé aspekty priestoru $\beta(\alpha)$ sú dobre preskúmané. Poznáme napríklad jeho mohutnosť, váhu a hustotu. S. Shelah nedávno ukázal ([85]), že existuje množina S navzájom $\lesssim$-neporovnateľných prvkov v $\beta(\alpha)$, pre ktorú platí $|S| = 2^{2^{\alpha}}$. Chcem sa zmieniť o veľmi prirodzenej otázke o usporiadanej množine $\langle \beta(\alpha), \lesssim \rangle$, ktorá je podobná otázkam o množine $\langle {}^{\omega}\omega, < \rangle$ v predošlom paragrafe: Existuje konfinálna lineárne usporiadaná podmnožina množiny $\beta(\alpha)$?

Ukážeme si, ako rôzne axiómy (neprotirečivé s teóriou ZFC) po pridaní k teórii ZFC môžu na túto otázku dávať rôzne odpovede. Najprv potrebujeme nasledujúcu vetu, ktorú dokázal A. Hajnal ([43]). Symbol $\mathscr{P}(\alpha)$ v nej označuje potenčnú množinu množiny α a $\mathscr{P}_{\kappa}(\alpha) = \{A \subseteq \alpha; |A| < \kappa\}$.

Veta 11.1. Nech $\omega \leqq \varkappa < \alpha$ sú kardinálne čísla a $f : \alpha \to \mathscr{P}_{\kappa}(\alpha)$ nech je zobrazenie s vlastnosťou: $\xi \notin f(\xi)$ pre každé $\xi < \alpha$. Potom existuje $A \subseteq \alpha$, pre ktoré platí $|A| = \alpha$ a $\xi \notin f(\eta)$ pre každé $\xi, \eta \in A$.

Dôsledok 11.2. Nech $\omega \leqq \alpha$ pričom $(2^{\alpha})^{+} < 2^{2^{\alpha}}$. Nech $S \subseteq \beta(\alpha)$ a nech $|S| = 2^{2^{\alpha}}$. Potom existuje $T \subseteq S$ množina navzájom $\lesssim$-neporovnateľných prvkov mohutnosti $|T| = 2^{2^{\alpha}}$.

Dôkaz. Pre $q \in S$ položme $f(q) = \{p \in S; p \lesssim q \text{ a } p \neq q\}$. Keďže $|f(q)| \leqq |{}^{\alpha}\alpha| = 2^{\alpha} < (2^{\alpha})^{+} < 2^{2^{\alpha}}$, z Hajnalovej vety dostávame (ak čísla κ a α nahradíme číslami

$(2^\alpha)^+$ a 2^{2^α}), že existuje $T \subseteq S$ také, že $|T| = 2^{2^\alpha}$ a $p \notin f(q)$ pre každé $p, q \in T$. Zrejme, množina T má požadované vlastnosti.

Istým spôsobom s týmito výsledkami kontrastujú nasledujúce tvrdenia (pozri [21]).

Veta 11.3. Ak $\alpha \geqq \omega$, $S \subseteq \beta(\alpha)$ a $|S| \leqq 2^\alpha$, potom existuje $q \in \beta(\alpha)$ horné ohraničenie množiny S (t.j. pre všetky $p \in S$ je $p \lesssim q$).

Dôkaz. Nech $S = \{p_\xi; \xi < 2^\alpha\}$ je očíslovanie množiny S, (prípadné opakovanie je prípustné) a nech $p = \langle p_\xi; \xi < 2^\alpha \rangle \in \beta(\alpha)^{(2^\alpha)}$. Vzhľadom na už citovanú Hewitovu-Marczewského-Pondiczeryho vetu existuje spojitá funkcia f z α na hustý podpriestor súčinu $\alpha^{(2^\alpha)}$. Nech g označuje jej spojité rozšírenie z $\beta(\alpha)$ na $\beta(\alpha)^{(2^\alpha)}$ a π_ξ projekciu z $\alpha^{(2^\alpha)}$ na $\alpha_\xi = \alpha$. Vezmime $q \in \beta(\alpha)$, pre ktoré platí $g(q) = p$. Zrejme platí $(\pi_\xi \circ f \in {}^\alpha\alpha$ a $p_\xi = \bar{\pi}_\xi(p) = \bar{\pi}_\xi(g(q)) = \overline{(\pi_\xi \circ f)}(q)$. Dostávame $p_\xi \lesssim q$. q.e.d.

Dôsledok 11.4. Ak $\alpha \geqq \omega$ a $(2^\alpha)^+ = 2^{2^\alpha}$, potom existuje $\lesssim$-lineárne usporiadaná konfinálna podmnožina množiny $\beta(\alpha)$ (mohutnosti 2^{2^α}).

Dôkaz. Nech $\beta(\alpha) = \{p_\xi; \xi < 2^{2^\alpha}\}$. Položme $q_0 = p_0$ a rekurzívne, ak $0 < \xi < 2^{2^\alpha}$ a q_η je definované pre všetky $\eta < \xi$, vyberme q_ξ tak, aby $p_\xi \lesssim q_\xi$ a súčasne $q_\eta \lesssim q_\xi$ pre všetky $\eta < \xi$. Zrejme $\{q_\xi; \xi < 2^{2^\alpha}\}$ má požadovanú vlastnosť.

Poznamenajme, že ak $(2^\alpha)^+ = 2^{2^\alpha}$, potom žiadna podmnožina množiny $\beta(\alpha)$ mohutnosti menšej než 2^{2^α} nemôže byť $\lesssim$-konfinálna, lebo $|\beta(\alpha)| = 2^{2^\alpha}$ a $|\{p \in \beta(\alpha); p \lesssim q\}| \leqq$ $\leqq 2^\alpha$ pre každé $q \in \beta(\alpha)$*).

Z tvrdení 11.2 a 11.4 vidíme, že dve hypotézy $(2^\alpha)^+ < 2^{2^\alpha}$ a $(2^\alpha)^+ = 2^{2^\alpha}$ dávajú pozoruhodne odlišné dôsledky o $\lesssim$-štruktúre množiny $\beta(\alpha)$. Každá z týchto hypotéz je neprotirečivá s teóriou ZFC ([32]). Z prvej vyplýva, že každá podmnožina množiny $\beta(\alpha)$ mohutností 2^{2^α} obsahuje rovnako veľkú množinu $\lesssim$-neporovnateľných prvkov. Z druhej hypotézy vyplýva, že existuje lineárne usporiadaná konfinálna podmnožina množiny $\beta(\alpha)$ mohutnosti 2^{2^α} (ktorá samozrejme nemá ani dvojicu neporovnateľných prvkov).

Táto skutočnosť ma kedysi veľmi znepokojovala. Na rozdiel od CCC-otázky, kde človek môže celkom ochotne pripustiť, že je rôznymi axiomatickými predpokladmi rozdielne determinovaná, cítil som, že Čechova-Stonova kompaktifikácia diskrétneho priestoru α skutočne existuje a je konkrétna. Jednoduchá otázka o štruktúre usporiadania by mala byť absolútne zodpovedateľná. Rozdielne odpovede, ktoré na tú istú otázku vyplývajú z tvrdení 11.2 a 11.4, sa stanú prijateľnejšie, ak si uvedomíme, že otázka sama osebe môže byť preformulovaná v jazyku kardinálnych čísiel α, 2^α, 2^{2^α} a niektorých ich podmnožín. Je sotva prekvapivé, že taká otázka môže mať dve odlišné odpovede v závislosti na tom, či sa číslo $(2^\alpha)^+$ rovná alebo nerovná číslu 2^{2^α}.

*) Poznámka platí aj bez predpokladu $(2^\alpha)^+ = 2^{2^\alpha}$. Ak $(2^\alpha)^+ < 2^{2^\alpha}$, potom množina $\beta(\alpha)$ mohutnosti 2^{2^α} nemôže byť zjednotením menej než 2^{2^α} množín mohutnosti ohraničenej číslom $2^\alpha <$ $< (2^\alpha)^+ < 2^{2^\alpha}$. (Pozn. prekl.)

12. Weissovo riešenie Blumbergovho problému

Prv než skončím, chcel by som uviesť ešte jeden problém, o ktorom sa ukázalo, že jeho riešenie je absolútne, t.j. nezávisí od axióm teórie množín. Najprv trocha histórie. Na počiatku bolo toto pozoruhodné tvrdenie, ktoré pred mnohými rokmi dokázal H. Blumberg ([4]): Nech f je ľubovoľná funkcia z $\mathbf{R}$ do $\mathbf{R}$. Potom existuje hustá podmnožina $D \subseteq \mathbf{R}$ taká, že funkcia $f \mid D$ je spojitá. (Občas sa stáva, že túto vetu niekto zle pochopí. Môže byť pritom v pokušení navrhnúť ako protipríklad charakteristickú funkciu racionálnych čísiel. Táto funkcia totiž nie je spojitá v žiadnom bode množiny reálnych čísiel $\mathbf{R}$. Nie je to však protipríklad na Blumbergovu vetu, lebo množina racionálnych čísiel je hustá podmnožina množiny $\mathbf{R}$ a funkcia je na nej konštantná, a teda spojitá.) Podľa všeobecne zaužívanej terminológie hovoríme, že X je Blumbergov priestor, ak pre každé zobrazenie $f: X \to \mathbf{R}$ existuje hustá podmnožina $D \subseteq X$ taká, že zobrazenie $f \mid D$ je spojité. V pôvodnom Blumbergovom článku [4] je v skutočnosti dokázané, že každý úplný separabilný metrický priestor je Blumergov priestor. Neskôr J. C. Bradford a C. Goffman ([6]) rozšírili toto tvrdenie na bairovské priestory. Začiatkom 70. rokov sa problematika vykryštalizovala do otázky: Je každý kompaktný Hausdorffov priestor Blumbergovým priestorom?

Otázku zodpovedal zaujímavým spôsobom W. A. R. Weiss ([102]). Použil pritom niektoré známe techniky, ktoré zaviedli H. E. White Jr. ([103]) a R. Lévy ([63, 64]), ale aj viacero vlastných nových nápadov. Používajúc teóriu ZFC, Weiss definoval dva kompaktné Hausdorffove priestory, označme ich X a Y, s nasledujúcimi vlastnosťami: Ak platí CH, potom priestor X nie je Blumbergov; ak neplatí CH, potom priestor Y nie je Blumbergov. Je zrejmé, že súčin $X \times Y$, resp. disjunktné zjednotenie $X \cup Y$, je kompaktný Hausdorffov prietor, ktorý nie je Blumbergov.

Pre správne pochopenie Weissovho postupu dôkazu je dôležité si uvedomiť, že vo svojej definícii ani X ani Y nezávisia na platnosti alebo neplatnosti hypotézy kontinua. Oba priestory X aj Y sú dobre definované v teórii ZFC. (V skutočnosti X je Stonov priestor istej známej boolovskej algebry a Y je dedekindovsky úplný, lineárne usporiadaný topologický priestor.) V každom modeli teórie ZFC je teda priestor $X \cup Y$ dobre definovaný kompaktný Hausdorffov topologický priestor. V každom modeli hypotéza kontinua buď platí, alebo neplatí. V každom modeli teda buď X, alebo Y nie je Blumbergov priestor. Preto zrejme $X \cup Y$ nikdy nie je Blumbergov priestor.

13. Záverečné poznámky

Matematika má spolu s celou vedou povinnosť a cieľ skúmať a popisovať reálny svet a naše životné prostredie v najvšeobecnejšom zmysle. To je dozaista časovo a vecne neobmedzená úloha. Nikdy nebudeme vedieť všetko to, čo by sme mohli vedieť. Vedci pristupujú k riešeniu tohto problému s prostriedkami príslušnými ich vlastnej disciplíne. Podľa môjho osobného názoru, ktorý je trochu pesimistický a má nádych rozpačitosti, sme (my matematici) menej prispeli k úspechu tohoto podnikania ako napríklad fyzici a biológovia. Sme síce schopní sformulovať axiómy alebo princípy, ktoré, ako dúfame, vrhnú trochu svetla na daný problém. Ale ak sa to nepodarí, dáme sa na hranie hier a postulovanie tvrdení. Vieme o nich, že sú pravdivé vo formálnom zmysle, t.j. že logicky vyplývajú z našich predpokladov. Nevieme však, či majú nejaký vzťah alebo význam pre náš život. Doteraz nie sme schopní v reálnom svete rozhodnúť pravdivosť alebo nepravdivosť mnohých prirodzených a jednoduchých tvrdení (napr. hypotézy kontinua). Doteraz nie sme schopní jasne definovať matematický model, ktorý by dobre aproximoval reálny svet.

Pre matematika je ľahké opustiť vedecké bádanie reálnej podstaty sveta a stiahnuť sa na pohodlné stanovisko, že nie je a nemôže byť pravdy mimo matematiky a že protichodné matematické pravdy, pokiaľ sú odvodené z tej či onej množiny axióm logicky prípustným spôsobom, sú rovnako zaujímavé a hodnotné. Zaujať takýto postoj znamená zľahčovať matematiku a prispieť k oprávnenosti aforizmu B. Russela ([83]), že „... matematika by mohla byť definovaná ako predmet, v ktorom nikdy nevieme ani o čom rozprávame, ani či to, o čom hovoríme, je pravda".

Matematikom, ktorí veria, že matematika je celkom odpútaná od reálneho sveta, dávam tieto otázky: Ak sa zajtra dozvieme, že hypotéza kontinua platí v reálnom svete, zachovajú si potom svoju zaujímavosť vety založené na Martinovej axióme a negácii hypotézy kontinua? A ak vyjde najavo, že neexistujú nespočítateľné merateľné kardinálne čísla, bude v nás i naďalej vzbudzovať nadšenie prekrásna charakterizácia Ramseyových ultrafiltrov (pochádzajúca od F. Rowbottoma, K. Kunena a iných)? Vieme totiž, že Ramseyov ultrafilter existuje len na merateľnom kardinálnom čísle. Odpoveď na prvú z týchto otázok (ale myslím si i na druhú) je „Nie".

Nemusíme si ale zúfať. Všeobecnú topológiu pred desaťročím mnohí matematici odpísali ako mŕtvy alebo umierajúci odbor. Posledný vývoj v logike a teórii množín, ktorý sme tu naznačili, spôsobil však vo všeobecnej topológii explóziu vzrušenia. Ja s dôverou očakávam ďalšie nepretržité publikovanie nových právd v teórii množín a v topológii, ktoré budú dostatočne hlboké na to, aby boli zaujímavé a dostatočne jednoduché a elegantné, aby som ich mohol pochopiť a oceniť.

Poďakovanie

Som povďačný mnohým matematikom za to, že starostlivo a kriticky prečítali prvú verziu rukopisu. Zvlášť som zaviazaný Garrettovi Birkhofovi, Róbertovi Rosenbaumovi, Stanleyovi Wagonovi a recenzentom. Každý z nich odhalil množstvo mojich chýb a nepozorností — malých i dôležitých. Všetci mi však poskytli podnetné rady, ktorými zvýšili dosah a obsahovú spoľahlivosť tohto článku.

Prekladateľ vyslovuje poďakovanie za pomoc pri preklade kolegovi dr. R. Fričovi, CSc., a jazykovým korektorom J. Krajňákovi a J. Tóthovi.

[1] BANACH, S. and A. TARSKI: *Sur la décomposition des ensembles de points en parties respectivement congruentes.* Fundam. Math. *6* (1924), 244—277.

[2] BENNETT, H. R. and T. G. MCLAUGHLIN: *A Selective Survey of Axiom-Sensitive Results in General Topology.* Texas Tech University Mathematics Series Vol. *12* (1976). Texas Tech University, Lubbock, Texas.

[3] BISHOP, E.: *Foundations of Constructive Analysis.* McGraw-Hill Book Co., 1967, New York, N. Y.

[4] BLUMBERG, H.: *New properties of all real functions.* Trans. Amer. Math. Soc. *24* (1922), 113 — 128.

[5] BOLYAI, J.: *Scientiam spatii absolute veran exhibens: a veritate auf falsitate Axiomatis XI Euclidei independentem.* Maros-Vásárhelyini, 1832, Hungary.

[6] BRADFORD, J. C. and C. GOFFMAN: *Metric spaces in which Blumberg's theorem holds.* Proc. Amer. Math. Soc. *11* (1960), 667—670.

[7] BROUWER, L. E. J.: *Over de Grondslagen der Wiskunde* (*On the foundations of mathematics*). Amsterdam, the Netherlands, 1907. Doctoral dissertation.

[8] BROUWER, L. E. J.: *Over de Onbetrouwbaarheid der logische Principes* (*On the untrustworthiness of logical principles.*). Tijdscr. Wijsbe. *2* (1908), 152—158.

[9] BROUWER, L. E. J.: *Collected works. Vol. 1. Philosophy and Foundations of Mathematics.* A. HEYTING, Ed. North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y. 1974.

[10] BROUWER, L. E. J.: *Collected works. Vol. 2. Geometry, Analysis, Topology and Mechanics.* H. FREUDENTHAL, Ed. North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y. 1976.

[11] CANTOR, G.: *Über eine elementare Frage der Mannigfaltigkeitslehre.* Jahresber. Dtsch. Mathematikerver. *1* (1892), 75—78.

[12] CANTOR, G.: *Beiträge zur Begründung der transfinite Mengen.* Math. Ann. *46* (1895), 481—512.

[13] ČECH, E.: *On bicompact spaces.* Ann. Math. (2) *38* (1937), 823—844.

[14] COHEN, P. J.: *The independence of the continuum hypothesis I,* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *50* (1963), 1143—1148.

[15] COHEN, P. J.: *The independence of the continuum hypothesis II.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *51* (1964), 105—110.

[16] COHEN, P. J.: *Set Theory and the Continuum Hypothesis.* W. A. Benjamin, Inc., New York, N. Y./Amsterdam, the Netherlands, 1966.

[17] COMFORT, W.: *A Theorem of Stone-Čech type, and a theorem of Tychonoff type, without the axiom of choice; and their realcompact analogues.* Fundam. Math. *63* (1968), 97—110.

[18] COMFORT, W. W.: *A short proof of Marczewski's separability theorem.* Amer. Math. Mon. *9* (1969), 1041—1042.

[19] COMFORT, W. W.: *Compatifications: recent results from several countries.* Proc. 1977 South. Topology Conf. La. State Univ. Topology Proc. *2* (1977), 61—87.

[20] COMFORT, W. W. and A. W. HAGER: *Estimates for the number of real-valued continuous functions.* Trans. Amer. Math. Soc. *150* (1970), 619—631.

[21] COMFORT, W. W. and S. NEGREPONTIS: *On families of large oscillation.* Fundam. Math. *75* (1972), 275—290.

[22] COMFORT, W. W. and S. NEGREPONTIS: *The Theory of Ultrafilters.* Grundlehren math. Wiss. Vol. *211.* Springer-Verlag. Berlin—Heidelberg, Federal Republic of Germany/New York, N. Y. 1974.

[23] COMFORT, W. W. and S. NEGREPONTIS: *Continuous Pseudometrics.* Lect. Notes Pure Appl. Math. Vol. *14* (1975). Marcel Dekker, New York, N.Y.

[24] CROSSLEY, J. N. et al.: *What is Mathematical Logic?* Oxford University Press, London—Oxford, England/New York, N. Y., 1972.

[25] DALES, H. G.: *A discontinuous homomorphism from C(X).* Amer. J. Math. 101 (1979), 647—734.

[26] DAVIS, M.: *Hilbert's tenth problem is unsolvable.* Amer. Math. Mon. *80* (1973), 233—269.

[27] DAVIS, M.: *Unsolvable problems.* In *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y., 1977, pp. 567—594.

[28] DAVIS, M., YU. MATIJASEVIČ and J. ROBINSON: *Hilbert's tenth problem. Diophantine equations: positive aspects of a negative solution.* In Mathematical Developments Arising from Hilbert Problems. Proc. Symp. Pure Math. American Mathematical Society *28* (1976), 323—378 Providence, R. I.

[29] DEVLIN, K. J.: *The axiom of constructibility: A guide for the mathematician.* Lect. Notes Math. Vol. *617.* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, Federal Republic of Germany/New York, N. Y., 1977.

[30] DEVLIN, K. J. and H. JOHNSBRÅTEN: *The Souslin problem.* Lect. Notes Math. Vol. *401.* Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, Federal Republic of Germany/New York, N. Y., 1974.

[31] DRAKE, F. R.: *Set theory an introduction to large cardinals.* Studies in Logic and the Foundations of Mathematics Vol. *76.* North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, the Netherlands/ London, England/New York, N. Y., 1974.

[32] EASTON, W. B.: *Powers of regular cardinals.* Ann. Math. Logic *1* (1970), 139—178.

[33] ESTERLE, J.: *Injection de semi-groupes divisibles dans des algébres de convolution et construction d'homomorphismes discontinus de C(K).* Proc. London Math. Soc. (3) 36 (1978), 59—85.

[34] EUCLIDES: *Euclidis opera omnia. Vol. 1—5,* 1883. J. L. Heiberg and H. Merge, Eds. Teubner Classical Library, Leipzig, Germany.

[35] FRAENKEL, A. A.: *Zu den Grundlagen der Cantor-Zermeloschen Mengenlehre.* Math. Ann. *86* (1922), 230—237.

[36] FRAENKEL, A. A.: *Der Begriff „definit" und die Unabhängigkeit des Answahlaxiom.* Sitzungsber. Preuss. Akad. Wiss. Phys.-math. K1., 1922, 253—257.

[37] FREUDENTHAL, H. and A. HEYTING: *The life of L. E. J. Brouwer, Collected Works. Vol. 2.* H. FREUDENTHAL, Ed. North-Holland/American Elsevier, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y., 1976, pp. X—XV.

[38] GALVIN, F.: *Chain conditions and products.* Fundam. Math. *58* (1980), 33—48.

[39] GILLMAN, L. and M. JERISON: *Rings of Continuous Functions.* D. Van Nostrand, Princeton N. J., 1960.

[40] GÖDEL, K.: *Über formal unentscheidbare Satze der Principia Mathematicae und verwanter Systeme, I.* Monatsh. Math. Phys. *38* (1931), 173—198.

[41] GÖDEL, K.: *The consistency of the axiom of choice and the generalized continuum hypothesis.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *24* (1938), 556—557.

[42] GÖDEL, K.: *The Consistency of the axiom of Choice and of the Generalized Continuum Hypothesis with Axioms of Set Theory.* Ann. Math. Stud. No. *3* (1940). Princeton University Press, Princeton, N. J.

[43] HAJNAL, A.: *Proof of a conjecture of S. Ruziewicz.* Fundam. Math. *50* (1961), 123—128.

[44] HALPERN, J. D.: *The independence of the axiom of choice from the Boolean prime ideal theorem.* Fundam. Math. *55* (1964), 57—66.

[45] HANF, W. P. and D. SCOTT: *Classifying inaccessible cardinals.* Not. Amer. Math. Soc. *8* (1961), 445.

[46] HECHLER, S. H.: *On a ubiquitous cardinal.* Proc. Amer. Math. Soc. *52* (1975), 348—352.

[47] HILBERT, D.: *Mathematische Probleme.* Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Kongress zu Paris 1900. Nachr. Akad. Wiss. Göttingen, Math.-Phys. Kl. 1900, 253—297. English translation: Bull. Amer. Math. *8* (1901), 437—479.

[48] JECH, T. J.: *Non-provability of Souslin's hypothesis.* Comment. Math. Univ. Carol. *8* (1967) 291—305.

[49] JECH, T. J.: *The discontinuous homomorphism problem.* Classroom notes, 1977.

[50] JENSEN, R. B.: *Souslin's hypothesis is incompatible with V = L.* (Abstract). Not. Amer. Math. Soc. *15* (1968), 935.

[51] JUHÁSZ, I.: *Martin's axiom solves Ponomarev's problem.* Bull. Acad. Polon. Sci. Sér. Sci. Math. Astron. Phys. *18* (1970), 71—74.
[52] KEISLER, H. J.: *Some applications of the theory of models to set theory.* In *Logic, Methodology and Philosophy of Science.* Proc. 1960 Int. Congr. E. Nagel, Ed. Stanford University Press Stanford, Cal., 1962, 80—86.
[53] KELLEY, J. L.: *The Tychonoff theorem implies the axiom of choice.* Fundam. Math. *37* (1950), 75—76.
[54] KLEIN, F.: *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie.* Math. Ann. *4* (1871), 573—625.
[55] KLEIN, F.: *Über die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie* II. Math. Ann. *6* (1873), 112—145.
[56] KLEINBERG, E. M.: *Infinitary combinatoris and the axiom of determinateness.* Lect. Not. Math. Vol. *612* (1977). Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, Federal Republic of Germany/New York, N. Y.
[57] KREISEL, G.: *Review of L. E. J. Brouwer collected works.* Vol. I. Bull. Amer. Math. Soc. *83* (1977), 86—93.
[58] KUNEN, K.: *Inaccessibility properties of cardinals.* Doctoral dissertation. Stanford University Stanford, Cal, 1968.
[59] KUNEN, K.: *Ultrafilters and independent sets.* Trans. Amer. Math. Soc. *172* (1972), 299—306.
[60] KUNEN, K.: *Combinatorics.* In *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y., 1978, 371—400.
[61] KUREPA, G.: *La condition de Souslin et une propriété caractéristique des nombres réels.* C. R. Acad. Sci. Paris *231* (1950), 1113—1114.
[62] KUREPA, G.: *Sur une propriété caractéristique du continu linéaire et le probléme de Suslin.* Acad. Sci. Serbe Publ. Inst. Math. *4* (1952), 97—108.
[63] LEVY, R.: *A totally ordered Baire space for which Blumberg's theorem fails.* Proc. Amer. Math. Soc. *41* (1973), 304.
[64] LEVY, R.: *Strongly non-Blumberg spaces.* Gen. Topology Appl. *4* (1974), 173—177.
[65] LINDENBAUM, A. and A. TARSKI: *Communication sur les recherches de la théorie des ensembles.* C. R. Varsovie *19* (1926), 299—330.
[66] LOBACHEVSKY, N. I.: *Neue Anfangsgruende de Geometrie, mit einer vollständigen Theorie der Parallelen.* Gelehrte Schriften der Universität Kasan, Kasan, 1836, Russia.
[67] LOBACHEVSKY, N. I.: *Geometrie imaginaire.* Crelle's J. *17* (1837), 295—320.
[68] ŁOŚ, J. and C. RYLL-NARDZEWSKI: *Effectiveness of the representation theory for Boolean algebras,* Fundam. Math. *41* (1955), 49—56.
[69] MARCZEWSKI, E.: *Separabilité et multiplication cartésienne des espaces topologiques.* Fundam Math. *34* (1947), 127—143.
[70] MARTIN, D. A.: *The axiom of determinateness and reduction principles in the analytical hierarchy.* Bull. Amer. Math. Soc. *74* (1968), 687—689.
[71] MARTIN, D. A.: *Borel determinancy.* Ann. Math. *102* (1975), 363—371.
[72] MARTIN, D. A. and R. M. SOLOYAV: *Internal Cohen extensions.* Ann. Math. Logic *2* (1970), 143—178.
[73] MYCIELSKI, J.: *On the axiom of determinateness.* Fundam. Math. *53* (1964), 205—224.
[74] MYCIELSKI, J. and S. SWIERCZKOWSKI: *On the Lebesgue measurability and the axiom of determinateness.* Fundam. Math. *54* (1964), 67—71.
[75] NOBLE, N. and M. ULMER: *Factoring functions on Cartesian products.* Trans. Amer. Math. Soc. *163* (1972), 329—340.
[76] PARIS, J. and L. HARRINGTON: *A mathematical incompleteness in Peano arithmetic.* In *Handbook of Mathematical Logic.* North-Holland, Amsterdam, the Netherlands/New York, N. Y., 1978, 1133—1142.
[77] PEANO, G.: *Arithmetices Principia, Nova Methodo Exposita.* Bocca, Turino, 1889. Italy.
[78] RIESZ, F.: *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre.* In Atti IV Cong. Int. Mat., Rome 1908. G. Castelnuova, Ed. Tipografia R. Acad. Lincei. Rome, Italy, *11* (1909), 18—24.
[79] ROBINSON, R. M.: *On the decomposition of spheres.* Fundam. Math. *34* (1947), 246—260.

[80] RUBIN, H. and J. RUBIN: *Equivalents of the Axiom of Choice.* North-Holland, Amsterdam, the Netherlands, 1963.

[81] RUDIN, M. E.: *Souslin's conjecture.* Amer. Math. Mon. *76* (1969), 113—119.

[82] RUDIN, M. E.: *Lectures on set theoretic topology.* Reg. Conf. Ser. Math. Vol. *23*, 1975. American Mathematical Society, Providence, R. I.

[83] RUSSELL, B.: *Recent works on the principles of mathematics.* Int. Mon. *4* (1901), 83—104.

[84] SEMADENI, A.: *Periods of measurable functions and the Stone-Čech compactification.* Amer. Math. Mon. *71* (1964), 891—893.

[85] SHELAH, S. and RUDIN M. E.: *Unordered types of ultrafiltres.* Proceedings of the 1978 Topology Conference (Univ. Oklahoma, Norman, Okla. 1978) I. Topology Proc. 3 (1978), 199—204 (1979).

[86] SHOENFIELD, J. R.: *Mathematical Logic.* Addison-Wesley, Reading, Mass. 1967.

[87] SHOENFIELD, J. R.: *Martin's axiom.* Amer. Math. Mon. *82* (1975), 610—617.

[88] SIERPIŃSKI, W.: *Fonctions additives non completement additives et fonctions non mesurables.* Fundam. Math. *30* (1938), 96—99.

[89] SIERPIŃSKI, W.: *L'hypothèse géneralisée du continu et l'axiome du choix.* Fundam. Math. *34* (1947), 1—5.

[90] SOLOVAY, R. M.: *Real-valued measurable cardinals. Axiomatic Set Theory.* Proc. Symp. Pure Math. part 1. D. S. Scott Ed., American Mathematical Society, Providence, R. I., *13* (1971), 397—428.

[91] SOLOVAY, R. M.: *Strongly compact cardinals and the GCH.* Proc. Symp. Pure Math. Proc. Tarski Symp. L. Henkin et al. Eds., American Mathematical Society *25* (1974), 365—372.

[92] SOLOVAY, R. M. and S. TENNENBAUM: *Iterated Cohen extensions and Souslin's problem.* Ann. Math. *94* (2), (1971), 201—245.

[93] SOUSLIN, M.: *Probleme 3.* Fundam. Math. *1* (1920), 223.

[94] STONE, M. H.: *Applications of the theory of Boolean rings to general topology.* Trans. Amer. Math. Soc. *41* (1937), 375—481.

[95] STONE, M. H.: *Commemoration of Eduard Čech.* In *General Topology and Its Relations to Modern Analysis and Algebra.* Proc. 1961 Prague Topological Symp. J. Novák Ed., Czechoslovak Academy of Sciences, Prague 1962, Czechoslovakia, 26—28.

[96] STROMBERG, K. R.: *The Banach-Tarski paradox.* Amer. Math. Montly 86 (1979), 151—161.

[97] TARSKI, A.: *Drei Überdeckungssätze der allgemeinen Mengenlehre.* Fundam. Math. *30* (1938), 132—155.

[98] TENNENBAUM, S.: *Souslin's problem.* Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A. *59* (1968), 60—63.

[99] TYCHONOFF, A.: *Über die topologische Erweiterung von Räumen.* Math. Ann. *102* (1930), 544 bis 561.

[100] ULAM, S.: *Zur Masstheorie in der allgemeinen Mengenlehre.* Fundam. Math. *16* (1930), 140 bis 150.

[101] VITALI, G.: *Sul Problema della Misura dei Gruppi di Punti di una Retta.* Bologna, 1905. Italy.

[102] WEISS, W. A. R.: *A solution to the Blumberg problem.* Bull. Amer. Math. Soc. *81* (1975) 957—958.

[103] WHITE, H.E., JR.: *Topological spaces in which Blumberg's theorem holds.* Proc. Amer. Math. Soc. *44* (1974), 454—462.

[104] ZERMELO, E.: *Untersuchengen uber die Grundlagen der Mengenlehre,* I. Math. Ann. *65* (1908), 261—281.