

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Hardy Grant

Co je „moderního“ na moderní matematice?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 41 (1996), No. 3, 134--140

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137767>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1996

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

Co je moderního na „moderní“ matematice?

Hardy Grant

V roce 1901 přišel Bertrand Russell s názorem, často pak citovaným, že v matematice nikdy nevíme, o čem mluvíme, ani zda to, co říkáme, je pravdivé [1]. Dovedu si představit, že většina matematiků dobře cítí, co je za těmito slovy, a bude souhlasit s tím, že jimi vyjádřený pohled je nepochybně moderní. Chtěl bych však tento poslední bod trochu víc vyostřit a naznačit, že Russellův postoj je vypočítán na to, aby se Eukleides, ba dokonce Newton obraceli v hrobě.

Kromě Russellova výroku bych chtěl uvést ještě dva další. Na ten první se rozpo-
menou čtenáři Hardyho *Apologie*, kde je citován souhlasně. Není však o matematice,
nýbrž o poezii; je to známé tvrzení A. E. Housmana (1933), že „poezie není to, co
se říká, ale způsob, jak se to říká“ [2]. Hardy k tomu nedodává, že je tento názor
vypočítán na to, aby se Vergilius nebo Milton obraceli ve *svém* hrobě. A je zde
také třetí prohlášení, mající stejnou moc rozčítit ctihodné duchy, tentokrát jde ale
o výtvarné umění. V r. 1914 prohlásil Clive Bell, že „zobrazovací prvek v uměleckém
díle může škodit, ale nemusí; je vždy irelevantní“ [3]. Chci tím vším naznačit, že tyto
tři zhruba současné citace se dotýkají určitých paralel mezi matematikou a jinými
oblastmi na jedné straně, a určitých rozdílů mezi starou a novou perspektivou na
straně druhé, a že to všechno stojí za prozkoumání.

Klasická tradice

Abych našel další zakotvení v rozsáhlém a amorfním předmětu, dovolám se svědectví
nikoho menšího než Sira Isaiaha Berlina, velkého historika politické a morální filozofie.
Sir Isaiah opakovaně a naléhavě trval na tom, že pro minulé generace se za debatami
v těchto oblastech nacházela sada tří neměnných předpokladů:

Zaprvé,

– že všechny skutečné otázky musí mít pravdivou odpověď, a to jen jednu; všechno
ostatní jsou nutně omyly;

zadruhé,

– že musí existovat spolehlivá cesta k objevování takových pravd;

a zatřetí,

What Is Modern about 'Modern' Mathematics? The Mathematical Intelligencer, Vol. 17,
No. 3 (1995), pp. 62–66.

© 1995 Springer-Verlag New York.

Přeložil JIŘÍ FIALA.

– pravdivé odpovědi (když se najdou) musí být nutně vzájemně slučitelné a musí tvořit jediný celek [4].

Zde se opět mluví především o morálním a politickém myšlení. Jenže Isaiah Berlin předeseílá tomuto seznamu trvalých přesvědčení větu „jakož i ve vědě“; a opravdu by se zdálo — logicky i psychologicky — že tato přesvědčení musí být stvrzena analogickými postuláty o povaze a spolehlivosti lidského poznání světa kolem nás. Přeloženo do těchto termínů by to znamenalo, že naši předkové byli přesvědčeni, že (přínejmenším)

- svět pro nás představuje objektivní realitu, kterou můžeme v principu poznat;
- o světě platí jediná množina pravd, které jsou objektivně platné a vzájemně slučitelné;
- při správném výběru metody jsou tyto pravdy odhalitelné.

Vzdor odpadlíkům a skeptikům se toto přesvědčení nacházelo v samém srdci hlavního proudu epistemologie Západu počínaje středověkem. „Bylo to obecné přesvědčení těch, kdo uvažovali vážně,“ říká velký znalec středověku David Knowles, „že existuje jediné pravdivé racionální pojetí člověka a vesmíru . . . platné v téměř stupni, v němž platí zjevené pravdy křesťanství“ [5]. Pro pohodlí a se vši patřičnou opatrností označme tuto teorii poznání za „klasickou“ nebo (ekvivalentně) „platonskou“.

Odkud pochází ta důvěra, že lidé mohou dosáhnout jistého poznání skutečnosti? Všimněme si především, že je to přece běžné přesvědčení běžného člověka a že takto je to zcela přirozené. Ale sofistickované myšlení k tomu přidalo své propracované racionalizace. Za chvilku poukáží na velkou roli, kterou v tomto ohledu sehrála matematika. Platónův vlivný *Timaios* hovoří o tom, jak je fyzický svět ve skutečnosti modelován podle božských archetypů, což zajišťuje jeho racionalitu [6]. Křesťanství to ještě přesvědčivě podpořilo. Sv. Pavel napsal v listu Římanům: „Jeho věčnou moc a božství, které jsou viditelné, lze totiž od stvoření světa vidět, když lidé přemýšlejí o jeho díle, takže nemají výmluvu“ [7]. Není snad člověk učiněn k obrazu Božímu? A nebylo nám Stvořitelem dáno „přirozené světlo“, jímž můžeme vidět věčné pravdy? Mnozí postulovali základní shodu mezi našimi dušemi a „realitou“; snad nejznámější je Spinozovo diktum, že „uspořádání a vzájemná souvislost idejí je totožné s uspořádáním a vzájemnou souvislostí věcí“ [8]. Nic ze světských záležitostí se nepřihlásilo k této optimistické vizi lidského poznání mocněji než matematika. Přispělo k tomu více myšlenkových proudů. Platónova teorie idejí, zdroj klasické epistemologie, souvisela úzce s přijímaným postavením čísel a geometrických tvarů — nezávisle na lidských myslích, a přesto jim dostupných. Od *Timaiia* ke Keplerovi a Galileimu přetrvávalo přesvědčení, že táž matematická jsoucna byla vůdčími vzory v božské mysli na počátku vesmíru. „Bůh, stvořitel pevné stavby světa,“ psal Boethius (6. stol. po Kr.), „pokládal [aritmetiku] za exemplář svého vlastního myšlení a všechny věci ustavil v souladu s ní“ [9]. Matematika se tudíž jevila jedinečně slibně jako poznání transcendentální skutečnosti. A po ruce byl ovšem opravdový příklad absolutní a jisté pravdy, dosažené správnou metodou, totiž eukleidovská geometrie. To platilo po celou dobu života této tradice.

Tuto platónskou epistemologii nazval John Dewey „diváckou“ teorií poznání [10]. Chápání věčných pravd se podobalo každodenní zkušenosti dívání se a vidění —

rozumí se „okem *duše*“. To znamenalo, že získávání vědění bylo v důležitém smyslu *pasivní* zkušeností. Ne že by tomu chyběla emoční zaujatost a intenzita — žádný čtenář Platóna by si to nemyslel. Ale fakta jsou „vně“ a jsou takřikajíc mimo lidskou kontrolu. Pozorovatel doufá, že je pochopí, nemůže však doufat — a ani nedoufá, že by je měnil nebo přetvářel, natož pak, že by je v nějakém smyslu *tvořil*. To platí zvláště pro matematiku. Řekové zastávali názor, že „matematik nemůže ze své vůle stvořit nějaké věci, stejně tak jako to nemůže dělat zeměpisec; může jen objevovat to, co tady už je, a pojmenovávat to.“ Totožnost pisatele těchto řádků odhalím později.

Tato pasivní povaha získávání vědění se ukazuje jasně v různých metaforách, jimiž se naši předci snažili vysvětlit činnost našich myslí. Už Platón a Aristoteles připodobnili duši vosku přijímajícímu otisk pečeti [11]. Ze všech těchto obrazů byl pravděpodobně nejmocnější a nejpůsobivější obraz myslí jako *zrcadla*, odrážejícího (ne však utvářejícího!) vnější skutečnost. To byla velmi přirozená metafora v kontextu, v němž, jak jsem už řekl, byl duševní akt připodobňován fyzickému aktu vidění. Zrcadlová metafora nabízela navíc vhodné vysvětlení zjevných *selhání* našeho snažení o porozumění: mohlo by se říci, že hříchy a chyby lidí pokřivily a zamlžily zrcadlo, takže zkresluje své obrazy (některé krásné verše v Shakespearově *Vetě za vetu* říkají právě toto) [12]. Metodologické reformátory renesance jako Francise Bacona a Descarta lze dobře vykreslit jako ty, kteří se snažili získat pravdivější odraz skutečnosti vyrovnáváním a leštěním našich duševních zrcadel.

Platónská epistemologie, kterou jsem zde načrtl, vedla k odpovídající estetice, tradiční filozofii uměleckého usilování, a právě zde ten kontrast, který chci vést mezi starými a moderními cestami myšlení, vystupuje zvláště živě, fakticky se stává až opačným pólem [13]. Podle starých představ byla cílem umělce nápodoba („mimesis“) povahy věcí, věčných pravd, a panovala obecná shoda, že jeho vzdělanost mu dovoluje nahlížet je intuicí. Krása jeho díla byla přímo úměrná jeho úspěchu v tomto snažení. Krása byla tudíž objektivní a fakticky totožná s pravdou. Umělec pracoval vědomě v souladu s tradicí, jejíž časem posvěcené konvence musel dodržovat. Nepříslušelo mu, aby vyjadřoval svou vlastní osobnost. Jeho morálním imperativem bylo spíše být dobrým reportérem: vylíčit pravdu věcí, aniž by dovolil do toho zasahovat svým idiosynkraziím nebo předsudkům. Znamenitým příkladem je Dante, vzývající múzy, aby mu pomohly popsat s maximální věrností hrůzy Pekel, jak mu je odhalila jeho vidění [14].

Pokusil jsem se naznačit komplex idejí, který shrnut má tři strany: „klasickou“ neboli platónskou epistemologii, odpovídající monismus v politickém myšlení a doprovodnou filozofii umění. Tradice, která toto společně představovala, byla velmi dlouhá. Počínaje renesancí se nepochybně začínají objevovat námitky proti těmto starým přesvědčením, náznaky nadcházejících změn. Zmíním jen tři:

- V renesanci a po ní oslabil rostoucí kult jedince, sebevědomého génia, starou vizi umělce jako pokorného, anonymního vykladače obecně sdílených pravd.
- Malá menšina myslitelů — doby pozdější pak zvláště si cenily Gianbattista Vica (1668–1744) — přišla s drastickou výzvou tradiční epistemologii. Podle jejich názoru víme s jistotou pouze ty věci, *kteří jsme sami udělali* (včetně matematiky!). Že se tím otevřely možnosti pro subjektivistické a relativistické teorie poznání, je jasné.

- Podobně, počínaje naukou 17. století o „sekundárních kvalitách“ předmětů, pokládaly se kvality, jako jsou barvy nebo chuti, za něco spíše jsoúcího v naší mysli a ne v předmětech samých. Odtud už není daleko k myšlence, že vytváříme-li si obrazy světa, nejsme pasivními záznamníky toho, co je dáno, nýbrž k tomu aktivně přispíváme.

Přes všechny tyto anticipace zůstávala starší tradice ve své většině nedotčena až do 18. století. Podívejte se: v tomto století Voltaire, Leibniz a další stále věřili, že věčné a nutné zákony panují i v tak neuchopitelných oblastech, jako je morálka a metafyzika. Rameau ve Francii mohl stále doufat, že se hudební teorii podaří redukovat na několik jasných a zřetelných principů a matematicky formulovaných pravidel [15]. Winckelmann v Německu hlásá ideál absolutní krásy ve výtvarném umění [16]. Relativismus, pluralismus, subjektivismus jsou stále ještě někde v budoucnosti. Není ani žádný podstatný důvod po něčem takovém pátrat. Nevidaný triumf newtonovské vědy se zdál řešit záhady fyzického světa a nabízet metodologii pro odhalování věčných pravd i v jiných oblastech.

Revoluce romantismu

A tak když v desetiletích kolem r. 1800 nastaly velké změny — když se zrcadlo nakonec rozbilo —, popud k tomu přišel do značné míry z reakce proti matematizujícímu duchu. Pojednat o tom v úplnosti by znamenalo vyprávět celý příběh zrodu a průběhu romantismu, což tady ovšem nejde, ani kdybych k tomu byl kompetentní. Místo toho mohu jen citovat některé z trendů přímo souvisejících s mým tématem.

Tři z nich se zdají zvláště souviset: reakce proti pocítované dominanci vědeckého myšlení, vzrůst nacionalismu a vzrůst historického vědomí. Jednotlivě či společně tyto trendy zajišťovaly, že romantický duch odmítl přiznat výlučné vlastnictví absolutní pravdy nějaké určité skupině lidí, nějakému určitému způsobu vidění, nějaké určité metodologii. Nyní se trvá na tom, že každá skupina, každý národ, má takřikajíc své vlastní okno do světa, své vlastní zkušenosti, vize, hodnoty, které mohou být s hodnotami jiných prostě nesouměřitelné. Vzrůstá přesvědčení, že předpokládané přírodní universální „zákony“ společného světa jsou ve skutečnosti utvářeny určitými lidskými bytostmi a jsou zapuštěny na určitém místě, čase a okolnostech. („Nejsou žádné zákony,“ říká Vautrin Rastignacovi v *Le père Goriot* (1833), „jsou jen okolnosti“ [17].) Isaiah Berlin situuje právě do tohoto období, konce 18. a začátku 19. století, opuštění těch prastarých axiomů politického a sociálního myšlení, které jsem výše citoval. Klíčovou postavou je pro něj Herder s jeho oslavováním jedinečných dějin a povahy každého národa, zvláště pak národa německého [18].

Romantismus viděl v epistemologii radikální náhradu jedné kanonické metafory mysli metaforou jinou. Zrcadlo jako něco, co pasivně odráží vnější dojmy, ustoupilo *lampě*, aktivně osvětlující vnější svět z vnitřku [19]. Coleridge, který je ovšem téměř v srdci celého hnutí, hovoří o tom, že „je to duše, která informuje smysly, a ne že by se duše skládala ze smyslů“ [20]. Vynořuje se tady epistemologie, v níž se poznávané utváří, ba přímo tvoří poznávajícím a samotná idea objektivní, absolutní pravdy se

stává hluboce problematickou nebo se opouští vůbec. Poznání a pravda se stále více jeví jako subjektivní, relativní, fragmentované a pluralistické.

Odpovídajícím způsobem je nyní tradiční filozofie umění v podstatě postavena na hlavu. Umělci nyní výslovně odmítají platonismus, na němž je založena, výslovně popírají (zde cituji soudobé svědectví), že by „krása mohla mít nějakou fixovanou, absolutní podobu“ — zde mluví hudebník, představující kvintesenci romantické hudby, Franz Liszt [21]. Starý příkaz nápodoby, mimese, je předmětem posměchu. Umělec už nečerpá obsah svého díla z obecného vidění skutečnosti a už je neutváří podle obecné tradice; obsah i forma se podobným způsobem stávají hluboce subjektivní. Forma uměleckého díla se často pokládá za významnější než obsah — což je z hlediska starších názorů kacířství, ale je to přesně ten postoj, který byl vyjádřen v poznámkách A. E. Housmana a Cliva Bella, citovaných na začátku. Svoboda tvoření je neomezená, působí však v nepřítomnosti společensky přijatých kánonů významu a hodnoty. Zrodilo se „moderní“ umění.

Pokusil jsem se zdůraznit, jak hluboká, pronikavá a trvalá byla stará platonská tradice, zde odmítnutá. Lze tedy tvrdit, že prolomení celého tohoto komplexu idejí, vzdání se jeho předpokladů, odvržení jeho konvencí, ztráta jeho jistot, přijetí jiných možností byly *tím* hlavním předělem v dějinách západní senzibility a že následkem byla *ta* určující podmínka — někteří by řekli „svízel“ modernity. Spisovatel a kritik Gabriel Jociповici píše [22]:

Co mají všichni tito moderní společného — možná jediná věc, kterou mají společnou — je trvání na faktu, že to, co předcházející generace braly jako *svět*, byl jen *svět viděný brýlemi zvyku* ... Moderní jednohlasně odmítli důsledek, že by normy renesance odpovídaly nutně struktuře skutečnosti ...

I matematika?

Nyní je dobře známo, že velké změny nastaly i v matematice právě v letech revoluce romantismu. Pro mne jsou mnohé z těchto vývojů nápadnou obměnou těch revolučních změn v obecné kultuře, které jsem se snažil popsat. Matematika 19. a 20. století klade stále větší důraz na formu a strukturu proti obsahu — viz Russellův slavný výrok. Absolutnosti a jistoty se hroutily, až mohl Morris Kline bédovat, že matematika „neobsahuje žádné pravdy“ [23]. Axiomy už nejsou tvrzením samozřejmých faktů, ale pouhými předpoklady, jež mohou být více méně libovolné. Systémy axiomů se množily a vnitřní konzistence nahradila pravdu jako kritérium jejich platnosti a hodnoty. Různé matematické stavby koexistují vedle sebe, jako eukleidovská a hyperbolická geometrie, jednotlivě platné, avšak vzájemně neslučitelné — což je přesně to, jak se Herder díval na světonázory národních skupin. Eukleidovská geometrie, po staletí základní příklad objektivní pravdy a nezpochybnitelného vědění, vypadá nyní pouze jako „svět viděný brýlemi zvyku“ a vůbec ne jako „nutná struktura skutečnosti“. Obecněji vzato se kontakty matematických struktur se „skutečností“ stávaly stále záhadnějšími, nebo v očích některých prostě irrelevantními. Tvořivá svoboda individuálního matematika je velmi ceněná, ale občas se zdá, že ústí do svévolnosti a neplodnosti. „Převládající

současný obraz čisté matematiky,“ říká Ivor Grattan Guinness, „je bezduchá akumulace scholastických cvičení v obtížných manipulacích složitých struktur bez ohledu na jejich intelektuální nebo empirické důsledky“ [24]. *Mutatis mutandis* je tón této poznámky ozvěnou nesčetných podrážděných reakcí na moderní experimenty v literatuře, hudbě a umění.

Na otázku vyvolanou názvem tohoto článku, „Co je moderního na »moderní« matematice?“, by odpověď z mezikulturní perspektivy byla přesně ta, že matematika se podílí na mnoha trendech a charakteristikách moderny jako celku. Lze se ptát dál, zda v tomto kontextu mohou být skutečné vlivy mezi matematikou a ostatní kulturou; zde nabízím jen poznámku nejkratší.

Zprv si vzpomeňme, že dlouho *před* vzestupem romantismu se matematika začala zabývat pojmy a jsoucny — iracionálními a komplexními čísly, nekonečně velkými i malými, dimenzemi většími než tři — vypadajícími jako výtvary lidského ducha, které nelze nalézt v zrcadle fyzického světa. Mohl být tento interní trend „vyvolán“ sugestivním působením na jiné myslí? Mohu jen říci, že neznám žádnou přímou evidenci, žádné prohlášení o nějakém takovém vlivu.

Může být signifikantní, že plně *přijetí* těchto exotických jsoucen matematiky muselo počkat až do začátku 19. století, právě do těch desetiletí, v nichž romantismus tak oslabil starou epistemologii? Existují jiné náznaky tohoto opačného směru vlivu, ovlivnění matematiky širším milieu? Já jsem z větší části přesvědčený „internalista“, zvláště na úrovních matematické spekulace 19. století, a nepochybuji o tom, že byly dobré *matematické* důvody ke všem těmto vývojům, citovaným výše, jež jsou tak těsně paralelní modernistickým trendům kdekoli jinde. Je to však absolutně celý příběh?

Dovolte mi dramatizovat to jedním příkladem. V r. 1823 se mladší Bolyai, jásající nad svým objevem hyperbolické geometrie, raduje, že „z ničeho stvořil jiný, zcela nový svět“ — něco, co by Eukleides nikdy nebyl řekl [25]. V téměř téže době Wordsworth, rozpomínající se na doby v Cambridgi, napsal [26]:

„měl jsem svět o mně; byl můj vlastní, udělal jsem ho ...“

— což by Dante nebyl nikdy řekl. Je tato podobnost čistě náhodná? Tito dva lidé se nikdy nepotkali; dýchali ale týž vzduch a ten byl plný revolučních věcí.

Přes všechno, co bylo řečeno, nemohu odolat dát tomuto příběhu závěrečný obrat. Platonismus umírá velmi pomalu — a nikde neumírá pomaleji než v matematice. Dobře je znám hluboký platonismus Kurta Gödela. René Thom prohlásil vášnivě, že „matematické tvary mají existenci nezávislou na myslích, které je zkoumají“ [27]. David Hilbert ke konci života mluvil o předzjednané harmonii mezi přírodou a naším myšlením, harmonii, poznávané námi v matematice a s její pomocí [28]. Citoval jsem výše autora, který řekl, že matematická jsoucna jsou „vně“ a že se mají pozorovat a popisovat tak, jako zeměpisec popisuje věci, a řekl jsem, že to byl postoj Řeků. Ve skutečnosti byl pisatelem těchto slov Gottlob Frege v r. 1884 a zde popsany postoj byl jeho vlastní [29]. Možná, že matematika je skutečně v tomto smyslu nejméně „moderní“ z moderních snah.

L i t e r a t u r a

- [1] BERTRAND RUSSELL: *Recent Work on the Principles of Mathematics*. International Monthly 4 (1901), 84.
- [2] A. E. HOUSMAN: *The Name and Nature of Poetry*. In *Collected Poems and Selected Prose*, London: Allen Lane, The Penguin Press (1988), str. 364.
- [3] CLIVE BELL: *Art*. London: Chatto & Windus (1949), str. 25.
- [4] ISAIAH BERLIN: *The Crooked Timber of Humanity*. New York: Random House (Vintage Books) (1990), str. 5–6.
- [5] DAVID KNOWLES: *The Evolution of Medieval Thought*. New York: Random House (Vintage Books) (1962), str. 55.
- [6] PLATÓN: *Timaios* 29n.
- [7] *Římanům* 1:20.
- [8] SPINOZA: *Etika*, část II, vii. [Citováno podle překladu K. Hubky.]
- [9] BOETHIUS: *De Institutione Arithmetica* (přeloženo Michaellem Masim jako *Boethian Number Theory*). Amsterdam: Editions Rodopi B. V., 1983, I, 1.
- [10] JOHN DEWEY: *The Quest for Certainty*. New York: Minton, Balch, 1929, str. 23.
- [11] PLATÓN: *Theaitetos*. 191c n., 193b–196a, 200c; ARISTOTELÉS: *De anima* 424a.
- [12] SHAKESPEARE: *Veta za vetu*. II, ii, 117–122.
- [13] Nejvzdělanějším a fascinujícím vykladačem a obhájcem tradiční filozofie umění byl ANANDA K. COOMARASWAMY; viz např. *Traditional Art and Symbolism*, Princeton NJ: Princeton University Press (1986).
- [14] DANTE: *Inferno*, xxxii, 10–12.
- [15] RICHARD PAUL: *Jean-Philippe Rameau (1683–1764), the Musician as Philosophe*. Proc. Am. Phil. Soc. 114 (1970), 140–154.
- [16] JOHANN WINCKELMANN: *History of Ancient Art*. In *Winckelmann: Writings on Art*, David Irwin (ed.), London: Phaidon (1972), str. 117n.
- [17] HONORÉ DE BALZAC: *Le père Goriot*. Překlad M. A. Crawforda, London: Penguin (1951), str. 134.
- [18] ISAIAH BERLIN: [4] *passim*.
- [19] M. L. ABRAHAMS: *The Mirror and the Lamp*. New York: Oxford University Press (1953).
- [20] S. T. COLERIDGE: *Table Talk and Omniana of Samuel Taylor Coleridge*. Citováno v [19], str. 56.
- [21] HOWARD E. HUGO (ed.): *The Portable Romantic Reader*. New York: Viking Press (1957), str. 61.
- [22] GABRIEL JOSIPOVICI: *The World and the Book: A Study of Modern Fiction*. London: Macmillan (1971), str. xiii–xiv.
- [23] M. KLINE: *Mathematics in Western Culture*. New York: Oxford University Press (1953), str. 9.
- [24] IVOR GRATTAN-GUINNESS: Br. J. History Sci. 7 (1974), 186.
- [25] JÁNOS BOLYAI: *Dopis ze 3. listopadu 1823*. In ROBERTO BONOLA: *Non-Euclidean Geometry*. New York: Dover (1955), „Translator’s Introduction“ k *The Science of Absolute Space*, str. xxviii.
- [26] WILLIAM WORDSWORTH: *The Prelude*. III, 142.
- [27] O Gödelovi i Thomovi viz PHILIP J. DAVIS and REUBEN HERSCH: *The Mathematical Experience*. New York: Penguin Books (1983), str. 318–319.
- [28] CONSTANCE REID: *Hilbert – Courant*. New York: Springer Verlag (1986), str. 194.
- [29] G. FREGÉ: *The Foundations of Arithmetics*. 2. oprav. vydání, překlad J. L. Austin, Evanston IL: Northwestern University Press (1980), str. 108.