Dagmar Glückaufová; Milan Vlach

Diskrétní úlohy dynamického programování [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 13 (1968), No. 5, 267--277

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137724

POKROKY MATEMATIKY, FYZIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK XIII — ČÍSLO 5

DISKRÉTNÍ ÚLOHY DYNAMICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ*)

DAGMAR GLÜCKAUFOVÁ, MILAN VLACH, Praha

DISKRÉTNÍ STOCHASTICKÉ ÚLOHY DYNAMICKÉHO PROGRAMOVÁNÍ

V úlohách dynamického programování se často setkáme se soustavami, které jsou jen zčásti regulovatelné, protože na jejich chování mají vliv náhodné faktory.

Obecnou formulaci těchto tzv. stochastických úloh dynamického programování nelze podat, neboť náhodné faktory mohou působit na chování soustavy zcela odlišnými způsoby. Omezíme se proto v této kapitole na formulaci hlavních typů stochastických úloh.

1. Příklady prvých dvou typů stochastických úloh dynamického programování: úloha o náhradních dílech a úloha o těžbě ze dvou dolů

Soustava prochází stavy v n-etapách, jež jsou popsány stavovými vektory $\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_2, \ldots$ $\ldots, \mathbf{p}_n$.

Nový stav je funkcí stavu předchozího a provedeného rozhodnutí, stejně jako tomu bylo v úlohách deterministických (viz odst. 1,1), to znamená

$$\mathbf{p}_{i+1} = T(\mathbf{p}_i, q_i) \quad i = 1, 2, \ldots, n-1\,. \tag{2.1}$$

Kromě toho mohou být stavové vektory $\mathbf{p}_1, \ldots, \mathbf{p}_n$ svázány jistou omezující podmínkou, např. tvaru

$$\sum_{i=1}^{n} a_i^j \mathbf{p}_i^{(j)} \leqq b^{(j)}\,, \quad j = 1, \ldots, k\,, \quad \mathbf{p}_i^{(j)} \geqq 0\,, \tag{2.2}$$

kde $p_i^{(j)}$ jsou složky vektoru $\mathbf{p}_i$; k je rozměr stavového vektoru. Ke každému stavovému vektoru $\mathbf{p}_i$ je přiřazena náhodná veličina v_i s daným pravděpodobnostním rozložením a dále funkce stavového vektoru $\mathbf{p}_i$ a náhodné veličiny v_i; tuto funkci označíme $\varphi_i(\mathbf{p}_i, v_i)$. Úlohou je provést rozhodnutí v každé z n etap, jimiž soustava prochází, jinými slovy: nalézt rozhodnutí (zpravidla je lze vyjádřit jako čísla)

*) Dokončení ze 4. č.

$q_1, \ldots, q_{n-1}$ tak, aby střední hodnota veličiny $\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p_i, v_i)$ vzhledem k náhodným veličinám $v_1, \ldots, v_n$ byla minimální.

To znamená nalézt

$$\min_{q_1, q_2, \ldots, q_{n-1}} \; \underset{v_i}{E} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p_i, v_i) \,.^1) \tag{2.3}$$

Tato úloha se liší od deterministické úlohy dynamického programování v podstatě pouze minimalizovanou účelovou funkcí. Tím, že hledáme minimum střední hodnoty účelové funkce

$$\sum_{i=1}^{n} \varphi_i(p_i, v_i)\,,$$

která je funkcí náhodných veličin $v_1, \ldots, v_n$, převedli jsme stochastickou úlohu dynamického programování na úlohu deterministickou. Proto ani řešení této úlohy se nebude lišit od řešení, které již známe z prvé kapitoly. Uvedeme nyní konkrétní příklad.

Tento příklad patří mezi úlohy, které na prvý pohled (podobně jako úloha optimálního rozdělení zdrojů) nemají nic společného s víceetapovým rozhodovacím procesem, neboť po nás žádají jednorázové rozhodnutí a nikoli rozhodnutí prováděná postupně v jednotlivých etapách, a tedy v čase. Teprve jejich formulací jako úlohy dynamického programování, to znamená umělým rozčleněním na etapy, vysvitne jejich příbuznost s víceetapovými procesy, které probíhají v reálném čase.

Předpokládejme, že skladujeme celkem n druhů náhradních dílů, dále, že máme k dispozici d m^3 skladovacího prostoru a že každý ze skladovaných náhradních dílů zabere postupně $a_1, a_2, \ldots, a_n$ m^3 tohoto prostoru. Nechť dále π_j znamená ztrátu za jeden náhradní díl j-tého druhu, který není na skladě. Kromě toho předpokládejme, že poptávka po j-tém náhradním dílu v_j je náhodnou veličinou s Poissonovým rozložením s parametrem μ_j. Úkolem je určit, kolik kusů každého druhu náhradních dílů se má skladovat, aby ztráta vzniklá nedostatkem náhradních dílů byla minimální. Označme x_j počet skladovaných náhradních dílů druhu j. To znamená, že máme řešit následující úlohu:

Minimalizovat funkci

$$z = \sum_{j=1}^{n} \left[\pi_j \sum_{k=x_j}^{\infty} (k - x_j)\, p(k, \mu_j)\right] \tag{2.4}$$

při omezení $x_j \geqq 0$, x_j celá,

$$\sum_{j=1}^{n} a_j x_j \leqq d\,, \tag{2.5}$$

---

1) Symbolem $\underset{v_i}{E}$ rozumíme střední hodnotu přes všechna v_i i $i = 1, \ldots, n$.

kde

$$p(k; \mu_j) = \frac{\mu_j^k}{k!} l^{-\mu_j}$$

(odhadem pro μ_j je střední hodnota poptávky po j-tém náhradním dílu). Je zřejmé, že

$$kp(k; \mu_j) = \mu_j p(k-1; \mu_j), \quad k \geqq 1 .$$

Lze tedy psát

$$\sum_{k=x_j}^{\infty} (k - x_j)\, p(k_i \mu_j) = \begin{cases} \mu_j P(x_j - 1; \mu_j) - x_j P(x_j; \mu_j) ; & x_j \geqq 1 , \\ \mu_j ; \quad x_j = 0 \end{cases}$$

kde

$$P(x_j; \mu_j) = \sum_{k=x_j}^{\infty} p(k; \mu_j) .$$

Funkce $\varphi_i(\mathbf{p}_i, v_i)$ jsou zde tvaru

$$\begin{aligned} \pi_i(v_i - x_i) \quad &\text{pro} \quad v_i \geqq x_i , \\ 0 \quad &\text{pro} \quad v_i < x_i ; \end{aligned}$$

omezení (2.2) je tvaru (2.5).

Rozhodnutí q_i zde představuje počet skladovaných součástek druhu i; vztahy (2,1) jsou zde speciálního tvaru, tj.

$$x_i = q_i$$

a dále

$$a_{i+1} x_{i+1} \leqq d - \sum_{j=1}^{i} a_j x_j .$$

Jak je z formulace úlohy zřejmé, je

$$\begin{aligned} &\min_{q_1,\ldots,q_n} E_{v_i} \sum_{i=1}^{n} \varphi_i(\mathbf{p}_i, v_i) = \\ (2.6) \qquad &= \min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{j=1}^{n} [\pi_j \sum_{k=x_j}^{\infty} (k - x_j)\, p(k; \mu_j)] = \\ &\min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{j=1}^{n} [\mu_j P(x_j - 1; \mu_j) - x_j P(x_j; \mu_j)] ; \end{aligned}$$

definujeme

$$f_k(d) = \min_{x_1,\ldots,x_n} \sum_{j=1}^{k} \pi_j [\mu_j P(x_j - 1; \mu_j) - x_j P(x_j; \mu_j)] , \tag{2.7}$$

kde minimalizujeme přes všechna celá nezáporná vyhovující podmínce

$$\sum_{j=1}^{k} a_j x_j \leqq d .$$

K výpočtu $\{f_k(d)\}_{k=1}^n$ užijeme rekurentního vztahu

$$(2.8) \qquad f_k(d) = \min \{\pi_k[\mu_k P(x_k - 1; \mu_k) - x_k P(x_k; \mu_k)] + \\ + f_{k-1}(d - a_k x_k)\}, \quad k = 2, 3, \ldots, n,$$

kde minimum hledáme přes $x_k = 0, 1, \ldots, [d/a_k]$ [1])

$$f_1(d) = \min_{x_1} \{\pi_1[\mu_1 P(x_1 - 1; \mu_1) - x_1 P(x_1; \mu_1)]\},$$

kde minimum hledáme přes $x_1 = 0, 1, \ldots, [d/a_1]$. Hledaná hodnota je potom $f_n(d)$.

Další typ stochastických úloh dynamického programování se od předcházejícího liší pouze tvarem rozhodovacího kritéria. Obecně popisovat proto tento typ znovu nebudeme a omezíme se pouze na ilustrativní příklad, převzatý z Bellmanovy práce [2].

Předpokládejme, že máme dvě ložiska nějaké suroviny, přičemž prvé ložisko, jež označíme jako A, obsahuje množství x, ložisko B pak množství y uvažované suroviny. K těžbě máme k dispozici pouze jedno zařízení, značně citlivé k poruchám. Bude-li zařízení pracovat v dole A, potom s pravděpodobností P_1 vytěžíme část a_1 vyskytující se suroviny a s pravděpodobností $1 - P_1$ dojde k poruše zařízení a nevytěžíme nic.

Analogicky pro ložisko B: vytěžíme část a_2 s pravděpodobností P_2 a k poruše dojde s pravděpodobností $1 - P_2$.

Na počátku každého časového období (např. měsíce) se rozhodujeme, v kterém dole máme zařízení použít. Úkolem je stanovit plán použití těžebního zařízení na n časových období dopředu tak, aby celkové množství vytěžené suroviny za n období bylo maximální (dojde-li k poruše zařízení dříve než za n období, je proces ukončen dříve).

Jde o stochastickou úlohu a budeme maximalizovat střední hodnotu celkového množství vytěžené suroviny.

V každé etapě se rozhodujeme pouze mezi dvěma eventualitami A, B. Řešením úlohy je nalézt posloupnost rozhodnutí pro ložisko A nebo B, kterou označíme posloupností písmen A, B např.

$$A, B, B, A, A, B, \ldots,$$

jejíž maximální délka je n písmen.

Předpokládejme nyní, že v prvém období jsme provedli rozhodnutí $q_1 = A$; výsledek dosažený v tomto období závisí však ještě na náhodném faktoru, takže na začátku druhého období je s pravděpodobností P_1 popsán stav vektorem

$$\mathbf{p}_2 = (x - a_1 x, y)$$

a proces bude ukončen koncem prvního období s pravděpodobností $1 - P_1$.

---

[1]) $[d/a_k]$ znamená největší celé číslo menší nebo rovné d/a_k.

Analogicky provedeme-li v prvém období rozhodnutí $q_1 = B$, je na začátku druhého období stav soustavy s pravděpodobností P_2 popsán vektorem $\boldsymbol{p}_2 = (x, y - a_2 y)$ a s pravděpodobností $1 - P_2$ bude proces ukončen koncem prvního období.

Definujme posloupnost funkcí $f_k(x, y)$ jako střední hodnotu vytěžené suroviny za k období při optimální posloupnosti rozhodnutí v k obdobích.

Volbě rozhodnutí A je přiřazena střední hodnota suroviny vytěžené za jedno období $P_1 a_1 x$; volbě rozhodnutí B je přiřazena střední hodnota vytěžené suroviny za jedno období.

Je tedy

$$f_1(x, y) = \max \left[P_1 a_1 x, P_2 a_2 x\right] \text{ [1]},$$

má-li těžení trvat jen jedno období. Má-li těžení trvat B období a rozhodujeme-li se na začátku období pro B, je obdobně

$$f_k^B(x, y) = P_2[a_2 y + f_{k-1}(x, (1 - a_2)\, y)],$$

kde $f_{k-1}(x, (1 - a_2)\, y)$ představuje optimální výsledek těžby za druhé až k-té období, tj. za $(k - 1)$ období. Stejně, volíme-li v prvním období rozhodnutí A, je

$$f_k^A(x, y) = P_1[a_1 x + f_{k-1}((1 - a_1)\, x, y)].$$

Chceme-li dostat *optimální* rozhodnutí v k etapách, je nutno provést takové rozhodnutí, které vede k většímu množství vytěžené suroviny. Dostáváme tedy konečně:

$$f_k(x, y) = \max \left[f_k^A(x, y), f_k^B(x, y)\right] \text{ [2]} =$$
$$= \max \{[P_1(a_1 x + f_{k-1}((1 - a_1)\, x, y)], [P_2(a_2 y + f_{k-1}(x, (1 - a_2)\, y)]\}.$$

2. Sekvenční stochastická úloha dynamického programování

Stav soustavy popsaný stavovým vektorem $\boldsymbol{p}$ nebude nyní funkcí pouze předchozího stavu a provedeného rozhodnutí, jako tomu bylo v případě deterministickém (a také v případě prvých dvou typů stochastických úloh, viz (2,1)), ale závisí ještě na náhodném faktoru.

Předpokládejme tedy, že za počátečního stavu soustavy popsaného vektorem $\boldsymbol{p}_1$ bylo přijato rozhodnutí q_1. Na rozdíl od deterministického případu nebude tímto rozhodnutím a daným počátečním stavem určen jednoznačně nový stav: nový stav bude ještě záviset na hodnotě, které nebude náhodná veličina vyjadřující vliv náhodných faktorů na soustavu v prvé etapě (v prvém časovém období).

Označíme $\boldsymbol{p}_2 = T(\boldsymbol{p}_1, q_1, r_1)$ stav, který nastane při rozhodnutí q_1 a při realizaci r_1 náhodné veličiny v první etapě. Protože $\boldsymbol{p}_2$ závisí na hodnotě, kterou

---

[1]) Zde opět $\max [b_1, b_2]$ značí větší z čísel b_1, b_2.

[2]) Zde opět $\max [b_1, b_2]$ značí větší z čísel b_1, b_2.

nabude náhodná veličina, r_1 je též náhodnou veličinou. Provedením rozhodnutí q_2 dospějeme analogicky ke stavu

$$p_3 = T(p_2, q_2, r_2) \quad \text{atd.}$$

až provedením rozhodnutí q_n dospějeme ke stavu

$$p_{n+1} = T(p_n, q_n, r_n),$$

kde r_i značí realizaci příslušné náhodné veličiny.

Předpokládejme (a z řady aplikací je vidět, že tento předpoklad je dosti realistický), že náhodné veličiny představující vliv náhodných faktorů na soustavu v jednotlivých etapách jsou navzájem nezávislé.

Připomeňme si, že počínaje stavovým vektorem p_2 jsou stavové vektory náhodnými veličinami; poněvadž prováděná rozhodnutí q_1 počínaje q_2 závisí na okamžitém (náhodném) stavu soustavy, závisí rozhodnutí q_1 na hodnotách $r_1, \ldots, r_{i-1}$, kterých nabudou náhodné veličiny. S každým n-etapovým procesem tohoto typu spojujeme jistou funkci, o které opět předpokládáme, že má markovskou vlastnost a která je tvaru

$$F(p_1, \ldots, p_n; q_1, \ldots, q_n; r_1, \ldots, r_n) = \sum_{i=1}^{n} g_i(p_i, q_i, r_i).$$

Chtěli bychom nyní volit rozhodnutí $q_1, \ldots, q_n$ tak, aby funkce F nabývala svého maxima. Avšak při jakékoli volbě těchto rozhodnutí je funkce F náhodnou veličinou. Optimální rozhodnutí $q_1, \ldots, q_n$ lze ovšem provést např. tak, aby střední hodnota $\bar{F}$ funkce F přes všechny náhodné veličiny nabývala své maximální hodnoty (střední hodnota je opět funkce s markovskou vlastností), neboť platí

$$\bar{F} = \sum_{i=1}^{n} \bar{g}_i(p_i, q_i, r_i).$$

Zdálo by se, že jde o pouhou změnu kritérií; místo původní účelové funkce maximalizujeme nyní její střední hodnotu. Avšak ve skutečnosti tomu tak není, rozdíl záleží v samé struktuře obou procesů. V případech dosud probraných byla řešením úlohy jedna optimálně vybraná posloupnost rozhodnutí $(q_1^*, \ldots, q_{n-1}^*)$; v případě sekvenčním je tato optimální posloupnost posloupností funkcí náhodných veličin (přiřadíme-li rozhodnutím čísla, což bude pravidlem); v každém konkrétním procesu bude posloupnost nabývat jiných hodnot v závislosti na tom, jakou cestou se (vlivem náhodných faktorů) ubírá uvažovaný proces.

Naším úkolem není tedy udat jen jistou n-tici rozhodnutí, ale v každé etapě nalézt pro každý přípustný stav (tj. stav, k němuž v důsledku náhodných faktorů může dojít) vhodné optimální rozhodnutí; odtud název sekvenční. V dříve probraných úlohách byla posloupnost optimálních rozhodnutí jen jedna a úkolem bylo ji předem stanovit; v sekvenční úloze posloupnost optimálních rozhodnutí je posloupností funkcí náhodných veličin; kterých hodnot tyto funkce nabývají, se určuje až v průběhu procesu v závislosti na náhodně vzniklé situaci.

Jde o tzv. regulaci se „zpětnou vazbou“; od faktického stavu soustavy k jejímu řízení. A právě z tohoto důvodu se zdá výhodné použít dynamického programování k řešení některých sekvenčních stochastických úloh, neboť již z povahy tohoto přístupu vyplývá, že v každé etapě se rozhodnutí automaticky určuje jako funkce stavového parametru příslušné etapy.

Označíme-li nyní

$$f_n(p_1) = \max_{q_1,\dots,q_n} \underset{r_i}{E}\,^{1)}\, F(p_1, \dots, p_n;\ q_1, \dots, q_n;\ r_1, \dots, r_n) \tag{2.9}$$

a

$$f_{n-k}(p_k) = \max_{q_k,\dots,q_n} \underset{r_k}{E} \{ \sum_{i=k}^{*} g_i(p_i, q_i, r_i) \} ,$$

lze řešení sekvenční stochastické úlohy popsat následujícími známými funkcionálními vztahy:

$$\begin{aligned} f_1(p_n) &= \max_{q_n} \underset{r_n}{E} \left(g_n(p_n, q_n, r_n)\right) , \\ f_n(p_1) &= \max_{q_1} \underset{r_1}{E} \{g_1(p_1, q_1, r_1) + f_{n-1}(T(p_1, q_1, r_1))\} . \end{aligned} \tag{2.10}$$

Předpokládáme-li dále, že všechny náhodné veličiny r_i [2] $i = 1, \dots, n$ mají stejné rozložení dané distribuční funkcí $G(r)$, lze rekurentní vztahy (2,2) přepsat ve tvaru:

$$\begin{aligned} f_1(p_n) &= \max_{q_n} \int g_n(p_n, q_n, r)\, \mathrm{d}G(r) , \\ f_n(p_1) &= \max_{q_1} \int [g_1(p_1, q_1, r) + f_{n-1}(T(p_1, q_1, r))]\, \mathrm{d}G(r) . \end{aligned} \tag{2.11}$$

Je-li konečně rozložení všech náhodných veličin r_i stejné a navíc diskrétní, tj. každá náhodná veličina r_i nabývá hodnot $S_1, \dots, S_M$ s pravděpodobnostmi $P_1, \dots$ $\dots, P_M$, lze rekurentní vztahy psát v poměrně jednoduchém tvaru:

$$\begin{aligned} f_1(p_n) &= \max_{q_n} \left(\sum_{j=1}^{M} P_j g_n(p_n, q_n, S_j) \right) , \\ f_n(p_1) &= \max_{q_1} \left[\sum_{j=1}^{M} P_j \{ (g_1(p_1, q_1, S_1) + f_{n-1}(T(p_1, q_1, S_j)) \} \right] . \end{aligned} \tag{2.12}$$

Odtud je vidět, že po formální stránce je tvar funkcionálních rovnic (a tedy i výpočetní postup) u obou procesů týž; rozdíl záleží pouze ve struktuře získaného řešení. Užitím

---

[1]) Symbolem $\underset{r_i}{E}$ rozumíme opět střední hodnotu přes všechna r_i; $i = 1, \dots, n$.

[2]) Ve shodě s literaturou nerozlišujeme v označení mezi náhodnou veličinou a její realizací.

rekurentních vztahů (2,12) dostaneme posloupnost optimálních rozhodnutí

$$(q_1^*, q_2^*(p_2), \ldots, q_n^*(p_n)) .$$

Všechny prvky této posloupnosti závisí na náhodném stavu soustavy; jsou tedy funkcemi náhodných veličin $r_1, \ldots, r_n$. Získané řešení použijeme k řízení procesu následujícím způsobem:

V prvé etapě provedeme rozhodnutí q_1^* a čekáme na výsledek této etapy p_2 (jenž závisí na hodnotě náhodné veličiny r_1).

V druhé etapě zjistíme rozhodnutí q_2^* příslušné k výsledku prvé etapy p_2 (tj. vyhledáme v tabulce hodnot funkce $q_2^*(p_2)$ hodnotu příslušnou k argumentu p_2) a vyčkáme výsledku druhé etapy, jenž závisí na náhodném faktoru r_2 atd.

Úloha teorie skladu jako příklad sekvenční stochastické úlohy dynamického programování

Předpokládejme, že máme regulovat zásobu jednoho druhu zboží během n časových období. Na počátku každého období lze objednat zboží k doplnění skladu. Pro jednoduchost předpokládejme, že dodací lhůta je konstantní a že objednávka učiněná na počátku období přijde vždy před koncem uvažovaného období. Nechť dále v_j jsou navzájem nezávislé náhodné veličiny nabývající jen diskrétních hodnot a značící poptávku po zboží v j-tém časovém období. Označme $p_j(v_j)$ pravděpodobnost, že náhodná veličina nabude hodnoty v_j[1] (poptávka po zboží je v jednotlivých časových obdobích různá; náhodné veličiny v_j značící poptávku po zboží v jednotlivých časových obdobích mají proto různá pravděpodobnostní rozložení). Požadavky, které má systém splnit v okamžiku, kdy zboží není na skladě, jsou zaznamenány a splněny přednostně hned, jakmile je zboží dodáno.

Náklady na dodání x_j jednotek zboží na počátku j-tého období jsou tvaru

$$A_j\delta_j + c_jx_j\,, \quad \text{kde} \quad \delta_j = \begin{cases} 0 & \text{pro} \quad x_j = 0 \\ 1 & \text{pro} \quad x_j > 0 \end{cases} \tag{2.13}$$

(tj. jde o jisté pevné náklady plus náklady přímo úměrné počtu objednávaných jednotek). Kromě toho je nutno ještě uvažovat náklady na skladované zboží a dále jisté penále, k němuž dochází, když systém nemá zboží na skladě a nemůže požadavek okamžitě splnit. Pro jednoduchost shrneme společně oba druhy těchto nákladů a vyjádříme je jako funkci $g_j(x_j + y_j)$, kde y_j je množství zboží, které máme na počátku j-tého období na skladě, x_j objednávka učiněná během j-tého období.

Stav soustavy je v každé etapě popsán množstvím zboží, které je na skladě na počátku uvažovaného období, tedy y_j. V každé etapě (tj. v každém časovém období) se rozhodujeme, kolik jednotek zboží objednáme; budiž x_j velikost objednávky na počátku j-tého období $x_j \geqq 0$.

---

[1]) Viz poznámka [2]) na str. 273 pod čarou.

Stav soustavy v následujícím období závisí však ještě na velikosti poptávky, která, jak jsme se již zmínili, je náhodná veličina a kterou jsme v období j-tém označili v_j.

Lze tedy psát

$$y_{j+1} = y_{j+1}(y_j, x_j, v_j) = y_j + x_j - v_j\,; \tag{2.14}$$

pro všechna $j = 2, \ldots, n$, kde $y_j = y_1 + \sum_{i=1}^{j-1} x_i - \sum_{i=1}^{j-1} v_i$, přičemž je dáno y_1 (skladované množství na počátku prvého období).

Při dané množině hodnot x_j, $j = 1, \ldots, n$ a dané množině hodnot náhodných veličin v_j jsou celkové náklady systému za n období

$$\sum_{j=1}^{n} \alpha^j [A_j \delta_j + c_j x_j + g_j(x_j + y_j)]\,, \tag{2.15}$$

kde $0 < \alpha < 1$ je diskontní faktor, který při větším počtu plánovacích období je nutno uvažovat a pomocí něhož se náklady diskontují k počátku prvého období. Pravděpodobnost, že náhodné veličiny v jednotlivých obdobích nabudou hodnot $v_1, \ldots, v_n$ je (v důsledku učiněného předpokladu jejich nezávislosti) rovna součinu pravděpodobností

$$p(v_1),\ p(v_2), \ldots, p(v_n)\,.$$

Naší úlohou je nalézt čísla $x_1, \ldots, x_n$ (tj. rozhodnout o velikosti objednávky na počátku každého období) tak, aby střední hodnota nákladů systému (vzhledem k náhodným veličinám $v_1, \ldots, v_n$) za n období byla minimální. Jde tedy o to určit

$$z = \min_{\{x_1, \ldots, x_n\}} \sum{}^* \Big[\prod_{j=1}^{n} p_j(v_j)\Big] \Big\{\sum_{j=1}^{n} \alpha^j [A_j \delta_j + c_j x_j + g_j(x_j + y_j)]\Big\}\,, \tag{2.16}$$

kde minimum hledáme přes všechna nezáporná x_j, $j = 1, 2, \ldots, n$; součet $\sum^*$ zde i všude dále znamená součet přes všechny náhodné veličiny v_j, $j = 1, \ldots, n$ a přes všechny hodnoty, které nabývají.

Definujme nyní následující posloupnost funkcí:

$$\begin{aligned} f_k(\xi) = \min_{x_k, \ldots, x_n} \sum{}^* \Big[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)\Big] \Big\{\sum_{j=k}^{n} \alpha^{j-k} [A_j \delta_j + c_j x_j] + \\ + g_k(\xi + x_k) + \sum_{j=k+1} \alpha^{j-k} g_j\Big(\xi + \sum_{i=k}^{j} x_i - \sum_{i=k}^{j-1} v_i\Big)\Big\} \quad k = 1, \ldots, n\,. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Minimum hledáme přes všechna nezáporná $x_k, x_{k+1}, \ldots, x_n$; $f_k(\xi)$ představuje tedy minimální střední náklady za k-té až n-té období, diskontované k počátku období k-tého, je-li velikost skladovaného množství na počátku k-tého období rovna ξ a $f_1(y_1) = z$ (viz vztah (2.16)).

Upravíme nyní (2.17) takto:

$$f_k(\xi) = \min_{x_k} \{\sum{}^*[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)] [A_k\delta_k + c_k x_k + g_k(\xi + x_k)] + \tag{2.18}$$

$$+ \alpha \min_{x_{k+1},\ldots,x_n} \sum{}^*[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)] \times \{ \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^{j-k-1}[A_j\delta_j + c_j x_j +$$

$$+ g_{k+1}(\xi + x_{k+1} - v_k)] + \sum_{j=k+2}^{n} \alpha^{j-k-1} g_j(\xi + \sum_{i=k}^{j} x_i - \sum_{i=k}^{j-1} v_i)\} .$$

Protože platí

$$\sum{}^*[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)] \, h(v_k, \ldots, v_n) =$$

$$= \sum_{v_k=0}^{\infty} p_k(v_k) \times \{\sum{}^*[\prod_{j=k+1}^{n} p_j(v_j)] \, h(v_k, \ldots, v_n)\} ,$$

přičemž h je libovolná funkce náhodných veličin $v_k, \ldots, v_n$ můžeme (2.18) přepsat takto:

$$f_k(\xi) = \min_{x_k} \{\sum{}^*[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)] \times [A_k\delta_k + c_k x_k + g_k(\xi + x_k)] +$$

$$+ \alpha \sum_{v_k=0}^{\infty} p_k(v_k) \times [\min_{x_{k+1},\ldots,x_n} \sum{}^*[\prod_{j=k+1}^{n} p_j(v_j)] \times$$

$$\times \{ \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^{j-k-1} A_j\delta_j + c_j x_j + g_{k+1}(\xi + x_k + x_{k+1} - v_k) +$$

$$+ \sum_{j=k+2}^{n} \alpha^{j-k-1} g_j(\xi + x_k - v_k + \sum_{i=k+1}^{j} x_i - \sum_{i=k+1}^{j-1} v_i)\}]\}$$

$$k = 1, \ldots, n - 1 .$$

Protože výraz $A_k\delta_k + c_k x_k + g_k(\xi + x_k)$ nezávisí na $v_k, \ldots, v_n$ a protože

$$\sum{}^*[\prod_{j=k}^{n} p_j(v_j)] = 1 ,$$

dostáváme

$$f_k(\xi) = \min_{x_k} \{A_k\delta_k + c_k x_k + g_k(\xi + x_k) +$$

$$+ \alpha \sum_{v_k=0}^{\infty} p_k(v_k) [\min_{x_{k+1},\ldots,x_n} \sum{}^*[\prod_{j=k+1}^{n} p_j(v_j)] \times$$

$$\times \{ \sum_{j=k+1}^{n} \alpha^{j-k-1}[A_j\delta_j + c_j x_j + g_{k+1}(\xi + x_k + x_{k+1} - v_k)] +$$

$$+ \sum_{j=k+2}^{n} \alpha^{j-k-1} g_j(\xi + x_k - v_k + \sum_{i=k+1}^{j} x_i - \sum_{i=k+1}^{j-1} v_i)\}]\} .$$

Užitím definice $f_{k+1}(\xi)$ dostáváme pak

$$(2.11) \qquad f_k(\xi) = \min_{x_k} \left[A_k \delta_k + c_k x_k + g_k(\xi + x_k) + \alpha \sum_{v_k=0}^{\infty} p_k(v_k) f_{k+1}(\xi + x_k - v_k) \right]$$

a konečně

$$f_n(\xi) = \min_{x_n} \left[A_n \delta_n + c_n x_n + g_n(x_n + \xi) \right].$$

Jako řešení této úlohy dostaneme posloupnost

$$(x_1^*, x_2^*(y_2), \ldots, x_n^*(y_n)).$$

Opět všechny prvky této posloupnosti kromě prvého závisí na náhodných veličinách $v_1, \ldots, v_n$ ovlivňujících stav soustavy v každém uvažovaném období.

ZÁVĚR

V uvedených příkladech stochastických procesů bylo pravděpodobnostní rozložení vystupujících náhodných veličin předem dáno. Další stupeň v hierarchii těchto procesů vzniká, jestliže rozložení nejsou předem známa a máme-li k dispozici pouze jejich apriorní odhad a možnost učit se z průběhu procesu. Dostáváme se pak k velmi zajímavé, ale dosud málo rozvinuté oblasti teorie adaptivních procesů.

Dalším příkladem jsou procesy, při kterých je třeba rozhodovat v každém okamžiku z jistého časového intervalu $\langle t_0, T \rangle$. Také tato oblast tzv. spojitých rozhodovacích procesů, která má úzký vztah k variačnímu počtu, se vymyká z rámce daného článku.

PŘESNÉ MĚŘENÍ DÉLEK ELEKTROMAGNETICKÝMI VLNAMI

RUDOLF TULAK, Martin

V posledních letech byla v našem státě vyzkoušena celá řada zahraničních optických a rádiových dálkoměrů, které jsou určeny k přesnému měření délek v rozsahu od 200 m do 50 km. Dosažené výsledky, charakterizované neobvyklou přesností 1 : 100 000 až 1 : 1 000 000, potvrzují, že bude možno použít přístrojů i pro nejpřesnější geodetické práce a že četná úhlová měření budou v budoucnu nahrazena měřením délkovým. Cílem článku je seznámit s touto novou měřickou metodou širší čtenářskou veřejnost.