

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Pavel Chmela

Matematické vyjádření barvy a problémy barevného vidění

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 9 (1964), No. 2, 65--[72a],73

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137655>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1964

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

MATEMATICKÉ VYJÁDŘENÍ BARVY A PROBLÉMY
BAREVNÉHO VIDĚNÍ

PAVEL CHMELA, Olomouc

ÚVOD

Problémům barevného vidění se ve fyzikální literatuře obvykle věnuje malá pozornost, snad proto, že tato otázka není záležitostí ryze fyzikální, ale také záležitostí fyziologickou. Přes to hraje barva v našem běžném životě poměrně významnou roli a nejen v běžném životě, ale i ve vědecké práci, například u interferenčních zařízení, která používají bílého světla, je otázka barevného vidění velmi důležitá.

V tomto článku bych se chtěl stručně zmínit o některých základních problémech barevného vidění z hlediska fyzikálního i fyziologického.

SPEKTRÁLNÍ BARVY A BARVY SLOŽENÉ

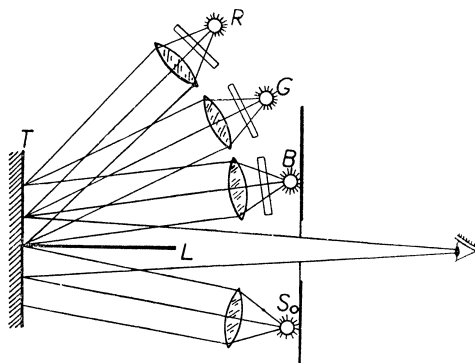
Rozkladem bílého světla hranolem obdržíme barevné spektrum, což je jeden z elementárních důkazů toho, že bílé světlo je složeno z celé řady monochromatických barevných světél. Je známo, že vlnová délka slunečního záření se ve viditelné oblasti spojitě mění asi od 400 m μ do 700 m μ . V tomto článku budeme uvažovat pouze tuto oblast vlnových délek, poněvadž normální lidské oko nemá orgánů, které by vnímaly vlnové délky kratší nežli 400 m μ anebo delší nežli 700 m μ .

Spektrum bílého světla neobsahuje však některé barvy, jinak z běžné praxe známé. Příkladem toho jsou například barvy purpurové. Kromě toho barvy, se kterými se běžně setkáváme, nemají takový stupeň sytosti jako barvy spektrální. Z toho je možno usuzovat, že většina vnímaných barev není podmíněna jedním monochromatickým světlem, ale že vjem určité barvy je obvykle způsobován celou řadou monochromatických světél.

Z řady pokusů je známo, že určitého barevného odstínu je možno dosáhnout smícháním několika jiných barev, které mícháme v určitých poměrech. Naskytá se otázka, jakým minimálním počtem monochromatických světél je možno docílit většiny známých barevných odstínů. Z mnoha měření vyplynulo, že složením tří barev, obsažených ve slunečním spektru, z nichž první leží v oblasti modré ($\lambda \doteq 430$ m μ), druhá v oblasti žlutozelené ($\lambda \doteq 550$ m μ) a třetí v oblasti červené ($\lambda \doteq 700$ m μ),

je možno docílit většiny běžně známých barevných odstínů, mícháme-li tyto barvy v určitých poměrech.

Realizaci je možno provést zařízením, jehož schéma je podáno na obr. 1, kde T je dokonale bílé stínítko, L je přepážka rozdělující zorné pole, S_0 zdroj způsobující barevné, popřípadě bílé osvětlení dolní části stínítka T . R , G , B jsou monochromatické zdroje vysílající světla o vlnových délkách $\lambda_R = 700 \text{ m}\mu$, $\lambda_G = 546,1 \text{ m}\mu$, $\lambda_B = 435,8 \text{ m}\mu$. Světelný tok, který jednotlivé zdroje vysílají, je možno regulovat například clonou. Zdroje jsou umístěny v ohniskách spojných čoček, takže horní část stínítka je homogenně osvětlena světlem ze všech tří zdrojů. Regulací světelných toků pocházejících od zdrojů R , G , B měníme barvu, ve které se jeví horní část stínítka, tak dlouho, až docílíme stejného barevného odstínu jako u dolní části osvětlené zdrojem S_0 .



Obr. 1.

Takovým způsobem je například možno zjistit, v jakých poměrech je nutno míchat tři barvy R , G , B , abychom docílili barvy bílé.

VEKTOROVÉ VYJÁDŘENÍ BARVY

Předpokládejme, že stínítko má konstantní odrazivost v celém rozsahu viditelné oblasti. To znamená, že světelný tok, který vchází do oka při pozorování stínítka, osvětleného monochromatickým světlem, je přímo úměrný osvětlení, které je tímto zdrojem způsobeno.

Za předpokladu, že při osvětlení horní části stínítka třemi barevnými zdroji R , G , B se lidskému oku jeví toto osvětlení v barvě bílé, označíme dílčí osvětlení, která jsou způsobena jednotlivými zdroji, R , G , B . Tato osvětlení budeme v dalším výkladu nazývat *jednotkovými barvami*. Určení bílého osvětlení provedeme tak, že dolní část stínítka osvětlíme bílým zdrojem. Při stejné velikosti obou osvětlení musí horní i dolní část stínítka představovat pro lidské oko homogenně osvětlenou plochu.

Nyní osvětlíme dolní část stínítka barevným zdrojem S_0 a pomocí clon seřídíme osvětlení horní části na stejnou velikost a stejný barevný odstín.

Osvětlení dolní části stínítka zdrojem S_0 označíme symbolicky součinem $f'F$, kde f' vyjadřuje velikost osvětlení a F barevný odstín vnímaný okem. Při stejném barevném osvětlení horní části označíme R' , G' , B' , osvětlení, která jsou způsobena jednotlivými zdroji R , G , B . Výsledné osvětlení $f'F$ je tedy možno symbolicky vy-

jádrít jako součet tří osvětlení \mathbf{R}' , \mathbf{G}' , \mathbf{B}' :

$$(1) \quad f'\mathbf{F} = \mathbf{R}' + \mathbf{G}' + \mathbf{B}' .$$

Poměry osvětlení způsobených jednotlivými zdroji při barevném osvětlení a při osvětlení bílém označíme písmeny r' , g' , b' :

$$(2) \quad r' = \frac{\mathbf{R}'}{\mathbf{R}}, \quad g' = \frac{\mathbf{G}'}{\mathbf{G}}, \quad b' = \frac{\mathbf{B}'}{\mathbf{B}} .$$

Rovnici (1) je tedy možno psát ve tvaru:

$$(3) \quad f'\mathbf{F} = r'\mathbf{R} + g'\mathbf{G} + b'\mathbf{B} ,$$

kde \mathbf{R} , \mathbf{G} , \mathbf{B} jsou jednotkové barvy.

Z uvedené rovnice je patrné, že úloha skládání tří barev je analogická úloze skládání vektorů v trojdimenzionálním prostoru. Vektorové vyjádření světelného vjemu je přirozené proto, že světelný vjem je charakterizován barevným odstínem a velikostí světelného toku, který vchází do oka. Barva je vyjádřena směrem vektoru a symbolicky označena \mathbf{F} , velikost světelného toku je charakterizována velikostí vektoru a je úměrná osvětlení. Odpovídá jí tedy veličina f' .

Poněvadž se nám nejedná o absolutní velikost osvětlení, ale o barevný odstín, tj. z hlediska analytického nejde nám o absolutní hodnotu vektoru výsledné barvy, ale o směr, tj. o kvalitu výsledné barvy, je možno rovnici (3) upravit následovně:

Nechť

$$(4) \quad r' + g' + b' = m ,$$

potom můžeme zavést nové souřadnice

$$(5) \quad r = \frac{r'}{m}, \quad g = \frac{g'}{m}, \quad b = \frac{b'}{m} ,$$

takže

$$(6) \quad f'\mathbf{F} = m(r\mathbf{R} + g\mathbf{G} + b\mathbf{B}) .$$

Je tedy

$$(7) \quad \mathbf{F} = r\mathbf{R} + g\mathbf{G} + b\mathbf{B}$$

a absolutní hodnota vektoru výsledné barvy je dána veličinou m :

$$(8) \quad f' = m = r' + g' + b' .$$

Veličiny r , g , b nazýváme *barevnými souřadnicemi* a veličinu m modulem. Veličina m , jak už bylo řečeno, charakterizuje jas výsledné barvy a pro kvalitativní výzkum skládání barev nemá její absolutní hodnota podstatného významu.

Je zřejmé, že pro barevné souřadnice platí rovnice

$$(9) \quad r + g + b = 1 .$$

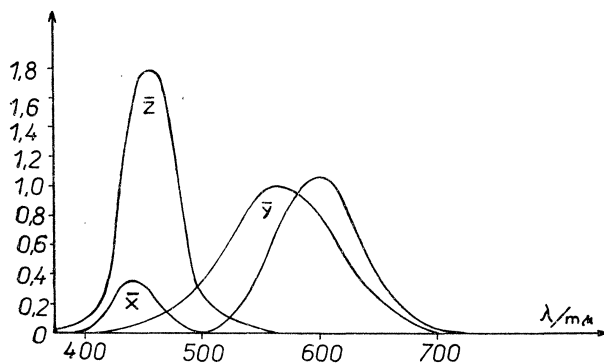
Barevné souřadnice r , g , b mají ve vektorovém vyjádření barvy podobný význam jako směrové kosiny vektoru.

Volba souřadného systému byla zde provedena tak, že jsme jako jednotkové barvy definovali tři barevná osvětlení, jejichž výslednicí byla barva bílá. Je zřejmé, že tato definice souřadné soustavy závisí na vlastnostech receptoru, tj. lidského oka. Pro jiný indikátor barvy, na příklad pro systém fotočlánků, by jednotkové barvy mohly být definovány zcela odlišně. I u dvou různých pozorovatelů mohou se zde projevit určité odchylky.

SOUVISLOST TEORIE SKLÁDÁNÍ BAREV SE STAVBOU OKA

Je známo, že sítnice obsahuje dva druhy světelných receptorů, a to tyčinky a čípky. Tyčinky jsou velmi citlivé na změnu intenzity světla, ale téměř vůbec nereagují na změnu barvy. Při denním světle je jejich funkce potlačena. Naproti tomu čípky jsou méně citlivé k malým změnám světelné intenzity, ale velmi citlivé ke změnám vlnové délky světla. Z mnoha pokusů a s přihlédnutím k vadám barvosleposti vyplynula teorie o existenci tří druhů čípků, které jsou různě citlivé k jednotlivým vlnovým délkám. Citlivosti jednotlivých druhů čípků v závislosti na vlnové délce světla označíme $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$. Závislost citlivosti, která je graficky znázorněna na obr. 2, byla přijata v roce 1931 Mezinárodní osvětlovací komisí jako nepatrně pozměněný návrh GULDINŮV a je dnes považována za standardní citlivost normálního oka.

Existuje velmi těsná analogie s předcházejícím vektorovým vyjádřením barvy. Při pozorování předmětů například v denním světle nejsou tyto předměty osvětleny třemi monochromatickými zdroji, ale světlem, obsahujícím obvykle všechny vlnové délky v intervalu asi od 400 m μ do 700 m μ . Protože receptorem je lidské oko, které nevnímá vlnové délky mimo tento interval, neuvažujeme záření ultrafialové a infračervené.



Obr. 2.

Připadá-li na monochromatické světlo o vlnové délce λ světelný tok vcházející do oka $\Phi(\lambda)$, bude velikost podnětů, které toto světlo u každého ze tří druhů čípků způsobí, dána vztahy:

$$(10) \quad X_\lambda = \bar{x}(\lambda) \Phi(\lambda), \quad Y_\lambda = \bar{y}(\lambda) \Phi(\lambda), \quad Z_\lambda = \bar{z}(\lambda) \Phi(\lambda),$$

kde $\bar{x}(\lambda)$, $\bar{y}(\lambda)$, $\bar{z}(\lambda)$ jsou příslušné hodnoty citlivostí jednotlivých druhů čípků ke světlu o vlnové délce λ .

Protože však nepůsobí jedno monochromatické světlo, ale souhrn světél, jejichž

vlnová délka se mění v celé viditelné oblasti, je při určování výsledného podnětu nutno sečíst všechny elementární podněty odpovídající jednotlivým vlnovým délkám λ , což znamená provést integraci přes celou viditelnou oblast. Viditelná oblast je však již vymezena křivkami citlivosti. Proto můžeme integrační meze volit v rozmezí od 0 do ∞ . Výsledné podněty X, Y, Z jsou tedy dány vztahy:

$$(11) \quad X = \int_0^{\infty} \bar{x}(\lambda) \Phi(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int_0^{\infty} \bar{y}(\lambda) \Phi(\lambda) d\lambda, \quad Z = \int_0^{\infty} \bar{z}(\lambda) \Phi(\lambda) d\lambda.$$

Výsledný světelný vjem je vlastně souhrn tří vjemů uskutečněných všemi třemi druhy čípků. Barevné souřadnice, které zde označíme písmeny x, y, z , budeme definovat jako poměry vjemu jedním druhem čípků k celkovému světelnému vjemu:

$$(12) \quad x = \frac{X}{X + Y + Z}, \quad y = \frac{Y}{X + Y + Z}, \quad z = \frac{Z}{X + Y + Z}.$$

Z hlediska fyziologického bychom pak mohli barevný vjem chápat jako výsledný nervový vzruch, který vzniká světelným drážděním 3 receptorů současně, při čemž kvalita vjemu závisí na vzájemném poměru vzruchů v jednotlivých receptorech.

Poněvadž světelný tok $\Phi(\lambda)$ vcházející do oka je úměrný velikosti osvětlení $E(\lambda)$ a odrazivosti, která je obvykle rovněž funkcí vlnové délky, $R(\lambda)$, a při výpočtech barevných souřadnic nejde o absolutní velikosti světelných vjemů, ale o vzájemné poměry, můžeme v integrálech (11) zaměnit světelný tok $\Phi(\lambda)$ součinem $E(\lambda) R(\lambda)$. Vztahy (11) potom nabývají tvaru:

$$(13) \quad X = \int_0^{\infty} \bar{x}(\lambda) E(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad Y = \int_0^{\infty} \bar{y}(\lambda) E(\lambda) R(\lambda) d\lambda, \quad Z = \int_0^{\infty} \bar{z}(\lambda) E(\lambda) R(\lambda) d\lambda.$$

V případě propuštěného světla přichází pak v úvahu závislost propustnosti na vlnové délce $T(\lambda)$.

Poněvadž pro barevné souřadnice platí vztah

$$(14) \quad x + y + z = 1,$$

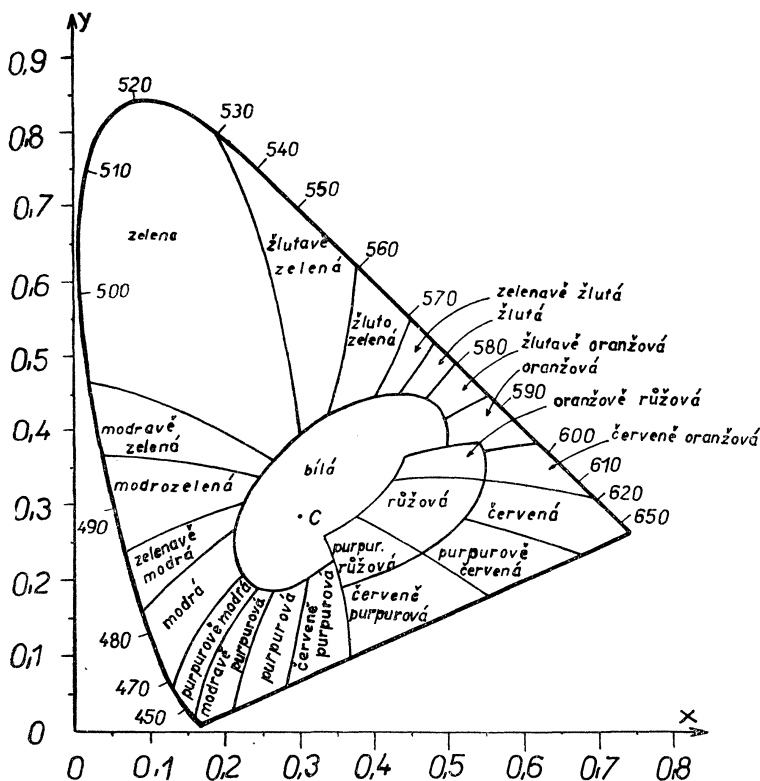
postačí k definici barvy dvě barevné souřadnice. Obvykle volíme souřadnice x, y . Grafické znázornění je provedeno na obr. 3.

Souřadnice všech skutečných barev jsou uvnitř plochy. Křivka omezující tuto plochu se nazývá křivka spektrálních barev. Spojnice obou jejích koncových bodů představuje barvy nespektrální — purpurové, které obdržíme, smícháme-li okrajové barvy spektra bílého slunečního světla, při čemž vynecháme střední vlnové délky. Bod C představuje ideální bílou barvu.

Křivku spektrálních barev získáme numerickým vyhodnocením integrálů (13)

*) Poznámka: Nevlastní integrály je nutno vyhodnotit numerickými metodami, poněvadž křivky $\bar{x}(\lambda), \bar{y}(\lambda), \bar{z}(\lambda)$ nelze vyjádřit analyticky. Jsou definovány pouze svými tabulkovými hodnotami.

pro osvětlení $E(\lambda)$, způsobené monochromatickým světlem, jehož vlnovou délku měníme ve viditelné oblasti po libovolně malých intervalech. Například pro vlnovou délku $\lambda = 570 \text{ m}\mu$ jsou odpovídající tabulkové hodnoty citlivosti $\bar{x} = 0,7621$, $\bar{y} = 0,9520$, $\bar{z} = 0,0021$. Volíme-li stínítko s odrazivostí $R = 1$ a osvětlení 1 lx , je $X = \bar{x} = 0,7621$, $Y = \bar{y} = 0,9520$, $Z = \bar{z} = 0,0021$. Těmto hodnotám odpovídají barevné souřadnice $x = 0,4441$, $y = 0,5547$.



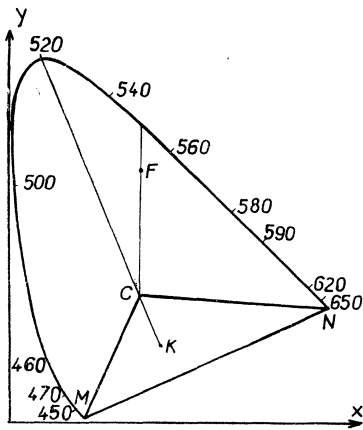
Obr. 3.

PŘEVLÁDAJÍCÍ VLNOVÁ DÉLKA A SYTOST BARVY

Převládající vlnovou délkou libovolné barvy rozumíme vlnovou délku spektrální barvy, která svým tónem odpovídá dotyčné barvě. Určení převládající vlnové délky provádí se tak, že bílým bodem a zkoumanou barvou proložíme přímku, která protne křivku spektrálních barev v bodě, jímž je definována převládající vlnová délka.

Například v obr. 4 pro barvu F je převládající vlnová délka $550 \text{ m}\mu$. U barev obsažených v trojúhelníku MCN , tj. u barev purpurových, rozumíme převládající

vlnovou délkou vlnovou délku monochromatického světla, které není obsaženo ve spektru dotyčné barvy. Například v obr. 4 pro barvu **K** je převládající vlnová délka 520 m μ , tj. ve spektru barvy **K** tato vlnová délka není obsažena.



Obr. 4.

Sytost barvy je dána vzdáleností od bílého bodu. Sytost 100% mají barvy spektrální a barvy ležící na spojnici koncových bodů spektrální křivky. Bílá barva **C** má sytost nulovou.

Převládající vlnová délka a sytost barvy jsou veličiny postačující k určení barvy.

MÍCHÁNÍ BAREV A TRICHROMATICKÁ KOLORIMETRIE

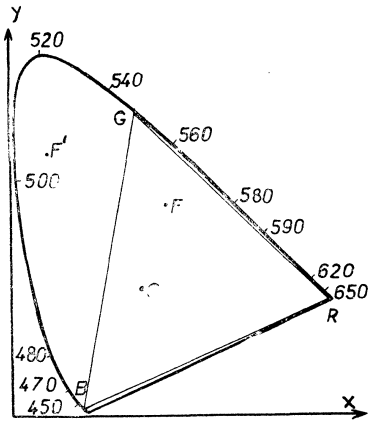
Poněvadž zrakový orgán včetně centrálního nervstva je při určování barevného odstínu ovlivňován řadou činitelů, jako například způsobem osvětlení, barvou okolí, předcházejícími barevnými vjemy, není barevný vjem vždy stejný. Často je třeba pokud možno objektivně určit barevný odstín povrchu určité látky, popřípadě barvu světla, které látka propouští. Touto otázkou se zabývá kolorimetrie.

Jak už bylo ukázáno, problém míchání barev je možno převést na problém skládání vektorů. Pro praktické účely měření je výhodné volit tři základní barvy, které považujeme za rovnoběžné vektory, jejichž koncové body leží ve vrcholech trojúhelníka, kde vrcholové body trojúhelníka jsou určeny polohou příslušných barev na obr. 3 a délky vektorů jsou úměrné podnětům, které tyto barvy způsobují. Výsledná barva je pak dána polohou „těžiště“, při čemž tuto polohu určíme podobně jako polohu těžiště soustavy tři hmotných bodů. Upravíme-li v příslušných poměrech barevné rozdělení tohoto trojúhelníka, můžeme jej považovat za trojúhelník rovnostranný, v jehož těžišti leží bílý bod **C**.

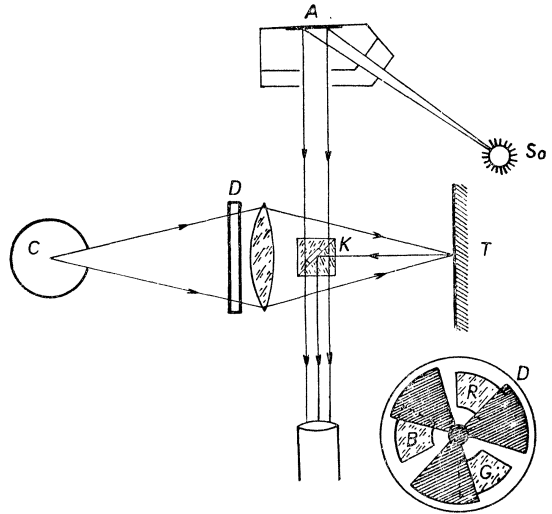
Mícháním barev **R**, **G**, **B** (viz obr. 5) není však možno dosáhnout barevných odstínů, které leží mimo trojúhelník **RGB**, např. barvu **F'**. Odtud je zřejmé, že trichromatická kolorimetrie nemůže obsáhnout celou barevnou škálu. Pro běžná měření barev, jejichž sytost je poměrně malá, však s trichromatickou soustavou vystačíme.

Uvedeme zde jeden typ subjektivního kolorimetru, nazvaný kolorimetr ДЕМКИНУВ. Schéma tohoto přístroje je podáno na obr. 6. Zdroj bílého světla je označen písmenem **C**. Písmenem **D** je označena zvláštním způsobem upravená clona, která má tři otvory, opatřené barevnými filtry, jež propouštějí světla **R**, **G**, **B**, a to v takových poměrech, že výsledné osvětlení na bílém stínítku **T**, které je dáno smíšením všech tří barevných světél **R**, **G**, **B** při nezacloněných filtrech, je bílé. Kromě toho je každý filtr opatřen clonou, takže je možno část plochy filtru zaclonit. Světlo odražené od stínítka **T** dopadá na Lumer-Brodhunovu kostku **K** a v místě kruhového

prohloubení se totálně odráží do pozorovacího dalekohledu. Vzorek A , umístěný ve speciální komoře, je osvětlován doplňujícím zdrojem S_0 . Světlo odražené od vzorku A prochází místy dotyku obou částí Lumer-Brodhunovy kostky do pozorovacího dalekohledu.



Obr. 5.



Obr. 6.

Pomocí clon na jednotlivých filtrech upravujeme osvětlení tak dlouho, až se nám zorné pole jeví homogenně osvětlené v jednom barevném tónu.

Vyhodnocení se provede pomocí barevného trojúhelníka, u něhož je provedeno přesné barevné odstupňování jednotlivých barevných odstínů.

Označíme písmeny r' , g' , b' poměry zacloněných ploch jednotlivých barevných filtrů k plochám, při nichž bylo stínítko T osvětleno bílým světlem. Barevné souřadnice jsou pak dány vztahy (3):

$$r = \frac{r'}{r' + g' + b'}, \quad g = \frac{g'}{r' + g' + b'}, \quad b = \frac{b'}{r' + g' + b'}$$

Výsledná barva se pak určí podobně jako těžiště tří hmotných bodů. Například pro barevné souřadnice $r = 0,5$; $g = 0,3$; $b = 0,2$ je z obr. 7 zřejmé, že výsledná barva F leží v oblasti modré barvy a je v ní přimíšeno hodně bílé.

Existuje celá řada subjektivních trichromatických kolorimetrů, jejichž popisem se zde nebudeme podrobně zabývat. Kromě subjektivních kolorimetrů existují ještě kolorimetry objektivní, využívající fotoelektrických jevů.

V závěru je možno říci, že problémy barevného vidění jsou příkladem vědecké disciplíny, ke které je nutno přistupovat z posic ne jednoho, ale více vědeckých oborů. K těmto otázkám má co říci jak fyzik, biolog, lékař, tak i psycholog.

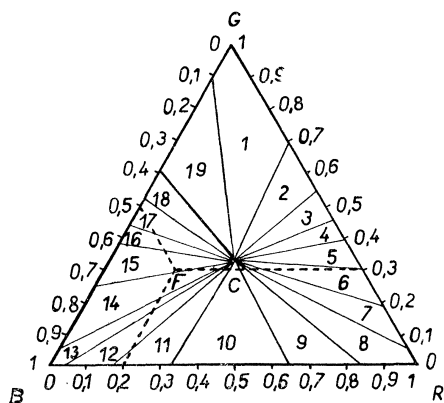
V dnešní době vysoce rozvinutého průmyslu, vědy, techniky, umění a zvýšeného

P. CHMELA: Matematické vyjádření barvy a problémy barevného vidění.



Barevný trojúhelník.

životního tempa nabývají problémy barvy a jejího vnímání zvláště velkého významu. Například barevná fotografie, která pracuje dnes výhradně se systémem tří senzibilních vrstev, nebo barevná televize plně využívají moderních poznatků o barevném vidění.



Obr. 7. 1 — žlutavě zelená, 2 — žlutě zelená, 3 — zelenavě žlutá, 4 — žlutá, 5 — žlutavě oranžová, 6 — oranžová, 7 — červeně oranžová, 8 — červená, 9 — purpurově červená, 10 — červeně purpurová, 11 — červeně purpurová, 12 — purpurová, 13 — modravě purpurová, 14 — purpurově modrá, 15 — modrá, 16 — zelenavě modrá, 17 — modrozelená, 18 — modravě zelená, 19 — zelená, C — bílý bod.

Literatura

- A. ZAUSZNICA: *Nauka o barwie*. Panstwowe Wydawnictwo Naukowe, Warszawa 1959.
 V. V. ŠARONOV: *Svět i cvět*. Gos. izdat. fiz. mat. literatury, Moskva 1961.
 J. FUKA - B. HAVELKA: *Optika*. SPN, Praha 1961.
Handbuch der Physik. Springer-Verlag, Berlin-Göttingen-Heidelberg 1956.
 D. S. VOLOSOV - M. V. CIVKIN: *Těorija i rasčet světooptičeskich systém*. Gos. izdat. fiz. mat. literatury, Moskva 1960.

DEMONSTRACE FOTOELASTICIMETRICKÉ METODY

VRATISLAV HAVLOVIC, Hradec Králové

ÚVOD

V učebnicích určených pro výuku fyziky v 11., popř. 12. třídě VVŠ je obsažen výklad fyzikální optiky včetně polarizace. Jako ukázka praktického využití polarizačního jevu je tu zmínka o fotoelasticimetrické metodě řešení problémů rovinné napjatosti, která nabývá stále většího významu v technické a vědecké praxi. Fotoelasticimetrie je v současné době jednou z nejdůležitějších modelových metod. Umožňuje totiž získat vizuálně jasný obraz o průběhu napětí po celém rozsahu zkoušeného modelu, což jiné metody nedovolují. Úkolem tohoto článku je seznámit čtenáře se základními principy fotoelasticimetrické metody a s její dostupnou experimentální realizací na praktických příkladech z poněkud nevšední oblasti — z tělovědy.