Jaroslav Šedivý

O třetím Hilbertově problému

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 16 (1971), No. 6, 292--300

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137649`

naeum, který začal vycházet v roce 1883, a zúčastnil se rovněž sporů o Rukopis královédvorský a Rukopis zelenohorský na straně jejich odpůrců. Když byla založena roku 1890 *Česká akademie pro vědy, slovesnost a umění*, stává se jedním z prvních členů této instituce.

Život Seydlerův byl krátký. Umírá ve věku 42 let na plicní tuberkulózu a byl pohřben na Olšanských hřbitovech ve druhém oddělení v hrobě č. 65 na pátém hřbitově. Prof. Seydler vykonal mnoho pro rozvoj fyziky a astronomie a dnes lze opravdu říci, že je zakladatelem moderní tradice obou těchto vědních oborů u nás. Jak významné postavení zaujímal v českém kulturním životě v druhé polovině 19. století, o tom svědčí slova významného lékaře a jeho současníka i přítele prof. dr. E. Alberta, která pronesl nad jeho rakví: „...poznal jsem, že je Seydler jedním z nejhlubších duchů v Čechách a jedním ze srdcí nejšlechetnějších".

HILBERTOVY PROBLÉMY

O TŘETÍM HILBERTOVĚ PROBLÉMU

JAROSLAV ŠEDIVÝ, Praha

Třetí Hilbertův problém patří do sféry elementární euklidovské geometrie. Ocitujme nejprve výtah z části Hilbertovy přednášky:

> Gauss vyjádřil politování nad tím, že některé známé výsledky se ve stereometrii získávají exhaustní metodou... Speciálně se zmiňuje o větě z Euklidových *Základů*, podle které jsou objemy čtyřstěnů se shodnými výškami v témž poměru jako obsahy podstav těchto čtyřstěnů. ...zdá se mi, že důkaz této věty nelze provést pomocí shodných rozdělení čtyřstěnů, ale to lze samozřejmě potvrdit jen přesným zdůvodněním nedokazatelnosti věty. To by bylo podáno, kdyby se podařilo najít takové dva čtyřstěny se shodnými výškami a s podstavami se stejným obsahem, které nelze žádným způsobem rozdělit na shodné čtyřstěny a které nelze shodnými čtyřstěny doplnit na shodně rozložitelné mnohostěny.

Naznačme podstatu problému trochu šířeji, než je objasněna v uvedeném citátu, protože Hilbert použil řady termínů, které dnes již nejsou tak běžné jako na počátku století.

1. PODSTATA PROBLÉMU

Pojmy obsah rovinného útvaru a objem prostorového tělesa se dnes chápou jako zvláštní případy měr geometrických útvarů, tj. jako funkce definované na jistých systémech podmnožin roviny, resp. prostoru.

Nechť je M neprázdnou bodovou množinou, která je vybavena systémem základních okolí jednotlivých bodů, a dále grupou shodných zobrazení. Zvolíme-li nějaký soubor Ω podmnožin množiny M, nazveme mírou na souboru Ω každou funkci μ, která má tyto vlastnosti:

1. Pro každé $X \in \Omega$ platí: $\mu(X)$ je nezáporné reálné číslo.
2. Pro každá $X, Y \in \Omega$ platí: X je shodné s $Y \Rightarrow \mu(X) = \mu(Y)$.
3. Pro každá $X, Y \in \Omega$ a $X \cup Y \in \Omega$ platí:
   X a Y nemají společný vnitřní bod $\Rightarrow \mu(X \cup Y) = \mu(X) + \mu(Y)$.
4. Existuje $K \in \Omega$, pro které platí: $\mu(K) = 1$.

Aplikujme tuto obecnou definici ve dvou speciálních případech a zvýrazněme zápisem ve dvou sloupcích analogii, kterou lze mezi nimi pozorovat.

Zvolíme M jako euklidovskou rovinu, soubor Ω všech mnohoúhelníků v rovině a jednotkový čtverec K; mírou μ na souboru Ω bude obsah mnohoúhelníka.

Každý mnohoúhelník P v rovině lze nekonečně mnoha způsoby vyjádřit jako sjednocení konečného počtu trojúhelníků $T_1, T_2, \ldots, T_k$, z nichž žádné dva nemají společný vnitřní bod; píšeme

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$$

a množinu $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ nazýváme rozdělením mnohoúhelníka P.

Platí

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{k} \mu(T_i)\,.$$

Jsou-li množiny trojúhelníků

$$A = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}\,,$$
$$B = \{T_1^*, T_2^*, \ldots, T_k^*\}$$

rozděleními dvou mnohoúhelníků P, P^*

Zvolíme M jako euklidovský prostor, soubor Ω všech mnohostěnů a jednotkovou krychli K; mírou μ na souboru Ω bude objem mnohostěnu.

Každý mnohostěn P lze nekonečně mnoha způsoby vyjádřit jako sjednocení konečného počtu čtyřstěnů $T_1, T_2, \ldots, T_k$, z nichž žádné dva nemají společný vnitřní bod; píšeme

$$P = \bigcup_{i=1}^{k} T_i$$

a množinu $\{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$ nazýváme rozdělením mnohostěnu P.

Platí

$$\mu(P) = \sum_{i=1}^{k} \mu(T_i)\,.$$

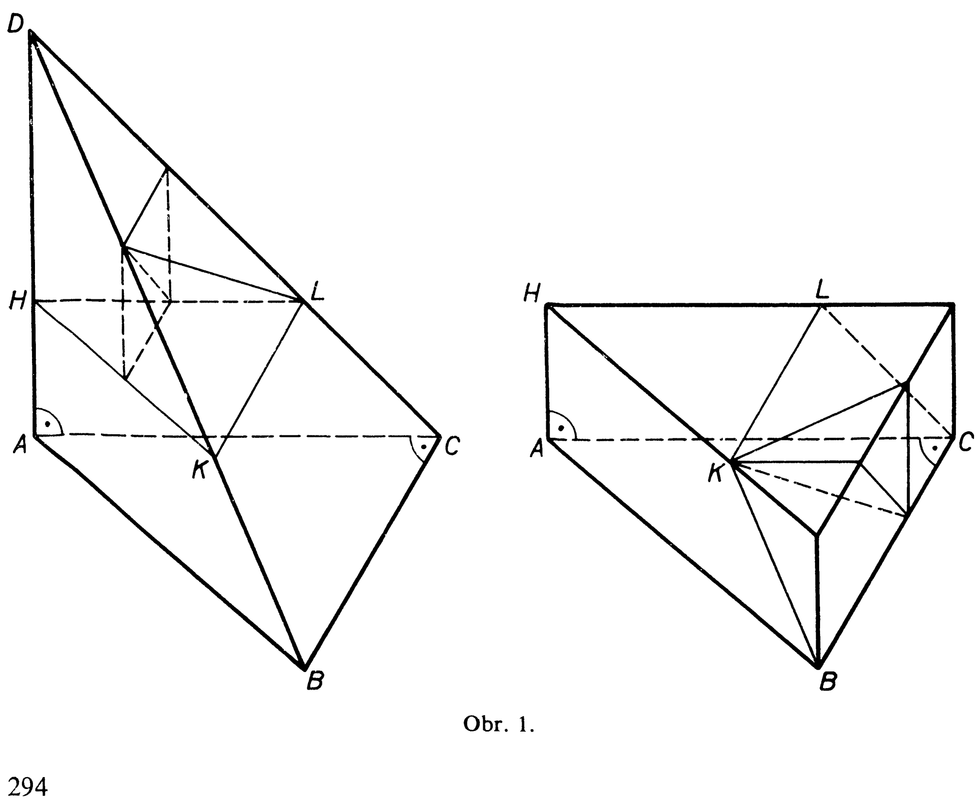
Jsou-li množiny čtyřstěnů

$$A = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}\,,$$
$$B = \{T_1^*, T_2^*, \ldots, T_k^*\}$$

rozděleními dvou mnohostěnů P, P^*

a lze-li A zobrazit na B tak, že vzor a obraz jsou shodné trojúhelníky, říkáme, že P, P^* jsou shodně rozdělitelné mnohoúhelníky.	a lze-li A zobrazit prostě na B tak, že vzor i obraz jsou shodné čtyřstěny, říkáme, že P, P^* jsou shodně rozdělitelné mnohostěny.
Pro každé dva mnohoúhelníky X, Y platí: $\mu(X) = \mu(Y)$ právě tehdy, jsou-li shodně rozdělitelné.	Pro každé dva mnohostěny X, Y platí: $\mu(X) = \mu(Y)$ právě tehdy, jsou-li X, Y shodně rozdělitelné.
(věta Bolyaiova-Gerwienova).	Hilbertův problém spočívá v tom, jak vyvrátit platnost této věty.

Uvědomíme-li si, že F. Bolyai a P. Gerwien dokázali citovanou větu o mnohoúhelnících již na počátku 30. let 19. století a že ještě ani na konci století nebyla dokázána obdobná věta pro mnohostěny, pochopíme, že Hilbert jistě zcela právem považoval tuto situaci za problematickou. Je zajímavé, že Hilbert dával formulací problému najevo, že nevěří v platnost takové věty, ačkoliv někteří matematici 19. století dosáhli částečných úspěchů, např. M. D. M. Hill dokázal r. 1896 existenci čtyřstěnů shodně rozdělitelných s hranoly (obr. 1 naznačuje rozdělení obou těles na čtyři části, rozdělení na čtyřstěny je již snadné).



Obr. 1.

Třetí Hilbertův problém můžeme redukovat na úlohu:

Dokažte existenci dvou mnohostěnů, které mají stejný objem, ale nejsou shodně rozdělitelné na čtyřstěny.

Hilbert motivoval svůj postoj postřehem K. F. GAUSSE, že ve stereometrii se používá exhaustní metody daleko častěji než v planimetrii. Exhaustní metoda výpočtu míry geometrického útvaru spočívá v tom, že měřený útvar „vyplňujeme" útvary, jejichž míru dovedeme určit; stanovíme-li supremum měr takových útvarů, můžeme za jistých podmínek dokázat, že je mírou měřeného útvaru. Ve škole se exhaustní metoda naznačuje při uvedení vzorce pro obsah kruhu, kdy se používá pravidelných n-úhelníků vepsaných do kruhu.

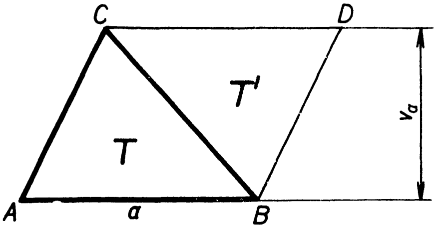
Všimněme si nápadného rozdílu v odvozování vzorců pro obsah trojúhelníka a pro objem čtyřstěnu:

Předpokládejme, že je již dokázán vzorec pro obsah rovnoběžníka P se základnou a, výškou v_a

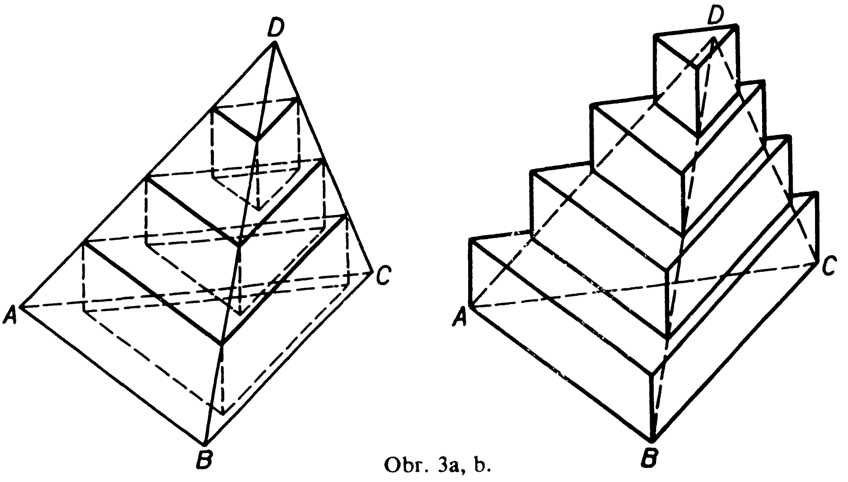
$$\mu(P) = a \cdot v_a \, .$$

Předpokládejme, že je již dokázán vzorec pro objem hranolu P s podstavou o obsahu A, výškou v_a

$$\mu(P) = A \cdot v_a \, .$$



Obr. 2.



Obr. 3a, b.

Potom umíme dokázat vzorec pro obsah kteréhokoliv trojúhelníka T tak, že ho doplníme na rovnoběžník pomocí shodného s ním trojúhelníka T':

$$P = T \cup T' \quad \text{(obr. 2)}.$$

Platí zřejmě, že $\mu(T) = \mu(T')$,

$$\mu(P) = \mu(T) + \mu(T')$$
$$\mu(T) = \tfrac{1}{2}\mu(P) = \tfrac{1}{2}a \,.\, v_a \,.$$

Přesto pak nedovedeme dokázat vzorec pro objem libovolného čtyřstěnu T tak, že bychom jej doplnili na hranol pomocí čtyřstěnů s ním shodných. Vzorec

$$\mu(T) = \tfrac{1}{3}A \,.\, v_a$$

dokazujeme některou z variant exhaustní metody (obr. 3).

Schodovité těleso J_n vepsané do čtyřstěnu vytvoříme sjednocením hranolů s výškou rovnou n-tině výšky čtyřstěnu a s podstavami podobnými podstavě ABC; obdobně vytvoříme opsané schodovité těleso O_n. Je zřejmé, že pokud existuje číslo T, platí pro každé $n > 1$:

$$\mu(J_n) \leqq \mu(T) \leqq \mu(O_n) \,.$$

Snadným výpočtem, který býval i ve středoškolských učebnicích, získáme vzorce

$$\mu(J_n) = Av_a \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2\right] = Av_a \frac{n(n-1)(2n-1)}{6n^3}$$

$$\mu(O_n) = Av_a \frac{1}{n^3}\left[1^2 + 2^2 + \ldots + n^2\right] = Av_a \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} \,.$$

Teprve limitním procesem získáme výsledek $\mu(T) = \frac{1}{3}A \,.\, v_a$

Výsledný koeficient $\frac{1}{3}$ je dokonce kmenný zlomek; je proto podivné, nedovedeme-li se k němu dopracovat jinak než přes součet nekonečné řady. O těchto otázkách se zmiňujeme proto, že o nich hovořil Hilbert v motivační úvaze před formulováním třetího problému; v dalším odstavci se však budeme zabývat jen řešením výše zformulované úlohy o shodné rozdělitelnosti mnohostěnů.

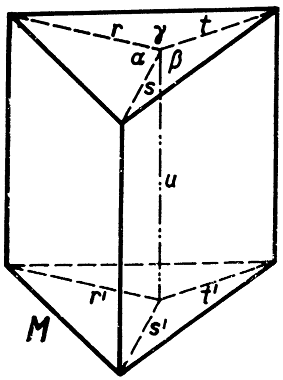
2. ŘEŠENÍ PROBLÉMU

Úloha o shodné rozdělitelnosti mnohostěnů majících stejný objem nápadně připomíná dlouhověké problémy sestrojitelnosti jistých bodů kružítkem a pravítkem, vzpomeňme na duplikaci krychle, trisekci úhlu, kvadraturu kruhu, vpisování pravidelných mnohoúhelníků do kružnice apod. Nyní máme rozhodnout, zda lze vždy jeden ze dvou mnohostěnů se stejným objemem „rozřezat“ na čtyřstěny tak, že po jejich přeskupení lze složit mnohostěn shodný s druhým.

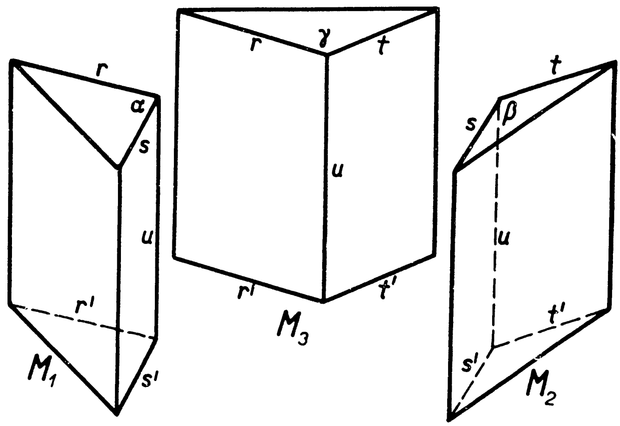
Oba typy problémů mají společné to, že mohou vyvolat snahu o experimentální prověřování možností na hmotných modelech, ale tím se úsilí dostává do slepé uličky.

Zmíněné problémy jsou sice geometrické, ale nejsou rozhodnutelné geometrickými prostředky, protože nedovedeme spolehlivě rozlišit dva body získané grafickými konstrukcemi ani spolehlivě posoudit shodnost hmotných mnohostěnů. Pokud jde o rozlišení dvou matematických objektů, máme nejjemnější nástroje v teorii čísel, která vcelku úspěšně vypracovává metody, jak rozhodnout, zda číslo splňující jisté podmínky je racionální či iracionální, algebraické či transcendentní nad oborem racionálních čísel apod. Vzpomeňme v historické souvislosti s Hilbertovým problémem, že v r. 1882 F. LINDEMANN dokázal trancendentnost čísla π, a tím byla rozhodnuta otázka proveditelnosti kvadratury kruhu kružítkem a pravítkem. Nepřekvapí nás proto, že i při řešení třetího Hilbertova problému vedla cesta do oblastí matematiky, které studují číselné množiny.

Naznačme nejprve ideu přechodu od rozdělování mnohostěnů na čtyřstěny k číselně teoretickým úvahám. Nechť je dán mnohostěn M (obr. 4a) a jeho rozdělení na



Obr. 4a.



Obr. 4b.

mnohostěny M_1, M_2, M_3 (obr. 4b); v obr. 4a jsou čárkovaně vyznačeny úsečky, které se stávají novými hranami těles M_1, M_2, M_3 kromě těch, které se „dědí“ z původního tělesa M. Písmena r, s, t, u, r', s', t' připsaná k těmto úsečkám označují jejich délky, písmena α, β, γ označují velikosti klínů (velikost klínu sevřeného dvěma polorovinami vyjadřujeme velikostí úhlu, který je průnikem klínu a roviny kolmé k jeho hraně). Hrany mnohostěnu M lze očíslovat a označit je písmeny x_i, kde $i = 1, 2, \ldots, h$. Každé hraně x_i přiřadíme její délku d_i a velikost v_i vnitřního klínu mnohostěnu u této hrany (v radiánové míře), pak vytvoříme součiny $d_i \, . \, v_i$ a součet

$$H(M) = \sum_{i=1}^{h} d_i \, . \, v_i, \quad \text{kde } h \text{ je počet hran mnohostěnu } M \, .$$

Obdobně určíme čísla $H(M_1)$, $H(M_2)$, $H(M_3)$ a snadno zdůvodníme, že platí

$$H(M) = H(M_1) + H(M_2) + H(M_3) + u(\alpha + \beta + \gamma) - (r + s + t) \, . \, \pi -$$
$$- (r' + s' + t') \, . \, \pi \, .$$

Číslo π se dostává do předešlého výrazu jako součet radiánových měr těch klínů v tělesech M_1, M_2, M_3, které po složení tělesa M mají hranu uvnitř některé stěny. Součet $\alpha + \beta + \gamma = 2\pi$, protože po složení tělesa M dostaneme kolem hrany u plný klín, hrana u leží v tělese M a obsahuje jeho vnitřní body.

V popsané úvaze jsme pracovali s kolmým hranolem a použili jsme jen nejjednoduššího způsobu jeho rozdělení, podrobná diskuse všech možných způsobů rozdělení mnohostěnů je značně zdlouhavá, vede však k výsledku, který shrneme v následujícím lemmatu.

Lemma. O každém mnohostěnu M platí: je-li M rozdělen na čtyřstěny $T_1, T_2, \ldots, T_n$, pak

$$H(T_1) + H(T_2) + \ldots + H(T_n) = H(M) + p \,.\, \pi + q \,.\, 2\pi \,,$$

kde p je součtem délek všech hran čtyřstěnů, které leží na povrchu mnohostěnu M zatímco q je součtem délek všech hran čtyřstěnů, které leží uvnitř mnohostěnu M.

Z uvedeného lemmatu nedostáváme ještě žádnou výhodnou číselnou charakteristiku shodně rozdělitelných mnohostěnů M, N, protože čísla $H(M)$, $H(N)$ se mohou lišit o reálné násobky čísla π. Přesto však hraje vztah uvedený v textu lemmatu důležitou roli v motivaci dalšího kroku k řešení Hilbertova problému, kterým eliminujeme nepříjemný vliv způsobu složení čtyřstěnů na číselnou charakteristiku $H(M)$, tj. čísel p, q. Místo součinů $d_i \,.\, v_i$ použijeme součinů $d_i \,.\, f(v_i)$, kde f bude aditivní funkce na množině $A = \{\pi, v_1, v_2, \ldots, v_h\}$, která přiřazuje číslu π hodnotu $f(\pi) = 0$.

To je ta geniální myšlenka, která umožňuje rozřešit třetí Hilbertův problém; místo čísla $H(M)$ přiřazujeme každému mnohostěnu číslo

$$I(M) = \sum_{i=1}^{h} d_i \,.\, f(v_i) \,,$$

které H. HADWIGER nazval invariantem mnohostěnu M (vzhledem k f).
Přepíšeme-li text lemmatu pomocí tohoto pojmu, získáme výrok

$$I(T_1) + I(T_2) + \ldots + I(T_n) = I(M) + p \,.\, 0 + q \,.\, 0 \,.$$

Odtud je již jen krok k důkazu věty, která se bezprostředně uplatňuje v řešení problému.

Hadwigerova věta. Nechť jsou M, N dva shodně rozdělitelné mnohostěny. Označme písmeny $v_1, v_2, \ldots, v_m$ velikosti vnitřních klínů mnohostěnu M a písmeny $w_1, w_2, \ldots, w_n$ velikosti vnitřních klínů mnohostěnu N. Jestliže lze na množině $A = \{\pi, v_1, \ldots, v_m, w_1, \ldots, w_n\}$ definovat takovou aditivní funkci f, že platí $f(\pi) = 0$, pak

$$I(M) = I(N) \,.$$

Obměnou Hadwigerovy věty získáme návod k řešení problému:

Budeme hledat dva mnohostěny M, N s týmž objemem, kterým lze přiřadit takovou funkci f popsanou v textu Hadwigerovy věty, že invarianty $I(M)$, $I(N)$ jsou navzájem různé; takové mnohostěny pak nejsou shodně rozdělitelné.

První příklad takových těles publikoval již v r. 1900 německý matematik M. DEHN (tehdy třiadvacetiletý!), nalezl je dokonce mezi pravidelnými tělesy. Jeho původní postup byl však značně složitý a nepřehledný, proto se v současné literatuře nereprodukuje. Jednodušší důkazy podala řada matematiků, např. V. F. KAGAN (1913, 1933), SÜSS (1921), H. HADWIGER (kolem r. 1950), V. G. BOLTJANSKIJ (1956). Naznačíme zde ideu důkazu publikovaného posledním jmenovaným autorem v [1] a [2].

Dehnova věta. Žádná krychle není shodně rozdělitelná s pravidelným čtyřstěnem, který má stejný objem jako krychle.

Důkaz. Použijeme-li stejného označení jako v Hadwigerově větě, získáme $v_1 = v_2 = \ldots = v_{12} = \frac{1}{2}\pi$, $w_1 = w_2 = \ldots = w_6 = \varphi$, kde $\varphi = \arccos \frac{1}{3}$. Výsledek $\cos \varphi = \frac{1}{3}$ snadno získáme pomocí pravoúhlého trojúhelníka, jehož vrchol je těžištěm jedné stěny a přeponu tvoří těžnice další stěny čtyřstěnu. Dostáváme velmi „malou" množinu $A = \{\pi, \frac{1}{2}\pi, \varphi\}$, na které máme definovat vhodnou funkci f. Podstatnou pomoc zde poskytuje teorie čísel tím, že nabízí tento poznatek: číslo $\arccos \frac{1}{3}$ není racionálním násobkem čísla π. To znamená, že z volby $f(\pi) = 0$ plyne sice $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, ale může být $f(\varphi) \neq 0$.

Zvolme funkci f takto: $f(\pi) = 0$, $f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, $f(\varphi) = 1$; snadno ověříme, že jde o funkci s vlastnostmi požadovanými v Hadwigerově větě. Určeme nyní čísla $I(M)$, $I(N)$; pro krychli M, jejíž hrany mají délku a dostaneme $I(M) = 12a \,.\, f(\frac{1}{2}\pi) = 0$, pro čtyřstěn N je číslo $I(N)$ rovno součtu délek hran tělesa, platí tedy $I(N) \neq 0$. Protože je $I(M) \neq I(N)$, není krychle shodně rozdělitelná s pravidelným čtyřstěnem.

3. DALŠÍ VÝSLEDKY

Třetí Hilbertův problém byl rozřešen vzápětí po svém publikování. Nestal se tedy „oříškem", při jehož úsilovném řešení se po dlouhou dobu rozvíjí některá oblast matematiky. Potvrdilo se Hilbertovo očekávání, že na rozdíl od roviny není shodná rozdělitelnost prostorových útvarů ekvivalentní rovnosti jejich měr. Ve vysokoškolských učebnicích geometrie se tento poznatek uplatňuje jako výstraha před unáhlenými analogiemi při přenášení poznatků z prostoru jedné dimenze do prostoru s jinou dimenzí.

Pozoruhodné výsledky byly získány při uplatnění grupového hlediska, jehož iniciátorem byl, jak známo, F. KLEIN v r. 1872. Při vytváření jednoho tělesa ze čtyřstěnů získaných rozdělením jiného tělesa, přemisťujeme tyto čtyřstěny; názorné představy o přemisťování lze vystihnout pomocí přímých shodných zobrazení v prostoru a jejich skládání. Množina všech přímých shodných zobrazení je grupou vzhledem k operaci skládání zobrazení, proto je možno chápat Hilbertův problém jako záležitost týkající se grupy přímých shodností v prostoru.

Grupa přímých shodností v *rovině* má nepřeberné množství podgrup, mezi nimi můžeme však vytknout zejména

— grupu S všech translací a středových souměrností,

— grupu T všech translací.

Problematika shodné rozdělitelnosti mnohoúhelníků s týmž obsahem byla kladně zodpovězena již Bolyaiovou-Gerwienovou větou, v níž se také mlčky předpokládalo užití zobrazení z grupy přímých shodností. Švýcarští geometři H. HADWIGER a J. P. GLUR dokázali r. 1951 silnější větu, jejíž obsah si vysvětlíme po definici několika pojmů, zejména S-rozdělitelnosti mnohoúhelníků.

Jsou-li množiny $A = \{T_1, T_2, \ldots, T_k\}$, $B = \{T_1^*, T_2^*, \ldots, T_k^*\}$ *po řadě rozděleními mnohoúhelníků* P, P^* *a lze-li prostě zobrazit* A *na* B *tak, že vzor a obraz jsou trojúhelníky zobrazitelné navzájem některým zobrazením z grupy* S, *pak* P, P^* *nazveme* S*-rozdělitelnými mnohoúhelníky.*

Volně řečeno, při jakékoliv poloze P, P^* lze P rozdělit na trojúhelníky takovým způsobem, že z nich sestavíme P^* a přitom budeme jednotlivé trojúhelníky jen posouvat nebo otáčet o 180° (vylučujeme otáčení o jiný úhel). Pokud bychom použili dokonce jen posouvání (tj. prvků množiny T), mohli bychom hovořit o T-rozdělitelnosti mnohoúhelníků.

Hadwigerova-Glurova věta. Pro každé dva mnohoúhelníky X, Y platí: $\mu(X) = \mu(Y)$ právě tehdy, když X, Y jsou S-rozdělitelné.

Důkaz věty je podán v [1] a [3]. Vzniká otázka, zda obdobná věta neplatí pro T-rozdělitelnost mnohoúhelníků. V tomto směru dává vyčerpávající odpověď brožura [1]:

Boltjanského věta. Grupa S je nejmenší podgrupou grupy přímých shodností v rovině, pro kterou lze dokázat ekvivalenci mezi rovností měr a rozdělitelností mnohoúhelníků v takové grupě.

Pojem T-rozdělitelnosti mnohoúhelníků tedy není ekvivalentní rovnosti jejich měr. V. G. Boltjanskij dokázal však řadu dalších vět o pojmu T-rozdělitelnosti mnohoúhelníků, např. objevil, že konvexní mnohoúhelník X je T-rozdělitelný se čtvercem Y o stejném obsahu právě tehdy, když X je středově souměrný.

Uvedená problematika ukazuje, že tzv. elementární geometrie umožňuje formulovat řadu problémů, při jejichž řešení je třeba použít aparátu, který nikterak není elementární v onom zlehčujícím smyslu slova. V posledních desetiletích se zejména studují problémy kombinatorické geometrie (čtenář se s nimi seznámí v některém z dalších čísel Pokroků). Zájemce o hlubší poznání problematiky související s třetím Hilbertovým problémem plně uspokojí publikace [2] a [3] s bohatou bibliografií.

Literatura

[1] BOLTJANSKIJ, V. G.: *Ravnovelikije i ravnosostavljennyje figury*, Moskva, Fizmatgiz, 1956.

[2] *Enciklopedija elementarnoj matematiky, kn. 5 — Geometrija*, Moskva, izd. Nauka, 1966 (stať V. G. Boltjanského, str. 142—180).

[3] HADWIGER, H.: *Vorlesungen über Inhalt, Oberfläche und Isoperimetrie*, Berlin—Göttingen—Heidelberg, 1957 (existuje ruský překlad).

[4] *Problemy Gil'berta*, Moskva, izd. Nauka, 1969, str. 28, 92—94.