Gustave Choquet

Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 34 (1989), No. 2, 71--83

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137571

[4] M. Novotný, K. Svoboda, M. Zlámal: *K šedesátinám Otakara Borůvky.* Čas. pěst. mat. *84* (1959), 236—250.

[5] J. Kurzweil: *Člen korespondent ČSAV Otakar Borůvka vyznamenán státní cenou Klementa Gottwalda.* Čas. pěst. mat. *84* (1959), 489—491.

[6] M. Ráb: *Akademik Otakar Borůvka sedmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. *94* (1969) 2, 244—247.

[7] F. Neuman: *Akademik Otakar Borůvka osmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. *104* (1979) 2, 214—220.

[8] F. Neuman: *Akademik Otakar Borůvka pětaosmdesátníkem.* Čas. pěst. mat. *109* (1984) 2, 217 až 220.

[9] F. Neuman: *The Eightieth Birthday of Academician Otakar Borůvka.* Czech. Math. J. *29* (1979) 2, 330—335.

[10] F. Neuman: *85 Years of Academician Otakar Borůvka.* Czech. Math. J. *34* (1984), 488—489.

[11] M. Sekanina: *Šedesátiny profesora Otakara Borůvky.* Rozhledy matematicko-fyzikální *37* (1959) 6, 280—281.

[12] F. Balada: *Akademik korespond. univ. profesor RNDr. Otakar Borůvka, doktor fyzikálně-matematických věd, dožil se šedesáti let.* Matematika ve škole *9* (1959) 5, 324—328.

Foto: Archív JČSMF

Vznik teorie kapacit: zamyšlení nad vlastní zkušeností

Gustave Choquet, Paříž

Gustav Choquet patří mezi vynikající matematiky. V analýze je skutečným mistrem a ačkoli je vysoce vzdělán, jeho tvůrčí přístup se vyznačuje nápadnou úsporností užívaných prostředků. Jeho dílo v průběhu více než třicetiletého období odkrylo matematickému myšlení nové cesty.

Matematikové se již dlouho zajímají o teorii potenciálu, která má svůj původ v elektrostatice a v gravitačním zákonu; o potenciál velice konkrétní, smím-li tak říci, definovaný v trojrozměrném euklidovském prostoru pomocí elementárního potenciálu 1/r. Zajímají se však o problémy potenciálu související nikoliv s fyzikálními tělesy (se vší vágností, která tento pojem obklopuje), ale s co nejobecnějšími množinami. Jak se v tomto kontextu objeví pojem elektrostatické kapacity, neaditivní množinové funkce s poněkud paradoxním chováním? Zdá se, že na konci čtyřicátých let tento pojem přinášel otevřené problémy i pro nejvýznamnější specialisty, jako byl např. Henri Cartan. Pro které množiny lze vůbec smysluplně mluvit o kapacitě?

Gustave Choquet: *La naissance de la théorie des capacités: réflexion sur une expérience personelle.* La Vie des Sciences, *Comptes rendus*, série générale, tome 3, n° 4, Juillet—Août 1986, 385—397. Přeložil Ivan Netuka

Jestliže je jméno Gustava Choqueta již zapsáno do historie matematiky, stalo se tak zejména díky jeho teorii zobecněných kapacit. Tato teorie samozřejmě vyřešila speciální problém týkající se elektrostatické kapacity, byla však také základní hnací silou, která vedla již mimo rámec trojrozměrného prostoru k teoriím zobecněných potenciálů, k vazbě teorií potenciálu a pravděpodobnosti. Přinesla též nové pohledy na problém integrálních reprezentací a učinila z nich účinný nástroj. Je známo, že toto sblížení a interakce teorie potenciálu a pravděpodobnosti jsou v současné době zdrojem četných a zásadních prací. Jedním ze zakladatelů systematického zkoumání těchto vzájemných vztahů je americký matematik J. L. Doob. Náš kolega Paul Malliavin přispěl zcela nedávno do této oblasti přínosem zásadní důležitosti.

Teorie kapacit není rozhodně projevem samoúčelného matematického perfekcionismu, je totiž určitou křižovatkou matematiky a zdrojem nových myšlenek a metod přístupných na úrovni větší či menší náročnosti širokému okruhu.

Svědectví vynikajících matematiků o cestách k objevům jsou vzácná a cenná, a to nejen pro samotné matematiky, ale také pro všechny, kteří se zamýšlejí nad klikatými cestami vedoucími ke konečnému odhalení pravdy. Nad cestami se všemi jejich slepými uličkami, které však ukazují díky představivosti určitý návod, jak obcházet skutečné nebo zdánlivé překážky. Slavná svědectví takového charakteru jsou známa např. od Henri Poincarého nebo Jacquese Hadamarda. Považovali jsme za zajímavé k nim zde připojit Choquetovu svědeckou výpověď o tématu prvořadé důležitosti.

André Lichnerowicz

Moderní teorie poznání věnovala velkou pozornost duševním procesům objevování. Historikové vědy podrobili minulost rozboru s očekáváním, že v ní najdou kámen mudrců velikých objevů. Právě prostřednictvím takových objevů dochází k pokroku ve vědě.

Přímé svědectví autorů objevů, třebaže nemusí odhalovat tento kámen mudrců, je vždy fascinující, i když se často opírá o dávné vzpomínky a i když je těžké vystupovat zároveň jako divák a herec. Ocitne-li se už člověk v roli takového herce, je jeho povinností pokusit se při plném vědomí obtížnosti úkolu své svědectví podat.

Zde bude řeč o matematice. Objevování v matematice, přes udivující podobnost s cestou k objevům v experimentálních vědách, v umění, poezii nebo filozofii, má svá specifika. Ostatně je jedinou oblastí, ve které se trochu vyznám, ať už díky sledování práce mladých vědeckých pracovníků anebo ze své vlastní zkušenosti.

Pro studenta začínajícího s vědeckou prací znamená první vlastní výsledek nádherné odhalení toho, co je to objevovat nové a jak na to jít. Tento první krok je rozhodující; některým se nikdy nepodaří.

Žádná zcela spolehlivá metoda, aby se člověk naučil objevovat, neexistuje. Každý se musí k takovému tajemství propracovat sám. V matematice je však nutné splnit přinejmenším určité minimální podmínky, aby bylo možné přistoupit v jisté oblasti k výzkumu. Je především nutné poznat všechny bytosti, které tuto oblast obývají a seznámit se s nejrůznějšími z nich natolik, aby se daly předvídat jejich reakce a podařilo se proniknout do jejich vnitřního života. Pak si člověk začíná klást otázky: jak se tyto bytosti za těch či oněch okolností zachovají? Jinak řečeno, dostáváme se k vlastním problémům, ať už je zformulujeme sami, nebo je v současnosti či dříve položili jiní.

Pak vstupuje do hry osobní založení vědce. Ten se nachází v podobné situaci jako horolezec, který chce z úpatí hory zdolat její vrchol. Někteří horolezci se hoře budou přizpůsobovat, vyhlédnou si nejjednodušší nebo nejelegantnější cesty. Jiní naopak bez váhání užijí metodu buldozéru: vytvoří přístupový svah mírného sklonu, který mohou opakovaně bez nebezpečí využívat všichni, kteří přijdou po nich. Podle Dieudonného to byl postup, kterému dával přednost Grothendieck, postup, který ho ve skutečnosti dovedl k vytvoření algebraické geometrie. Není tedy pouze jediný způsob, jak problém rozřešit nebo jak začít jeho zkoumání.

Sám dávám přednost této metodě: první krok je „rozšíření kontextu". Problém se formuluje v nejobecnějším kontextu, v němž mají příslušné pojmy stále ještě přesný smysl. Pak se studují dobře zvolené speciální případy obecné formulace. Když je lze vyřešit postupem, který má smysl v obecném případě, zbývá ho přizpůsobit původnímu problému. To je metoda analogická přístupu, který zvolili někteří algebraici při pokusu o zdolání Riemannovy hypotézy o rozložení komplexních kořenů analytické funkce $\xi(z) = \sum_{1}^{\infty} 1/n^z$. Zavedou se funkce ξ nad tělesy algebraických čísel, která nahrazují klasické těleso $\mathbb{C}$ komplexních čísel. Problému se dá vhodný smysl a člověk se ho pak pokouší rozřešit s využitím specifik nového kontextu.

Když je vyřešen některý z těžkých problémů stojících v popředí pozornosti a příslušný důkaz je dostatečně vyjasněn, často se pozastavujeme nad tím, že se řešení nenašlo už dříve. Je to proto, že lidský duch má slabiny. Nevznáší se jako orel, naopak, potřebuje stálou oporu, kterou mu poskytuje důkladné studium dobře vybraných speciálních případů.

Chování vědce, ať již v matematice či v experimentálních vědách, připomíná chování průzkumníka v lese, který hledá pramen nebo vzácný druh hmyzu. Kráčí stezičkou s napnutými smysly připravenými vnímat podněty. Bez umdlení využívá postranní pěšinky. A někdy se stane zázrak. Vydal se za motýlem a objevuje potůček, v němž se povalují valouny zlata.

Start je tedy mírný a pak se tempo stupňuje. Příliš velký spěch, špatně odhadnutá ctižádost, by mohly dílo zmařit.

Znal jsem znamenitého matematika, který se jednoho dne rozhodl změnit své odborné zaměření a věnovat se hledání velké myšlenky v oblasti matematické fyziky. Velké plodné myšlenky jsou bohužel vzácné. Tento matematik se uzavřel podnětům každodenního života, které mu skromný, ale cílevědomý přístup mohl přinést. Nakonec ve své nové oblasti bádání nenašel ani velkou ani malou myšlenku.

*

Nyní však chci podat své osobní svědectví o vzniku jedné teorie, kterou jsem vytvořil okolo roku 1950, teorie kapacit.

Okolnosti doprovázející tento výtvor byly pro mé bádání v jeho různých etapách příznivé. Vše se odehrálo v několikaměsíčním období nepřetržité práce, v němž jsem si byl neustále vědom svých motivací, užívaných metod, vývoje teorie. Proto věřím, že tento příklad může zajímat zároveň matematicky laděné filozofy i matematiky se smyslem pro filozofii.

Původní problém se týkal elektrostatické kapacity; jak ale brzy vysvětlím, přivedl mě rychle ke studiu široké třídy neaditivních množinových funkcí, které jsem pak nazýval *kapacity*. V roce 1950, kdy jsem na problematice pracoval, existovaly četné knihy a práce věnované neaditivním množinovým funkcím. Z nich jsem však nemohl nic vytěžit, neboť záměr jejich autorů byl získat z neaditivní situace vše, co aditivního v ní bylo ukryto. Např. z funkce přiřazující každé části E_3 její průměr definovali tyto obvyklé aditivní funkce: délku, povrch, objem.

Ovšem v případě elektrostatické kapacity, který mě především zajímal, jediná aditivní funkce, kterou lze těmito metodami přiřadit, nabývá hodnot 0 nebo ∞, a je tedy zcela nezajímavá. Bylo proto třeba pozměnit kontext, který se stal příliš omezujícím.

Uvedu jednoduchý příklad, dosti analogický elektrostatické kapacitě, který má také velmi daleko k aditivitě: v rovině $\mathbb{R}^2$ označme $p(X)$ projekci množiny X na vodorovnou osu. Množina $p(X)$ má na této ose vnější Lebesgueovu míru $m^*(p(X))$, kterou budu označovat $f(X)$. Tato funkce má k aditivitě daleko. Jsou-li totiž X_1, X_2 dvě vodorovné úsečky v $\mathbb{R}^2$, jejichž projekce $p(X_1)$, $p(X_2)$ splývají, platí $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) = f(X_2)$, nikoli však $f(X_1 \cup X_2) = f(X_1) + f(X_2)$.

Poznamenejme, že i za této jednoduché situace se již objevují obtížné problémy, které předznamenávají starosti s elektrostatickou kapacitou. Uvedu příklad. Především se dohodněme, že podmnožinu A roviny $\mathbb{R}^2$ nebo prostoru $\mathbb{R}^n$ nazveme *kompaktní*, jestliže A je průnikem posloupnosti *elementárních množin* (tj. konečných sjednocení n-rozměrných uzavřených intervalů); dále množinu A nazveme borelovskou, když lze A získat pomocí spočetných sjednocení a spočetných průniků, vycházíme-li z elementárních množin. Kompaktní množiny jsou po množinách elementárních nejjednodušší borelovské množiny. Zde je pak jeden ze zmíněných obtížných problémů: Jestliže X je borelovská omezená část $\mathbb{R}^2$, existuje pro každé $\varepsilon > 0$ kompaktní množina $K \subset X$ taková, že $|f(X) - f(K)| < \varepsilon$?

Když v našem obyčejném prostoru, tedy v prostoru experimentátorů, připojíme vodič K (např. kovovou kouli) k indukční elektrice, vodič se nabije určitým elektrickým nábojem Q a získá potenciál V. Experimentálně se zjistí, že Q je úměrný V: $Q = k \,.\, V$. Konstanta k se nazývá kapacita vodiče K.

Toto je definice fyzika; pro matematika je v ní příliš mnoho špatně definovaných termínů: obyčejný prostor, vodič, potenciál a dokonce elektřina. Proto podám matematickou definici elektrostatické kapacity, a to nejen pro koule či vodiče, ale pro libovolnou kompaktní podmnožinu trojdimenzionálního Euklidova prostoru E_3. Ten představuje matematický model našeho obyčejného prostoru (po zvolení počátku a ortonormální báze lze ztotožnit E_3 s prostorem $\mathbb{R}^3$ trojic reálných čísel opatřeným skalárním součinem $(x_1y_1 + x_2y_2 + x_3y_3)$ a z něj odvozenou vzdáleností).

Připomeňme především, že v tomto prostoru četné fyzikální zákony jsou vyjádřeny pomocí převrácené hodnoty čtverce vzdálenosti: elektrické, magnetické, gravitační síly. Je třeba vzít v úvahu, že takové síly mají potenciál. Jinak řečeno, jejich silové pole má charakter pole centrálních sil a není nic jiného než gradient $1/r$, kde r označuje vzdálenost od středu. Tento základní poznatek dovoluje nahradit studium silového pole studiem skalární funkce, které se říká potenciál.

Přesněji řečeno: jestliže označíme μ míru nesenou kompaktní částí K prostoru, tj. rozložení (kladné) hmoty na K, budeme potenciálem míry μ nazývat součet P_μ elementárních potenciálů vytvořených elementy míry μ. Přesněji, hodnota funkce P_μ v bodě x je $P_\mu(x) = \int[1/r(x, y)]\, \mathrm{d}\mu(y)$, kde $r(x, y)$ je vzdálenost x od proměnného bodu y probíhajícího K.

Funkce P_μ nabývá hodnot z $[0, \infty]$; její vlastnosti zde nechám stranou.

Když kompaktní množina K není příliš tenká, např. když K je koule, existují nenulové míry μ nesené množinou K takové, že $P_\mu \leqq 1$ všude. Na chvíli nazvěme „dobrou mírou" na K každou míru μ na K, pro niž $P_\mu(x) \leqq 1$ pro každé x a symbolem $\|\mu\|$ označme celkovou velikost míry μ.

Elektrostatickou kapacitou množiny K nazveme supremum velikostí všech dobrých měr na K:

$$cap\,(K) = \sup\{\|\mu\|;\ \mu \text{ je dobrá míra nesená } K\}\,.$$

Lze dokázat, že na K existuje dobrá míra, jejíž potenciál je v podstatě roven 1 všude na K. Taková míra je ve skutečnosti jediná a je nesena vnější hranicí množiny K; nazývá se rovnovážným rozdělením pro množinu K*). Je tedy celkem jasné, že pokud K je obyčejný vodič, např. plná nebo dutá koule, splývá tato míra μ_0 s elektrostatickým rovnovážným rozložením z fyziky, které má potenciál na vodiči rovný 1 (pro elektrický potenciál c by to byla míra $c\,.\,\mu_0$).

Přejděme na okamžik ke srovnání $cap\,K$ s Lebesgueovou mírou $m(K)$. Obě množinové funkce m a cap jsou naprosto odlišné: jestliže K_1 a K_2 jsou dvě disjunktní kompaktní množiny, platí $m(K_1 \cup K_2) = m(K_1) + m(K_2)$. To je takřka opak toho, s čím se setkáváme u kapacity: např. pro dvě různé soustředné (tedy disjunktní) sféry K_1, K_2 (kde K_2 je větší z nich) platí: $cap\,(K_1 \cup K_2) = cap\,K_2$.

Přesněji řečeno, kapacita má udivující vlastnost *dichotomie.* To znamená, že každou dosti slušnou množinu X (např. každou borelovskou množinu) lze rozdělit na dvě slušné množiny se stejnou kapacitou jako X. Tato vlastnost je přesným opakem aditivity. Proto je vyloučeno kapacitu studovat pomocí tradičních metod teorie míry.

Přesto užijeme myšlenku, kterou Eudoxos použil před více než dvěma tisíci lety k měření obsahu rovinné oblasti A: jestliže pro každé $\varepsilon > 0$ (Eudoxos toto neříkal, ale jistě to měl na mysli) lze nalézt mnohoúhelníky, jeden obsahující A a druhý obsažený v A, s rozdílem jejich obsahů menším než ε, řekneme, že oblast A má obsah. Její obsah je podle definice infimum obsahů mnohoúhelníků obsahujících A, které je také rovno supremu obsahů mnohoúhelníků obsažených v A.

Tento postup se také nazývá „Eudoxova exhaustivní metoda". Dobré myšlenky jsou nejživotnější a nejužitečnější, dokonce i po více tisíciletích. V teorii Lebesgueovy míry získala Eudoxova metoda oblibu díky Denjoyovi, který definoval vnitřní míru $m_*(X)$ jako supremum měr kompaktů K obsažených v X a vnější míru $m^*(X)$ jako infimum měr otevřených množin ω obsahujících X. Rovnost těchto dvou čísel znamená pak podle definice měřitelnost takové množiny X.

*) Totožnost elektrických a gravitačních potenciálů si zde říká o připomenutí Newtona a jeho výpočtu gravitační síly uvnitř a vně Země (která se pro jednoduchost předpokládá homogenní). Z tvrzení, která jsme právě připomněli, dosti snadno vyplývá, že v každém bodě vzdáleném r od středu Země je gravitační síla rovna newtonovské přitažlivosti hmoty soustředěné ve středu a rovnající se hmotě části Země obsažené v soustředné kouli o poloměru r. Např. vně Země intenzita pole gravitačních sil je úměrná $1/r^2$, zatímco uvnitř je úměrná r^3/r^2, tedy r. Někteří historikové se kloní k názoru, že Newton vyčkával s publikováním *Principií* dvacet let proto, že tyto vlastnosti, které se dnes považují za elementární, neuměl uspokojivě dokázat.

Na základě tohoto Eudoxova-Denjoyova modelu přiřadíme každé množině $X \subset E_3$ její vnitřní kapacitu a vnější kapacitu takto:

$$cap_* X = \sup \{cap\, K;\ K \text{ kompaktní} \subset X\},$$

$$cap^* X = \inf \{cap\, \omega;\ \omega \text{ otevřená} \supset X\}.$$

V posledním vzorci bereme $cap\, \omega$ jako $cap_*\, \omega$. Metoda je tedy jasná: vychází se z kapacity kompaktních množin; přejde se k otevřeným množinám; potom se pomocí kompaktních a otevřených množin definuje cap_* a cap^*. Jinak řečeno: funkce, která je definována na systému všech kompaktních množin, se dvojím způsobem rozšíří na systém vůbec všech podmnožin prostoru E_3.

Je zřejmé, že $cap_* \leqq cap^*$; je tedy přirozené vyslovit tuto definici:

Definice: *Říkáme, že množina X je kapacitabilní, jestliže $cap_*(X) = cap^*(X)$. Společná hodnota těchto čísel se pak označí $cap\, X$.*

Tato definice je uspokojivá, neboť lze výpočet elektrostatické kapacity kapacitabilní množiny X v E_3 provést bez zavádění „dobrých měr" přiřazených množině X. Totiž prostřednictvím aproximace se vystačí s „dobrými mírami" pro kompaktní množiny.

Vzniká ovšem otázka, zda kromě kompaktních množin a otevřených množin, u nichž je kapacitabilita takřka zřejmá, existují ještě jiné kapacitabilní množiny.

Tento problém je zajímavý dokonce i pro množiny nulové vnitřní kapacity. Role, jakou hrají v teorii lebesgueovské integrace množiny míry nula a jim odpovídající pojem skoro všude, je dobře známa. V teorii potenciálu není základním pojmem míra, ale kapacita. „*Skoro všude*" je nahrazeno „*kvazi všude*": říká se, že určitá vlastnost platí *kvazi všude*, platí-li všude s výjimkou množiny X nulové kapacity.

Zde však vzniká otázka: jde v této definici o vnitřní nebo vnější kapacitu? Jistě tato otázka nevzniká pro kompaktní množiny, protože každá taková množina je kapacitabilní. Bohužel množiny X, které se přirozeně vyskytují, nejsou obecně kompaktní. Zde jsou nyní možné dva přístupy: buď se dokáže (dosti snadno), že $cap_*(X) = 0$ a dostane se věta, kterou nazvu slabou. Nebo se odpracuje mnohem více, aby se ukázalo, že $cap^*(X) = 0$ a získá se silnější věta. Je lepší dokázat snadno slabou větu než obtížně silnou větu? Takové dilema nevznikne, když X je kapacitabilní. *Pak se totiž získají snadné důkazy silných vět.*

Přesněji řečeno, konkrétní problém, vznikající u pojmu kvazi všude, zní: jestliže pro množinu X obvyklého typu (řekněme borelovskou) platí $cap_*(X) = 0$, platí pak již $cap^*(X) = 0$? Obecněji vzniká otázka, zda každá borelovská množina v E_3 je kapacitabilní.

*

Tento problém považovali kolem roku 1950 Marcel Brelot a Henri Cartan za obtížný (a důležitý). Dal jsem se jím nakonec strhnout v přesvědčení, že odpověď by měla být kladná. (Kde se bere toto zaujetí? Tam někde je tajemství spojování demokritovských atomů.)

Prakticky jsem však tehdy nic z teorie potenciálu neznal. Když nad tím uvažuji, *myslím si nyní, že to právě byla příčina, která mi dovolila vyřešit problém vzdorující specialistům.* Zde je zajímavý moment pro filozofy. Trochu se u něj pozastavím.

Moje neznalost mě vlastně zachránila před předsudky, zapověděla mi užít příliš vznešené nástroje teorie potenciálu a donutila mne zapomenout na nahodilé aspekty daného problému. Skutečný stav mých znalostí byl tento:

Znal jsem dobře konstrukci Lebesgueovy míry propagovanou Denjoyem a založenou na Eudoxově myšlence, jak jsem ji vyložil před chvilkou.

Vůbec jsem neviděl, jak využít faktu, že základní prostor je E_3, natož pak na můj vkus technickou definici kapacity příslušné newtonovskému jádru $1/r$.

Proto jsem zvolil nejobecnější možný rámec, v němž nezbytné pojmy mají smysl. Rámec příliš rozsáhlý může samozřejmě skýtat nebezpečí, že nejsou k dispozici žádné nástroje a v důsledku toho se dospěje k pouhým trivialitám. Sám jsem však pociťoval svobodu v postupném omezování obecnosti podle potřeby.

Nahradil jsem tedy E_3 libovolným Hausdorffovým topologickým prostorem*) E (Hausdorffův prostor dovoluje příjemné zacházení s kompaktními množinami) a elektrostatickou kapacitu $cap(X)$ jsem nahradil *neklesajícím* zobrazením f definovaným na systému $\mathcal{K}(X)$ všech kompaktních podmnožin prostoru E. Problém samotný i příslušné základní pojmy lze již v tomto silně primitivním kontextu vyjádřit:

Pro každé $X \subset E$ *položme* $f_*(X) = \sup\{f(K);\ K \text{ kompaktní obsažená v } X\}$ *a* $f^*(X) = \inf\{f_*(\omega);\ \omega \text{ otevřená obsahující } X\}$. *Řekneme, že množina X je f-kapacitabilní, jestliže* $f_*(X) = f^*(X)$.

Pro kapacitabilní množinu X je lákavé označit $f(X)$ společnou hodnotu $f_*(X) = f^*(X)$. To je v pořádku pro případ otevřené množiny X, ale rovnost neplatí pro kompaktní množinu X, pokud f není „zprava spojitá" v tomto smyslu: pro každý kompakt K a pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina ω obsahující K taková, že $f_*(\omega) \leqq f(K) + \varepsilon$. Jinak řečeno: zvětší-li se málo kompakt, jeho kapacita vzroste o málo.

Toto je klasická vlastnost Lebesgueovy míry a každé Radonovy míry. Specialisté v teorii potenciálu ji znali pro Newtonovu kapacitu (třebaže ji předtím jasně neformulovali).

Rozhodl jsem se tedy v dalším předpokládat, že f je neklesající a zprava spojitá; takovou funkci f nazývám kapacitou.

V tomto velice obecném kontextu mnohé příklady ukazují, že E může obsahovat borelovské množiny, které nejsou kapacitabilní. K tomu je hned přinejmenším tento pádný důvod: funkce f_* a f^* jsou definovány pomocí hodnot na kompaktních množinách, zatímco mnohé borelovské podmnožiny prostoru E (a dokonce uzavřené množiny) obsahují jenom velmi malé kompaktní množiny. Přestože kompaktní část prostoru E je krásná množina, její doplněk může speciálně obsahovat hrozné uzavřené podmnožiny.

Bylo proto třeba zúžit problém kapacitability na ty borelovské podmnožiny E, které jsou z kompaktů zkonstruovány pomocí obvyklých jednoduchých spočetných operací *s výjimkou* přechodu k doplňku.

---

*) Čtenář — nematematik, který neví, co je Hausdorffův topologický prostor, kompaktní množina, a *tudíž* ani borelovská množina v takovém prostoru, ztrácí v další četbě pouze částečně, setrvá-li v euklidovském prostoru. Přesto však musí vědět, že záměna E_3 prostorem mnohem obecnějším byla rozhodujícím faktorem při mém myšlenkovém pochodu v labyrintu, kde mě k východu nevedla žádná Ariadnina nit.

Přesněji řečeno, zavedl jsem systém $\mathscr{B}_K$ všech K-borelovských podmnožin prostoru E, tj. nejmenší množinový systém v E obsahující $\mathscr{K}$ a uzavřený na spočetná sjednocení a na spočetné průniky. Ten obsahuje kompakty, množiny typu K_σ (spočetná sjednocení kompaktů), množiny typu $K_{\sigma\delta}$ (spočetné průniky množin typu K_σ), množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ a transfinitně definované další typy.

Navíc je toto zúžení problému rozumné, neboť v $\mathbb{R}^3$ je každá borelovská množina také K-borelovská, protože každá otevřená množina je v tomto případě typu K_σ. Přitom takové omezení na regularitu X samozřejmě nevyžaduje žádná omezení na E nebo na f. Teprve v dalším se omezení, přinejmenším na f, mohou ukázat *nutná*.

Ve skutečnosti tato nutnost vyvstala rychle. Pro $E = \mathbb{R}^2$ a pro subaditivní kapacity (tj.: $f(K_1 \cup K_2) \leqq f(K_1) + f(K_2)$) jsem uměl bez potíží sestrojit velmi jednoduché borelovské, a tedy také K-borelovské množiny, které nebyly f-kapacitabilní.

Velmi cíleně jsem se sám sebe ptal: jaký typ omezení musím na f požadovat? Musí to být takové omezení, které umožní snadno dokázat kapacitabilitu množin typu K_σ, tedy nejjednodušších K-borelovských množin hned po kompaktech.

Nechť tedy $X = \bigcup_n K_n$, kde (K_n) je neklesající posloupnost kompaktů. Musím dokázat, že pro každé $\varepsilon > 0$ existuje otevřená množina ω obsahující X taková, že $f(\omega) \leqq f(X) + \varepsilon$. Je přirozené takovou ω sestrojit jako sjednocení otevřených množin ω_n, kde ω_n obsahuje K_n, a takových, že pro každé n, $f(\omega_n)$ bude velmi blízko k $f(K_n)$, např. $f(\omega_n) < f(K_n) + \varepsilon_n$. Ideální by samozřejmě bylo, kdyby $\varepsilon \geqq \sum \varepsilon_n$. Protože je to pravda pro Radonovu míru f, není to nerozumná myšlenka.

Pro větší názornost začněme vyšetřováním posloupnosti dvou kompaktů K_1, K_2 místo nekonečné posloupnosti (K_n). Chtěli bychom pro případ $K_1 \subset \omega_1$ a $K_2 \subset \omega_2$ nebo obecněji $a_1 \subset A_1$ a $a_2 \subset A_2$ dokázat, že rozdíl

$$f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2)$$

je malý, pokud jsou malé rozdíly

$$[f^*(A_1) - f^*(a_1)] \text{ a } [f^*(A_2) - f^*(a_2)],$$

např. odvodit nerovnost

$$f^*(A_1 \cup A_2) - f^*(a_1 \cup a_2) \leqq [f^*(A_1) - f^*(a_1)] + [f^*(A_2) - f^*(a_2)]. \tag{1}$$

Velmi jednoduchý limitní přechod ostatně ukazuje, že tato nerovnost platí vždy, pokud platí pro kompakty.

Avšak pro další postup bylo třeba zjistit, zda tato velmi přesná nerovnost (platná pro *Radonovy míry*, tj. kapacity splňující $f(A \cup B) = f(A) + f(B)$ pro disjunktní kompakty A, B) je splněna také pro elektrostatickou kapacitu.

Díky své nešikovnosti jsem pro výpočty počmáral hodně stránek. Podařilo se mi však nerovnost uvést na ekvivalentní tvary, z nichž jeden byl tento:

$$f(X \cup Y) + f(X \cap Y) \leqq f(X) + f(Y), \quad (X, Y \text{ kompaktní}). \tag{2}$$

Tato nerovnost je elegantní a o to více žádoucí, že přechází v rovnost pro Radonovu míru f. Na druhé straně je větším omezením než obyčejná subaditivita, neboť $f \geqq 0$. Tuto vlastnost jsem pojmenoval *silná subaditivita.*

Kolegové zabývající se teorií potenciálu mi řekli, že nevědí, zda elektrostatická kapacita takovou vlastnost má. Musel jsem se naučit trochu z teorie potenciálu a nakonec jsem ukázal – jaký to zázrak – že newtonovská kapacita je silně subaditivní.

Menší úsilí mi odhalilo, že silná subaditivita implikuje obecnější nerovnost

$$f^*(\bigcup_i A_i) - f^*(\bigcup_i a_i) \leqq \sum_i [f^*(A_i) - f^*(a_i)] \tag{3}$$

pro každý konečný soubor dvojic $(a_i; A_i)$ takových, že $a_i \subset A_i$. Ideální nerovnost, kterou jsem měl na zřeteli, byla tedy pravdivá. Zbývalo ji užít k původnímu cíli, k důkazu kapacitability množin typu K_σ.

Zde mě však čekalo příjemné překvapení. Obecný tvar nerovnosti (3) mi poskytl následující jednoduché a obecné tvrzení.

Věta: *Nechť f je silně subaditivní kapacita. Potom pro každou neklesající posloupnost (X_n) libovolných množin platí*

$$f^*(\bigcup_n X_n) = \lim_{n \to \infty} f^*(X_n) . \tag{4}$$

Toto tvrzení bylo dobře známo (a používáno) v teorii míry, kde se odvozuje na základě *aditivity* míry. Dokázal jsem tedy, že k jeho platnosti stačí *silná subaditivita.* Odtud plyne důležitý důsledek.

Korolár. *Sjednocení každé posloupnosti kapacitabilních množin je také kapacitabilní; zejména je kapacitabilní každá množina typu K_σ.*

Moje práce měla však ke svému završení daleko, neboť po množinách typu K_σ přicházejí množiny typu $K_{\sigma\delta}$, pak typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ atd. a celá plejáda borelovských množin.

Pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$, které jsou průniky nerostoucích posloupností množin typu K_σ, nelze uvedenou větu přímo aplikovat. Snadno si povšimneme, že dokonce žádná věta stejného typu pro nerostoucí posloupnosti (X_n) a jejich průniky ani neplatí. Každá jakkoli špatná omezená část X prostoru E_3 je totiž (pro elektrostatickou kapacitu f) průnikem vhodné nerostoucí posloupnosti f-kapacitabilních množin. (Je-li (C_n) nerostoucí posloupnost otevřených kulových vrstev s poloměry k, $k + 1/n$ obklopujících X, posloupnost $(C_n \cup X)$ dává takový příklad.)

Naštěstí sice technicky náročnější a poněkud zamotaný, nicméně však krátký důkaz mi poskytl na základě uvedené věty očekávanou odpověď pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Odpověď pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma}$ byla důsledkem koroláru.

Nemusím říkat, že tento první úspěch mi silně dodal odvahu k dokazování obecné věty.

Jenomže další krok se týkal množin typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$. Metoda užitá pro množiny typu $K_{\sigma\delta}$ se již nehodí na tyto množiny mnohem složitější než kompakty. Provedl jsem tedy *velmi cíleně* tuto úvahu: protože jsem uměl dokázat kapacitabilitu množin typu $K_{\sigma\delta}$ pomocí nerovnosti z definice silné subaditivity, mohl bych ji pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ dokázat z nerovností stejného typu, avšak silnějších. Jak ale takové nerovnosti hledat?

Musel jsem počmárat mnoho papírů, než jsem je našel: jejich zápis vypadá jako modifikovaná nerovnost (1) a objevuje se v nich druhý člen nekonečné posloupnosti nerovností odvozených z f klasickým postupem postupných diferencí. Užíval se kdysi v „diferenčním počtu“ a někdy při studiu derivací reálných funkcí. Vysvětlím to podrobněji.

Buď f reálná množinová funkce $X \to f(X)$. Jestliže k X přidáme „přírůstek“ A_1, f se zvětší o přírůstek, který označíme

$$\Delta_1(X; A_1) = f(X \cup A_1) - f(X).$$

Např. podmínka $\Delta_1 \geqq 0$ vyjadřuje, že f je neklesající funkce.

Dále se definuje:

$$\Delta_2(X; A_1, A_2) = \Delta_1(X \cup A_2; A_1) - \Delta_1(X; A_1) =$$
$$= f(X \cup A_1 \cup A_2) - f(X \cup A_1) - f(X \cup A_2) + f(X).$$

Posloupnost (Δ_n) se pak definuje indukcí užitím postupných přírůstků $A_1, A_2, \ldots, A_n$ vztahem

(5) $$\Delta_{n+1}(X; A_1, \ldots, A_{n+1}) = \Delta_n(X \cup A_{n+1}; A_1, \ldots, A_n) - \Delta_n(X, A_1, \ldots, A_n).$$

Podmínka, že f je neklesající a silně subaditivní, se pak zapíše pomocí nerovností*)

(6) $$\Delta_1 \geqq 0 \quad \text{a} \quad \Delta_2 \leqq 0.$$

Tato formulace mě podnítila k pátrání, zda snad postupné diference příslušné elektrostatické kapacitě nejsou střídavě nezáporné; jinak řečeno, zda vždy platí $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$. A přitom se stal nový zázrak: podobný důkaz jako při silné subaditivitě mi ukázal, že pro elektrostatickou kapacitu f je skutečně $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$ pro každé přirozené n.

Elektrostatická kapacita tak připomínala ty reálné funkce, jejichž derivace střídavě mění znaménko, tedy funkce nazývané *úplně monotónní*. Ty jsou ve skutečnosti totožné s Bernsteinovými funkcemi tvaru $\int(1 - e^{-tx}) \, d\mu(t)$, kde μ je nezáporná Radonova míra na $\mathbb{R}_+^* = [0, \infty]$.

Zmíněné množinové funkce jsem nazval *alternujícími funkcemi nekonečného řádu*. Jejich podobnost s Bernsteinovými funkcemi mě přivedla na myšlenku, že mají také integrální reprezentaci pomocí funkcí $g(X)$ analogických exponenciále, tj. splňujících vztah $g(X \cup Y) = g(X) \, . \, g(Y)$. Takové funkce se dostanou záměnou sčítání čísel za operaci množinového sjednocení.

Zmíněná analogie stála za zacházku, a tak jsem na určitou dobu nechal stranou kapacitabilitu a studoval jsem více zblízka Bernsteinův vzorec. Ze známé jednoznačnosti reprezentující míry μ zřejmě vyplývá, že pro každé t je funkce $(1 - e^{-tx})$ minimální, dokonce extremální prvek konvexního kužele úplně monotónních funkcí.

Krajně lákavým se stalo vyjasnění podobného jevu pro kužel alternujících kapacit nekonečného řádu. Očekávání se přesně splnilo a bylo to dokonce relativně jednoduché.

---

*) Pro upřesnění dokažme, že pro neklesající a silně subaditivní f jsou příslušné diference Δ_2 nekladné. Nerovnost $\Delta_2 \leqq 0$ lze totiž přepsat do tvaru $f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(X) \leqq f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)$. Jestliže položíme $Y_1 = X \cup A_1$, $Y_2 = X \cup A_2$ a uvážíme, že $Y_1 \cup Y_2 = X \cup A_1 \cup A_2$, dostaneme ze silné subaditivity $f(X \cup A_1 \cup A_2) + f(Y_1 \cap Y_2) \leqq f(X \cup A_1) + f(X \cup A_2)$, odkud $\Delta_2 \leqq 0$, neboť $X \subset Y_1 \cap Y_2$ a f je neklesající.

Bylo zejména možné lehce charakterizovat kapacity g odpovídající „nerostoucím exponenciálám". Ze vztahu $g(X \cup Y) = g(X) \, . \, g(Y)$ se totiž při volbě $X = Y$ dostane, že g nabývá jen hodnot 0 nebo 1.

Odtud jsem odvodil snadnou aplikací teorie konvexních množin jednoduchou reprezentaci pro každou alternující kapacitu nekonečného řádu. Postupujme přesněji. Předpokládejme pro jednoduchost, že E je kompaktní prostor, pro nějž $f(E) = 1$. Potom na $\mathscr{K}(E)$, což je kompaktní množina kompaktních podmnožin prostoru E, existuje pravděpodobnostní míra μ taková, že pro každý kompakt $K \subset E$ je hodnota $f(K)$ rovna μ-pravděpodobnosti průniku K s proměnným kompaktem z E. Když speciálně je f elektrostatická kapacita v $E = E_3$, dostane se analogické tvrzení s mírou μ nesenou trajektoriemi Brownova pohybu. To poukazuje na těsný vztah mezi teorií potenciálu a teorií pravděpodobnosti, na vazbu, která se stále více potvrzuje.

Zmíněná zacházka mě však především přivedla poprvé k otázkám integrální reprezentace v konvexních množinách a konvexních kuželích.

Moje pozdější výzkumy o integrální reprezentaci měly fakticky za výchozí motivaci jednak popsané studium kapacit, jednak jednu větu, pocházející od R. S. Martina. Mám na mysli větu o integrální reprezentaci pro nezáporné harmonické funkce na oblasti v $\mathbb{R}^n$. Nelze zapomenout na další přání, které jasně vyjádřil R. Godement v jedné práci o reprezentaci nezáporných operátorů v Hilbertově prostoru: v zájmu větší obecnosti formulovat tvrzení, které by ušetřilo jednou provždy stohy papíru. Ale to je jiný příběh; vraťme se raději k původnímu problému kapacitability. Ke zkoumání dodatečných nerovností jsem přešel kvůli důkazu kapacitability množin typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ a dalších typů. Skutečně jsem nalezl $\Delta_3 \geqq 0$, $\Delta_4 \leqq 0$ atd. Bylo možné doufat, že $\Delta_3 \geqq 0$ poskytne výsledek pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$, dále $\Delta_4 \leqq 0$ výsledek pro množiny typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta\sigma\delta}$ atd. Vrhl jsem se do práce, ale tvrdě jsem narazil. Je to nedostatek představivosti a techniky, nebo to je v podstatě věci? Velice uvážlivě jsem si řekl toto: představme si, že se dopracuji k důkazu, že $\Delta_3 \geqq 0$ dává kapacitabilitu pro typu $K_{\sigma\delta\sigma\delta}$ a pak podobně s $\Delta_4 \leqq 0$ atd. Tím však má práce neskončí, neboť po těchto borelovských množinách přijdou složitější: např. množiny typu K_ω, které jsou spočetnými průniky borelovských množin konečných tříd, pak množiny typu $K_{\omega\sigma}$, $K_{\omega\sigma\delta}$ atd. Existují však nové nerovnosti, které bych ke zkoumání takových množin potřeboval? Dospěl jsem tedy k novému problému: jsou kromě nerovností $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$ k dispozici další nerovnosti platné pro elektrostatickou kapacitu? Dokázal jsem, že takové nerovnosti neexistují v tomto smyslu: každý vztah mezi kapacitami libovolného konečného systému množin je důsledkem již nalezených nerovností $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$.

Bylo to sice zajímavé, ale dostal jsem se do slepé uličky. Tehdy se moje podvědomí, bezesporu již po nějaký čas podrážděné, vynořilo na hladinu mého vědomí. Vybavil jsem si, že alespoň u borelovských množin v euklidovském prostoru existují jiné způsoby jejich konstrukce, než postupné opakování kroků spočívajících ve vytváření spočetných průniků a sjednocení z již sestrojených borelovských množin. Polští matematici již dávno totiž ukázali, že každá borelovská podmnožina $\mathbb{R}^n$ je spojitým obrazem vhodné množiny typu G_δ z $\mathbb{R}$, tj. spočetného průniku otevřených podmnožin $\mathbb{R}$, dokonce spojitým obrazem množiny G_δ tvořené všemi iracionálními čísly v $\mathbb{R}$.

Toto není příliš rafinovaný způsob konstrukce borelovských množin, ale za zkoušku to stálo. (Necháváme stranou, že stejný postup lze užít na množiny obecnější než borelovské, totiž na analytické množiny.)

Především jsem dokázal, že každá K-borelovská množina je spojitým obrazem množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Obecněji: nazval jsem K-analytickou množinou každý spojitý obraz množiny typu $K_{\sigma\delta}$. Tím jsem získal solidní vztah mezi množinami typu $K_{\sigma\delta}$ a libovolnými K-borelovskými množinami, dokonce K-analytickými množinami.

Zbývalo nalézt, jak přejít od už dokázané kapacitability množin typu $K_{\sigma\delta}$ ke kapacitabilitě jejich spojitých obrazů.

Nechť tedy X je množina typu $K_{\sigma\delta}$ v prostoru E a φ nechť je spojité zobrazení množiny X do prostoru F, v němž je definována silně subaditivní kapacita f. Má se dokázat, že množina $Y = \varphi(X)$ je f-kapacitabilní. Pokusil jsem se na E definovat pomocnou kapacitu e svázanou s kapacitou f vztahem $e(A) = f[\varphi(A)]$ pro $A \subset E$ kompaktní a využít pak e-kapacitabilitu množiny X v E. Brzy jsem však pochopil, že pro uplatnění této myšlenky je třeba dvojici (E, X) nahradit dvojicí $(E \times F, \Gamma)$, kde Γ je graf zobrazení φ. Pak je třeba použít místo φ projekci $E \times F$ na F, tedy položit $g(C) = f(pr_F C)$ pro každý kompakt C v $E \times F$.

Jestliže si povšimneme, že g je dobře definovaná kapacita, Γ je (stejně jako X) množina typu $K_{\sigma\delta}$ a že pro každou g-kapacitabilní část prostoru $E \times F$ je její projekce f-kapacitabilní a má stejnou kapacitu, důkaz je hotov, protože Y je projekcí grafu Γ.

Cesta k získání toho důkazu byla velmi dlouhá a nakonec mohl být důkaz vyložen na několika stránkách. Ale to je obecně platné: po dokončení obrazu se obraz zarámuje a skicy zahodí. Nikdo již nemůže vidět dlouhou cestu, která k jeho vytvoření vedla. Chtěl jsem zde na chvilku oživit a v největší možné míře zrekonstruovat všechny dlouhé okliky, kterými jsem musel projít.

Koneckonců byly tyto okliky užitečné, neboť v průběhu svého myšlenkového pochodu jsem nalezl nové pravdy, někdy pro původně vytčený cíl neužitečné, ale zajímavé samy o sobě nebo svými důsledky: nekonečná posloupnost nerovností $(-1)^n \Delta_n \leqq 0$; třída K-borelovských a K-analytických množin; první zabočení do oblasti integrálních reprezentací; díky integrální reprezentaci alternujících kapacit nekonečného řádu pevný spojovací článek mezi těmito funkcemi a teorií pravděpodobnosti; a metoda využívání součinových prostorů.

Poznámka překladatele

Gustave Choquet se narodil 1. 3. 1915. Mimořádné nadání pro matematiku projevoval již v průběhu studia na gymnáziu; obzvláště měl v oblibě geometrii. Přestože později vynikl především v matematické analýze, geometrická představivost, intuitivní smysl pro axiomatizaci, mimořádná schopnost abstrakce a lehkost, s níž uměl „vidět prostor", stojí v pozadí jeho matematických úspěchů.

Láska ke geometrii přerostla u G. Choqueta v aktivní zájem o vyučování této disciplíny na školách.

Poznamenejme, že v letech 1950—1960 byl G. Choquet prezidentem mezinárodní komise pro výzkum a zlepšení výuky matematiky. Publikoval řadu odborných prací z didaktiky geometrie a své názory s odhodláním prosazoval. Pro zajímavost uveďme jeden z nich z r. 1974:

„V současné době silný didaktický proud směřuje k nahrazení geometrie v gymnaziální výuce trochou lineární algebry. K tomu dochází v představě, že lineární algebra je královská cesta umožňující bez úsilí pochopit podstatu geometrických vlastností. V tom je poněkud utilitární přístup. Přehlíží tvořivou úlohu geometrických úvah a důležitost geometrické intuice. Tu nelze rozvíjet a upevňovat jinak než bezprostředním kontaktem s jednoduchými geometrickými objekty. Připustit takové nahrazení geometrie algebrou by bylo totéž, jako kdyby horolezec považoval za horolezectví zdolání Everestu helikoptérou."

V letech 1934—38 studoval G. Choquet na pařížské Ecole Normale Supérieure a školní rok 1938/39 strávil jako stipendista v Princetonu. Bylo to období velkých Gödelových objevů, o nichž se mj. dovídal z přednášek A. Churche. V Princetonu vznikl zárodek Choquetova trvalého zájmu o matematickou logiku.

Období 1941—46 zasvětil G. Choquet intenzívní vědecké práci. Byl stipendistou Centre National, de la Recherche Scientifique a zabýval se topologickými a metrickými vlastnostmi množin v euklidovských prostorech, teorií míry, konformním zobrazením, teorií potenciálu, variačním počtem, diferenciální geometrií, ale také parciálními diferenciálními rovnicemi, teorií křivek a teorií grafů.

V r. 1946 obhájil G. Choquet disertační práci, jejíž téma je na pomezí teorie reálných funkcí a geometrie křivek i ploch.

Léta 1946—47 prožil G. Choquet na Institut Français de Pologne v Krakově, v období 1947—49 byl docentem na univerzitě v Grenoblu. Tam zahájil plodnou spolupráci s M. Brelotem v teorii potenciálu. V r. 1949 přichází do Paříže, kde působil na univerzitách i na polytechnice. O tomto období říká:

„Moje vědecká práce se dělila mezi teorii potenciálu a lineární funkcionální analýzu a také četné další oblasti, které mají k těmto disciplínám vztah. Ale takřka všechna moje vědecká činnost vychází z teorie potenciálu. Jsem natolik přesvědčen o plodotvorné síle této teorie, že se výzkumné pracoviště, které v Paříži vedu, zformovalo kolem dvou seminářů, a to z funkcionální analýzy a z teorie potenciálu. Teorie potenciálu ve své bohaté minulosti zrodila nebo v novém světle uvedla mnohé další teorie: Hilbertovy prostory a metodu projekce, teorii míry a v pozdější době distribuce a pravděpodobnostní počet."

G. Choquet absolvoval na deset dlouhodobých zahraničních pobytů (USA, Velká Británie, Austrálie). Je znám jako vynikající vysokoškolský pedagog. Jeho vědecká práce byla oceněna v letech 1945, 1951, 1956 a 1968 cenami pařížské Akademie věd, v r. 1976 byl zvolen řádným členem této vědecké instituce. V r. 1966 byl poctěn titulem Rytíř čestné legie.

G. Choquet je autorem na 150 prací, 7 monografií a řady učebnic. Ve svém textu *Notice sur les travaux scientifiques* z r. 1974 (ze kterého jsou převzaty výše uvedené pasáže) věnuje okolo 70 stran výkladu svých vědeckých výsledků, jejich genezi i významu a aplikacím. Patrně nejznámější jsou Choquetovy výsledky v teorii kapacit a v oblasti integrální reprezentace konvexních množin. Necháme-li stranou jeho práce z reálných a komplexních funkcí, variačního počtu, geometrie a její didaktiky a teorie grafů, stále máme podstatnou část Choquetova díla před sebou: teorie potenciálu (vlastnosti průměru pro harmonické a polyharmonické funkce, Greenovy prostory, harmonické a polyharmonické polynomy, velikost množiny bodů tenkosti, míry na polárních množinách typu G_δ, existence jemného nosiče míry, nové důkazy Keldyšovy věty o iregulárních bodech, teorie potenciálu pro obecná jádra, integrál energie, věty o konvergenci potenciálů, teorie vymetání atd.); funkcionální analýza (cylindrické a kónické míry, adaptované prostory, reprezentace lineárních forem atd.); teorie množin (např. konstrukce ultrafiltrů význačných vlastností); teorie míry (např. množiny paradoxních vlastností, Prochorovovy prostory); topologie (teorie konvergence, Baireovy prostory, topologické hry, deskriptivní teorie množin, topologie $\mathbb{R}^n$ atd.).

[*Děkuji dr. V. Rejtharové, doc. dr. J. Veselému, CSc., a doc. dr. P. Vostrému, CSc., za připomínky, které přispěly ke zlepšení překladu.*]