Paul R. Halmos

Jsou počítače ve výuce škodlivé?

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 37 (1992), No. 4, 223--228

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137565

Jsou počítače ve výuce škodlivé?

Paul R. Halmos

Paul Halmos získal všechny tři stupně vysokoškolského vzdělání na University of Illinois. Po skončení Ph. D. se na několik let stal asistentem Johna von Neumanna. Od té doby učil na mnoha univerzitách, mj. na Miami, na Havaji, v Edinburghu, v Montevideu a v Západní Austrálii. Od r. 1985 působí na Santa Clara University. Jeho matematické zájmy zahrnují ergodickou teorii, algebraickou logiku a operátory na Hilbertově prostoru.

Mohou počítače při výuce opravdu škodit? Býval jsem přesvědčen o tom, že ano. Když jsem však zasedl k sepsání tohoto článku a poptal se několika přátel na jejich názor, některé z jejich odpovědí otřásly mým přesvědčením. Následující text se dotýká těchto otázek: (1) jak užívat počítače při výuce abstraktních pojmů; (2) jak mohou při výuce pomoci numerické výpočty; a (3) jak může počítač kontrolovat správnost našich hypotéz. Po těchto kladech přicházím k jednomu záporu: (4) počítačové vyučování abstraktních pojmů v nesprávný čas může skýtat nebezpečí. Závěr, tedy můj závěr, je (5) přestože samotná existence počítačových programů může kvalitu naší výuky zlepšit, vytváří zároveň silné nebezpečí, že se z dobrého vyučování stane špatné. Proto takové programy musí být užívány s rozvahou, jinak raději vůbec ne.

Dobré programy

Pro začátek se podívejme na působivé a přesvědčivé argumenty ve prospěch uplatnění počítačů v posluchárnách.

Keith Devlin popisuje ve [4] program *DE-Graph*. Říká, že „byl vytvořen ke grafickému znázorňování diferenciálních rovnic a k jejich numerickému řešení.“ Napíšete např. $y' = \sin(xy)$ a ejhle!, na obrazovce se objeví vektorové pole (spousta malých šipek) se znázorněným systémem partikulárních řešení. K. Devlin popisuje zkušenosti jednoho z vyučujících s *DE-Graphem* při zahájení výkladu o použití programu. „Nejpozději po pěti minutách už nikdo v laboratoři nedbal na to, co říká... Každý byl příliš upoután zkoumáním různých vzorových diferenciálních rovnic, které menu programu nabízelo... Zájem podněcující objevitelské učení od prvního okamžiku... prostě skvělé!“

Jane Dayová v [3] píše: „...$(\sin x)/x$ je podivně vyhlížející výraz a ještě podivnější je pro začátečníka poznatek, že má pro $x \to 0$ limitu. Program znázorňující grafy to umí ilustrovat velmi pěkně... Pro většinu studentů je nyní znázorňování třírozměrných

P. R. Halmos: *Is Computer Teaching Harmful?* Notices of the American Mathematical Society *38* (1991), „Computers and Mathematics“ column, pp. 420–423. Přeložil Ivan Netuka.

útvarů opravdu nesnadné, protože dnes se na středních školách sotva učí stereometrie. Proto soubor programů na takové znázorňování či na kreslení funkcí zadaných v polárních souřadnicích může pomoci.“

Sheldon Axler [1] hovoří o programu, který řeší Dirichletovu úlohu na kouli v $\mathbf{R}^m$ pro polynomy. „…Chcete, řekněme, nalézt harmonickou funkci v $\mathbf{R}^3$, která se na jednotkové sféře $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ shoduje s polynomem $x^3y^4z^5$. Program vám řekne řešení, kterým je jistý polynom v $\{x, y, z\}$ stupně 12.“

Dobré počítání

Co chcete v kalkulu své studenty naučit? Má to být vzorec

$$\int \operatorname{arctg} x \, \mathrm{d}x = x \operatorname{arctg} x - \frac{1}{2} \log(1 + x^2)?$$

Nebo to, že integrál je *součet* velice mnoha velice malých čísel a že diferenciál je *rozdíl* hodnot funkce ve dvou velice blízkých bodech? Dokonce za temných dob biflování kalkulu (před padesáti lety? vloni?) by většina matematiků dala druhou odpověď, ale v posluchárně by většinu času strávila tím prvním.

Courantova kniha [2] byla jednou z prvních, v nichž se (určitý) integrál definuje před derivováním, a společenství vyučujících tuto myšlenku přijalo jak s pochvalou, tak s potupou. Obecně uznávaný přístup byl (je stále?) nejprve definovat derivaci, pak definovat antiderivaci (primitivní funkci) a potom, částečně přes nedefinovaný pojem obsahu a částečně přes jakési uspěchaně popsané limity součtu, definovat určitý integrál. Při tomto přístupu není základní věta kalkulu ani překvapující, ani vzrušující a snadno se zapomíná. Místo toho, aby studenti pochopili a zapamatovali si, že tato věta má něco společného se *součtem* a *rozdílem* jako výsledky inverzních operací, většina z nich se domnívá, že jde o záměrně matoucí způsob vyjádření vztahů mezi $\operatorname{arctg} x$ a $\dfrac{1}{1+x^2}$. Vzorec jako $\displaystyle\int \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2} = \operatorname{arctg} x$ je pouze jiným zápisem pro $\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x} \operatorname{arctg} x = \dfrac{1}{1+x^2}$ a proč z toho dělat poprask?

Když následujete Couranta a začnete kalkulus povídáním o limitách součtů, čeká vás hned těžká chvilka. Potíž je v tom, že není snadné dát příklady. Courant integruje 1 a x a také x^2 vcelku bez obtíží, ale s x^3 a vyššími celočíselnými exponenty se výklad stává komplikovanější a užívá stále více důvtipných triků. Pro racionální exponenty je věc ještě o něco horší, diskuse sinu a kosinu musí užívat goniometrických identit, které si někteří z nás pamatují pouze po určitý čas a systematické zvládnutí všech tak zvaných „elementárních“ funkcí se zdá být v nedohlednu. Courant se za komplikace omlouvá, avšak my máme usoudit, že takový už je život.

Důvodem k tomu, abychom studenty učili, že integrály jsou součty, je příprava na pochopení základní věty kalkulu a také na pochopení typů neelementárních integrálů, které běžně vznikají v teorii i praxi. K tomu, abychom dovedli studenty k poznání, že integrály jsou součty, může užití samočinných počítačů velmi přispět. Počítač umí vyčíslit příslušné součty a dělá to jako briskní orákulum, aniž by nás mátl a rušil speciálními triky, které s kalkulem nemají nic společného. Po „integrování“ několika (několika desítek? několika stovek?) funkcí pomocí součtů si pravděpodobně student zapamatuje, že integrování je sčítání a dokonce možná vysloví touhu po systematické metodě, která dá odpověď bez počítání. Když student dospěje do tohoto stadia, ať už s naší pomocí či bez ní, nastal čas se zaměřit na „určitý“ integrál s proměnnou horní mezí. Studium takových integrálů je motivací — dodatečnou motivací — k zavedení derivací. Směrnice tečen a rychlosti jsou samozřejmě důležité, ale dodatečný důvod k vyšetřování „anti-integrálů“, důvod, který se vynořil a má tedy pro studenty bezprostřední význam, může být pro některého z nich přesvědčivější. Druhé dobré použití počítačů, které chci obhajovat, se týká nekonečných řad. To je pro mnoho studentů obtížná partie a není snadné najít konkrétní příklady, které by se daly u tabule spočítat. Mezi standardní příklady patří

$$\sum \frac{1}{2^n}, \quad \sum \frac{1}{n!}, \quad \sum \frac{1}{n^2}$$

a jejich zřejmé modifikace, ale numerické počítání se brzo i s nimi stává obtížným.

Poslušný počítač, který umí sečíst dosti členů tak, že se konvergence zdá plausibilní, může dát cennou informaci experimentálního rázu. Dokonce by snad uměl vyčíslit čas potřebný k dosažení přesnosti s předem určeným ε a tím poskytnout zkušenost, která by mohla následnou teoretickou diskusi učinit přijatelnější, než tomu je obvykle.

Je zde ale háček spočívající v zaokrouhlování: má za následek šokující větu, že z hlediska počítačů řada konverguje, právě když její členy konvergují k nule. To je pravda, ne? Pracuje-li stroj, řekněme, s přesností na 20 míst, potom přidání dalšího členu se jeví jako přidání nuly, jakmile se absolutní hodnoty členů dostanou pod 10^{-20}-násobek získaného částečného součtu. Pro konvergentní řadu má počítač šanci uhodnout součet nebo aspoň jeho řád snadněji, než když tápete poslepu, ale nezávisle na době vašeho experimentování si bude počítač i nadále myslet, že harmonická řada konverguje. Je to ještě horší: i kdybyste měli počítač s nekonečnou přesností a začali počítat částečné součty harmonické řady rychlostí jeden člen za sekundu, trvalo by vám něco přes 28 miliónů let, než byste dosáhli součtu 35. Při rychlosti tisíc členů za sekundu to vychází na 28 tisíc let a i při nepravděpodobné rychlosti milión členů za sekundu by to trvalo 28 let. K jakému závěru asi povede studenta počítání takových částečných součtů: bude to konvergence nebo divergence?

Programy jako kontrola

Třetím způsobem využití počítače při výuce je kontrola výsledků myšlení. Nejjednodušší příklad: jestliže jste použili metodu per partes k výpočtu integrálu $\int \operatorname{arctg} x\,dx$, může vám počítač (nebo proslavené *Stručné tabulky* ... [5]) říci, zda jste si počínali anebo nepočínali správně. Samozřejmě je užitečné to vědět v záporném případě — pak se musí pracovat dále. Všeobecně se připouští, že je užitečné to vědět v kladném případě: trocha chvály, přátelské povzbuzení „zvládl jsi to", je psychologicky velkou pobídkou k dalšímu úspěchu.

Je k dispozici mnoho lepších příkladů ilustrujících toto uplatnění počítačů. Tak například jednou z nejdůležitějších věcí, kterou je třeba se naučit o diferenciálních rovnicích, je umět popsat řešení před jeho skutečným nalezením (nebo dokonce místo něho). Jaké jsou jeho kvalitativní rysy? Je periodické? Utíká do nekonečna? *DE-Graph* to pro nás udělá, ba i více: Zadáte si vaši diferenciální rovnici a o několik sekund později můžete vidět, že vaše předpověď byla správná (nebo nebyla). Podobné poznámky jsou zřejmě na místě, pokud jde o znázorňování třírozměrných útvarů (jak asi vypadá sedlový bod, třeba u funkce $z = xy$?). Sheldon Axler říká o programu pro harmonické funkce: „Do algoritmu je vložena troška pěkné teorie, aby program fungoval, a je příjemné posluchačům ukázat, že věty, které dokazujeme, mají konkrétní aplikace."

Předčasné odpovědi

Dále bych rád diskutoval o tom, že určité aspekty uplatnění počítačů, které jejich příznivci považují za nejlepší, nám ve skutečnosti mohou přivodit ty nejzávažnější didaktické problémy. Zajisté je pravda, že vševědoucí počítač, který vám musí říci zaručeně správnou odpověď, takže ji můžete porovnat s vaší vlastní odpovědí, představuje při výuce báječný nástroj — ale je to nástroj nebezpečný. Nebezpečí spočívá v tom, že počítač lze použít k získání odpovědi, aniž bychom si nejprve lámali hlavu, a to je špatné vyučování. Odpověď, kterou získáte od počítače, je odpověď věštecká — zeptáme se „kolik?" nebo „jakého tvaru?" a dostaneme odpověď. To je v pořádku. Avšak do věci nepronikneme, a to je špatné. Ne, ne, prosím vás nezačínejte namítat, že se často (vždycky?) hluboké proniknutí do podstaty dostavuje po úmorném nahromadění přízemních poznatků. To je samozřejmě pravda. Ale dejme na přísloví: Bez práce nejsou koláče. Když mi někdo řekne předčasně, že derivace

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3,\ x^4,\ x^5$$

jsou

$$0,\ 1,\ 2x,\ 3x^2,\ 4x^3,\ 5x^4,$$

určitě „proniknu" do derivování x^n pro mnohé další hodnoty n — ale je to opravdu proniknutí? Podle mého názoru lze opravdu do věci proniknout pouze propočítáním podílu přírůstků pro $n = 2$ a pak $n = 3$ a pak snad ohlédnutím se zpět na $n = 1$, a nikoliv pouhým získáním věštecké výpovědi o několika faktech.

Počítání riemannovských součtů pomocí počítače má význam pro zapamatování, neboť opakovaně zdůrazňuje, že integrování je sčítání; nepředstírá, že by přispělo k proniknutí do podstaty. Stejný komentář platí pro počítání částečných součtů nekonečných řad; hmatatelně ukazuje, co pro posloupnost čísel znamená k něčemu se blížit. Použití počítače ke kontrole předpovědi vlastností řešení diferenciální rovnice má přinejmenším psychologickou cenu. Ale užívat počítač, abychom své předpovědi vynechali a místo nich si od počítače nechali říci, jak vypadají obrázky řešení — to je přesně totéž, jako užít počítače k derivování x^n: to má velice malou cenu, pokud vůbec nějakou. Když se učíme a snažíme pochopit matematiku, jedním z nejdůležitějších aspektů je vzrušující nespokojenost z neznalosti odpovědi. Okrást studenta o zápas, který vede k odpovědi, a o blažený pocit pochopení, který přináší vítězství, to je špatné vyučování.

Zájem podněcující objevitelské učení vynášené Keithem Devlinem je to, o co každý dobrý učitel samozřejmě usiluje, snaží se toho samozřejmě dosáhnout co nejdříve, ale nebývá to hned na začátku. Avšak co se adepti *DE-Graphu* vlastně učili? Odpověď: obrázky — a ne metody nalézání obrázků. Bavilo je vyvolávat a měnit obrázky a to je samozřejmě další důvod, proč přestali poslouchat výklad. Plně se stavím za zábavu, zábavné učení je lepší (a účinnější) než jiné, ale hrát si s X, je-li naším cílem učit se o Y, to není učení o Y.

Špatné učení právě uvedeného typu, totiž odpovědi hned, metody později (pokud vůbec?), není vynálezem počítačů. Klidně mohlo existovat mnohem dříve. Každý učitel kalkulu může nechat studenty napsat nx^{n-1} na každý list papíru, kde se objeví x^n, a dělat to mohou dříve, než se objeví na obzoru podíly přírůstků. Soudě podle mnoha studentů, které jsem učil po absolvovaném středoškolském výkladu kalkulu, mám podezření, že mnoho učitelů kalkulu právě tak postupuje. Tabulky integrálů (Pierceovy a další) existovaly a byly dávno v oblibě. Po celou dobu mohli učitelé „učit" integrování prostě tak, že dali tabulky každému studentu do ruky. A i kdyby to tak učitel neudělal, studenti by tak mohli postupovat sami, neboť vyhledat hotové řešení se někdy považuje za méně namáhavé, než o problému přemýšlet. Sám však vcelku nevěřím, že tento typ špatného vyučování je rozšířený — knížky jsou na hledání nepříjemné a vyhledat něco v tabulkách není vždy úplně nejjednodušší úkol. Ale dnešní počítače, to je zase něco jiného. Jsou studentům snadno dostupné, jejich fanoušci je inzerují jako velký krok do budoucnosti a je to zábava, velká zábava, si s nimi pohrát. Stisknete knoflík a představení okamžitě začíná. Když se chcete dovědět něco jiného, z programu vyskočíte a stisknete jiný knoflík. Kočky a malé děti si rády hrají s pingpongovým míčkem proto, že nepatrné úsilí vyvolá velký účinek, to je velice uspokojující.

Učte matematiku, ne programy

Při výuce s počítači musíme pečlivě rozvážit, nač položíme důraz. Někteří nadšenci jsou, zdá se, v pokušení naučit v nejlepším případě, jak používat počítač, aby se něco dělo a v nejhorším případě, jak používat jednotlivý program, aby se něco dělo, spíše než aby naučili, co to „něco" je. To je špatné vyučování a možná neříkám nic hlubšího, než že špatný učitel odevzdává špatnou práci a dobrý učitel dobrou, ať už s počítačem či bez něho. Moje obavy ohledně *DE-Graphu* a programu pro Dirichletovu úlohu pramení z tohoto druhu špatného vyučování, ke kterému užívání takových programů (užívání v nepravou dobu) může vést. Takový postup je jako věnovat většinu času při výchově budoucích strojvůdců učení, jak ovládat řídící páky, nebo při výchově budoucích šifrantů učení, jak obsluhovat kódovací zařízení. Nezbytné? Pravděpodobně ano. Postačující? Jistě ne. Kloním se k druhému extrému: postavit se vůbec proti užívání počítačů při vyučování matematiky. Užijme příměru: pseudovyučování, z něhož asi budou vycházet lidé, kteří čas od času mají příležitost stisknout na kalkulačce knoflík označený „cos", aniž by měli ponětí, co kosinus znamená, a aniž byli schopni uvědomit si, že při stisknutí 60° bude výsledek $\frac{1}{2}$. Takoví lidé jsou, ale to nejsou ti, které se snaží vychovat studium matematiky. Chceme také kromě jiného vyškolit lidi, kteří budou schopni navrhovat počítače budoucnosti a ne pouze obsluhovat ty dnešní.

Jaký závěr lze z těchto postřehů udělat? Jednou z možností je zakázat užívání počítačů jako zdroj odpovědí při vyučování — ale to je pošetilé. Je to pošetilé, neboť je to nerealistické. I kdyby žádný učitel nepoužíval počítače tímto způsobem, počítače by stejně byly studentům k dispozici a na rozdíl od tabulek integrálů snadno dosažitelné a byla by radost je užívat. Nemůžeme legislativně vyloučit existenci počítačů z výuky. Počítače se zabydlely v posluchárnách i mimo ně a musíme se naučit s nimi žít. Otázka: Jak? Odpověď: Změnit zaměření výuky tak, aby se zdůrazňovaly nepočítačové ideje a metody. V přednáškách z kalkulu učme pořádný náročný kalkulus. Učme ideje, učme zdroje rutinných způsobů přístupů k problémům. Vychovejme studenty, kteří, až přijde jejich čas, budou schopni řešit problémy, které zatím kvůli vlastní nevědomosti neumíme ani formulovat.

Říkám tedy, že počítače přinášejí spoustu dobrého, že nás nutí dělat, co bychom měli dělat odjakživa? Snad. Říkám také, že by počítače neměly nahradit žádnou součást našeho vyučování? Ano.

Literatura

[1] S. Axler: *Osobní korespondence.*
[2] R. Courant: *Differential and integral calculus, vol. I.* Nordemann Publ. Comp., Inc., New York, 1938.
[3] J. Day: *Osobní korepondence.*
[4] K. Devlin: *The Right Stuff.* Notices of the AMS *37* (1990), 417–425.
[5] B. O. Pierce: *A short table of integrals.* Ginn and Comp., Boston, 1929.

Poznámka překladatele. K Axlerovu programu pro harmonické funkce připomeňme tento výsledek M. Brelota a G. Choqueta (Second colloque sur les équations aux dérivées partielles, Bruxelles, 1954, s. 45–66): Nechť $D \subset \mathbf{R}^m$ je elipsoid a P je libovolný polynom v $\mathbf{R}^m$. Potom existuje harmonický polynom Q stejného stupně takový, že $P =$ $= Q$ na hranici množiny D. (Autoři uvádějí, že tato vlastnost elipsoidy charakterizuje.)