Jindřich Bečvář
150 let od objevu kvaternionů

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 38 (1993), No. 6, 305--317

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137554

150 let od objevu kvaternionů

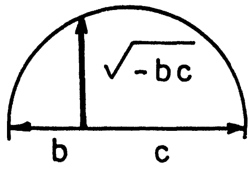
Jindřich Bečvář, Praha

Před 150 lety, dne 16. 10. 1843, byly objeveny kvaterniony. Jejich objevitelem byl irský matematik, fyzik a astronom, Sir William Rowan Hamilton (1805–1865). S objevem kvaternionů úzce souvisela problematika komplexních čísel, jejich všeobecné uznání a pochopení jejich geometrické interpretace.

* * *

Komplexní čísla se poprvé objevila v 16. století při řešení algebraických rovnic v pracích italských matematiků. Bylo to v knize *Ars magna* (1545) Gerolama Cardana (1501–1576) a v knize *Algebra* (1572) Rafaela Bombelliho (1526–1573). V 17. a 18. století s nimi pracovali hlavně Albert Girard (1595–1632), René Descartes (1596–1650), který užil termínu „imaginární číslo“, Isaac Newton (1643–1727), Gottfried Wilhelm Leibniz (1646–1716), Johann Bernoulli (1667–1748), Abraham de Moivre (1667–1754), Leonhard Euler (1707–1783), který pro $\sqrt{-1}$ zavedl symbol i, a další. Koncem 18. století se již komplexní čísla hojně a s úspěchem užívala v matematické analýze (funkce komplexní proměnné, lineární diferenciální rovnice s konstantními koeficienty, výpočty integrálů apod.), v hydrodynamice, kartografii atd. Pro jejich všestranné uznání jistě přispěla i problematika související se základní větou algebry. Přesto však ještě stále nebylo jasné, jak chápat prvek $\sqrt{-1}$ a jak si komplexní čísla představit. Chybělo to, čemu říkáme geometrická interpretace komplexních čísel, tj. představa o komplexních číslech jako bodech roviny. Tuto skutečnost můžeme doložit např. Leibnizovým výrokem, že „komplexní čísla jsou divem analýzy, netvorem světa idejí, obojživelníkem mezi bytím a nebytím“.

První myšlenka o vztahu komplexních čísel a bodů roviny se objevila u anglického matematika Johna Wallise (1616–1703), profesora oxfordské univerzity, který ve své knize *De algebra tractatus* (1685) znázorňoval imaginární číslo $\sqrt{-bc}$ jako kolmou úsečku k opačně orientovaným úsečkám b, c:



Inspirován byl zřejmě Euklidovou větou o výšce. Wallisova idea však neměla ohlas.

Zdá se téměř jisté, že Euler, i když pojem komplexního čísla exaktně nedefinoval, chápal komplexní číslo $x + yi$ jako bod roviny s kartézskými souřadnicemi x, y. Užíval

Doc. RNDr. JINDŘICH BEČVÁŘ, CSc., (1947) pracuje v Matematickém ústavu UK, Sokolovská 83, 186 00 Praha 8.

polární souřadnice a vyjadřoval komplexní číslo v goniometrickém tvaru

$$x + yi = r(\cos\varphi + i\sin\varphi).$$

Kořeny rovnice $z^n = 1$ reprezentoval vrcholy pravidelného n-úhelníka.

Norský kartograf a geodet Caspar Wessel (1745–1818), spolupracující s Dánskou akademií věd, rozpracoval roku 1799 vektorový počet v rovině a podal geometrickou interpretaci komplexních čísel a jejich operací jako bodů či vektorů roviny. Zavedl imaginární osu kolmou k ose reálné, vektory roviny reprezentoval komplexními čísly a operace s vektory prováděl pomocí operací s komplexními čísly. Wessel psal ε místo $\sqrt{-1}$. Pokoušel se operovat i s vektory v prostoru. Celý tento aparát vytvořil pro řešení geodetických úloh. Jeho práce však zcela zapadla, snad proto, že byla psána dánsky. Ve francouzském překladu byla vydána až po sto letech.

S obdobnou myšlenkou geometrické interpretace komplexních čísel přišel roku 1806 švýcarský matematik Jean Robert Argand (1768–1822). Interpretoval $\sqrt{-1}$ jako otočení roviny o $90°$ (inspirován byl rovností $\sqrt{-1}.\sqrt{-1} = -1$).

Ke geometrické interpretaci komplexních čísel jako bodů roviny dospěl na přelomu 18. a 19. století i Carl Friedrich Gauss (1777–1855). Ke všeobecnému uznání a rozšíření této myšlenky dochází až ve dvacátých a třicátých létech minulého století zejména pod vlivem knihy *Cours d'analyse* (1821), kterou napsal Augustin Louis Cauchy (1789–1857) a hlavně pak pod vlivem význanmé Gaussovy práce *Theoria residuorum biquadraticorum* (1831). Rovina komplexních čísel byla proto v 19. století nazývána Gaussovou rovinou nebo Cauchyovou rovinou. Komplexní čísla přestala mít tajuplný charakter; přirozeným způsobem byla chápána i aritmetika komplexních čísel daná rovnostmi

$$(x + yi) + (x' + y'i) = (x + x') + (y + y')i,$$
$$(x + yi).(x' + y'i) = (xx' - yy') + (xy' + yx')i$$

či v goniometrickém tvaru

$$r(\cos\varphi + i\sin\varphi) \cdot r'(\cos\varphi' + i\sin\varphi') = r \cdot r'\,[\cos(\varphi + \varphi') + i\sin(\varphi + \varphi')].$$

Gaussovo pojetí komplexních čísel roku 1833 mírně modifikoval Hamilton. Komplexní čísla považoval za dvojice reálných čísel; jejich sčítání a násobení definoval rovnostmi

$$(x, y) + (x', y') = (x + x', y + y'),$$
$$(x, y) \cdot (x', y') = (xx' - yy', xy' + yx').$$

Obě pojetí komplexních čísel, Gaussovo i Hamiltonovo, jsou nám dnes zcela běžná. Stejně pochopitelná je pro nás i jejich geometrická interpretace. Komplexní číslo $x + yi$ je v rovině opatřené kartézskými souřadnicemi znázorněno bodem $M = [x, y]$, nebo ještě lépe vektorem $\overrightarrow{OM}$ vedeným z počátku O do bodu M. Sčítání komplexních čísel odpovídá sčítání vektorů (vektorový rovnoběžník) a násobení komplexních čísel (jako vektorů) má rovněž geometrický smysl (je vidět zejména při vyjádření komplexních čísel v goniometrickém tvaru): vynásobí se délky příslušných vektorů (absolutní hodnoty nebo též moduly komplexních čísel) a sečtou se příslušné argumenty.

Komplexní čísla byla tedy od třicátých let minulého století chápána jako dvojsložková čísla, která byla geometricky interpretována jako body roviny (Gaussova rovina). Vznikla jakýmsi procesem zdvojení oboru reálných čísel. O komplexních číslech v historii matematiky a souvislostech s problematikou algebraických rovnic se můžeme dočíst např. v [1, 2, 5, 6, 8].

* * *

Geometrická interpretace komplexních čísel a způsob, jakým jsou komplexní čísla vytvořena z čísel reálných (proces zdvojení), vedly jednak k pokusům o rozšiřování oboru komplexních čísel na větší číselný obor, jednak k obecnějším úvahám o strukturách vícesložkových čísel, kterým se později začalo říkat čísla hyperkomplexní.

Ve stručnosti je možno říci, že byly studovány množiny formálních výrazů

$$a_0\alpha_0 + a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n,$$

kde n bylo pevně zvolené přirozené číslo, $a_0, a_1, \ldots, a_n$ reálná čísla a $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ jakési nové základní jednotky.

Sčítání těchto formálních výrazů bylo definováno po složkách a mělo tedy rozumné vlastnosti (asociativita, komutativita, existence nulového prvku a existence opačných prvků, tj. možnost odčítání). Násobení mělo být se sčítáním svázáno distributivním zákonem. Proto bylo třeba definovat jen násobení jednotek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$. Na násobení se však mnohdy kladly další požadavky (asociativita, komutativita, existence jednotkového prvku a existence inverzních prvků, tj. možnost dělení), které nalezení vhodných vzorců pro násobení jednotek $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_n$ komplikovaly.

Těmito problémy se zhruba od čtyřicátých let minulého století zabývali Hamilton, Arthur Cayley (1821–1895), Augustus de Morgan (1806–1871), bratři Charles Graves (1810–1860) a John T. Graves (1806–1870), William Kingdon Clifford (1845–1879) a další. Někteří se snažili najít nový číselný obor (alespoň trojsložkových čísel), který by rozšiřoval obor čísel komplexních. Násobení těchto nových čísel mělo být asociativní a komutativní, měl existovat jednotkový prvek a ke každému nenulovému prvku prvek inverzní. Hledaná struktura měla tedy být — podle naší terminologie — komutativním tělesem (polem). Protože mělo jít o rozšíření oboru komplexních čísel, bylo kladeno $\alpha_0 = 1$ a $\alpha_1 = \mathrm{i}$, kde $\mathrm{i}^2 = -1$. Ve stejné době se však objevily i práce, ve kterých byly studovány struktury hyperkomplexních čísel s nejrůznějšími operacemi násobení, pro které nebyly a priori vyžadovány vlastnosti známé z číselných oborů.

Hamilton se téměř deset let marně pokoušel najít obor trojsložkových čísel, který by rozšiřoval obor čísel komplexních. Při hledání vzorce pro násobení trojsložkových čísel $a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j}$ mu stále vycházely struktury, které obsahovaly netriviální dělitele nuly, tj. nenulové prvky, jejichž součin je roven nule. Pokoušel se vlastně „udělat" z bodů prostoru čísla podobným způsobem, jakým jsou z bodů roviny „udělána" čísla komplexní.*) Nakonec se rozhodl tento problém řešit pro čtyřsložková čísla $a + bi + cj + dk$, která nazval kvaterniony. Dne 16. října 1843, když šel po Broughamském mostu přes Royal Canal v Dublinu na zasedání Královské irské akademie věd, napadl ho vzorec pro násobení základních jednotek. Nadšen vyřešeným problémem, vyryl tento vzorec kapesním nožem do kamene Broughamského mostu. Toto místo dodnes připomíná deska s nápisem:

Here as he walked by
on the 16th October 1843
Sir William Rowan Hamilton
in a flash of genius discovered
the fundamental formula for
quaternion multiplication

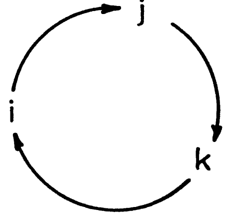
$i^2 = j^2 = k^2 = ijk = -1$

& cut it on a stone of this bridge.

Z výše uvedených vztahů se za předpokladu asociativity násobení snadno určí tabulka pro násobení čtyř základních jednotek 1, i, j, k:

·	1	i	j	k
1	1	i	j	k
i	i	−1	k	−j
j	j	−k	−1	i
k	k	j	−i	−1

Násobení jednotek i, j, k, zanesené v této tabulce, si snadno zapamatujeme pomocí následujícího obrázku:



Součin dvou jednotek, které jdou za sebou v tomto cyklu, je jednotka třetí (např. $jk = i$), součin dvou jednotek v opačném pořadí (proti směru šipky) je záporně vzatá jednotka třetí (např. $ik = -j$); navíc se snadno pamatují rovnosti $i^2 = j^2 = k^2 = -1$.

*) V dopise synu Archibaldovi Hamilton vzpomíná, jak se ho při snídani jeho synové ptali: „Táto, už umíš násobit trojice?“ A on odpovídal: „Ne, umím je jen sčítat a odčítat.“

Součin dvou kvaternionů vypadá takto*):

$$\begin{aligned}(a+bi+cj+dk)(a'+b'i+c'j+d'k) &= \\ &= (aa'-bb'-cc'-dd')+(ab'+ba'+cd'-dc')i+ \\ &\quad +(ac'-bd'+ca'+db')j+(ad'+bc'-cb'+da')k\,.\end{aligned}$$

S výjimkou komutativity (např. $ij = k$, $ji = -k$) má násobení kvaternionů vlastnosti známé z číselných oborů: je asociativní a oboustranně distributivní vzhledem ke sčítání (tyto skutečnosti se snadno mechanicky prověří), existuje jednotkový prvek (kvaternion $1+0i+0j+0k$) a ke každému nenulovému kvaternionu existuje kvaternion inverzní; ke kvaternionu $\alpha = a+bi+cj+dk \neq 0$ je to kvaternion $\overline{\alpha}/|\alpha|^2$, kde $\overline{\alpha} = a - bi - cj - dk$ je kvaternion sdružený ke kvaternionu α a $|\alpha| = \sqrt{a^2+b^2+c^2+d^2}$ je modul kvaternionu α. Kvaterniony tvoří nekomutativní těleso. Je to obor čtyřsložkových čísel, který obsahuje obor čísel komplexních; komutativní těleso komplexních čísel je podtělesem nekomutativního tělesa kvaternionů. Pro kvaterniony α, β platí rovnosti $\overline{\alpha\beta} = \bar{\beta}\bar{\alpha}$ a $\alpha\bar{\alpha} = |\alpha|^2$, ze kterých vyplývá rovnost $|\alpha||\beta| = |\alpha\beta|$, tj. modul součinu dvou kvaternionů je roven součinu modulů obou činitelů (totéž platí pro komplexní čísla).

Hamilton byl nadšen svým objevem kvaternionů. Přednášel o nich v akademii věd již 13. 11. 1843. Oprávněně se domníval, že kvaterniony jsou oborem hyperkomplexních čísel, který je nejbližší číslům komplexním. Očekával však od nich alespoň stejně důležité výsledky jako od komplexních čísel. Věnoval kvaternionům zbytek života, napsal o nich dvě monografie. V první z nich rozpracoval pomocí kvaternionů vektorovou algebru. Naděje Hamiltona a jeho následovníků, které se týkaly rozvinutí matematiky založené na kvaternionech, se však nesplnily. Význam kvaternionů se významu komplexních čísel nevyrovnal, i když byly pomocí kvaternionů nalezeny krásné a matematicky dokonalé vzorce, které popisují řadu jevů v geometrii, teorii čísel, ve fyzice atd.

Ukažme, jak pomocí kvaternionů dospěl Hamilton k základům vektorového počtu. Kvaternion $a+bi+cj+dk$ rozdělil na skalární část (skalár) a a vektorovou část (vektor) $r = bi + cj + dk$, která může být chápána jako vektor v trojrozměrném prostoru. Při sčítání kvaternionů se zřejmě nezávisle na sobě sčítají skalární a vektorové části. Při násobení dvou skalárních kvaternionů dostaneme zase skalár, při násobení skalárního a vektorového kvaternionu dostaneme skalární násobek vektorového kvaternionu. Při násobení vektorových kvaternionů r_1 a r_2 dostaneme kvaternion, jehož skalární část je záporně vzatý skalární součin (r_1, r_2) vektorů r_1 a r_2 a vektorová část je vektorový součin $r_1 \times r_2$ těchto dvou vektorů. Násobení kvaternionů (podobně jako násobení komplexních čísel) má výrazný geometrický smysl; úzce souvisí s rotacemi čtyřrozměrného (ale i trojrozměrného) prostoru.

Poznamenejme ještě, že kvaterniony můžeme chápat jako dvojice čísel komplexních (podobně jako jsou čísla komplexní dvojicemi čísel reálných) s násobením definovaným rovností:

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \bar{\delta}\beta,\ \delta\alpha + \beta\bar{\gamma})\,.$$

*) Poznamenejme, že násobení čtveřic reálných čísel, které odpovídá této rovnosti vyšetřoval v souvislosti s transformacemi prostoru už Gauss před rokem 1820. Vztah, který odpovídá přechodu od kvaternionů α, β ke kvaternionu $\bar{\alpha}\beta$, zkoumal již Euler roku 1748.

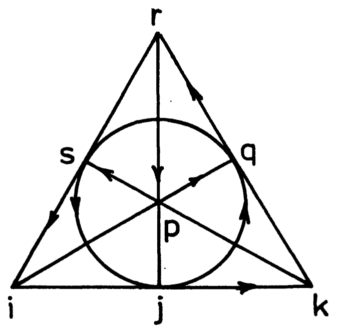
O svém objevu kvaternionů napsal Hamilton již 17. 10. 1843 svému příteli J. T. Gravesovi. Ten, inspirován Hamiltonem, nalezl v prosinci 1843 systém hyperkomplexních čísel s osmi základními jednotkami. Jeho objev byl však zveřejněn až roku 1848. Mezitím sestrojil nezávisle na Gravesovi stejný obor hyperkomplexních čísel Cayley, který svou práci publikoval již roku 1845*). Termín oktávy zavedl Hamilton; dnes se užívá též termínů Cayleyova čísla nebo Gravesova-Cayleyova čísla Jde o formální výrazy tvaru

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} + e\mathrm{p} + f\mathrm{q} + g\mathrm{r} + h\mathrm{s},$$

kde $a, b, \ldots, h$ jsou reálná čísla a $1, \mathrm{i}, \mathrm{j}, \mathrm{k}, \mathrm{p}, \mathrm{q}, \mathrm{r}, \mathrm{s}$ jsou základní jednotky, které se násobí pomocí rovností

$$\mathrm{i}^2 = \mathrm{j}^2 = \mathrm{k}^2 = \mathrm{p}^2 = \mathrm{q}^2 = \mathrm{r}^2 = \mathrm{s}^2 = -1\,,$$

$\mathrm{ij} = -\mathrm{ji} = \mathrm{k}$, $\mathrm{ip} = -\mathrm{pi} = \mathrm{q}$, $\mathrm{pj} = -\mathrm{jp} = \mathrm{r}$, $\mathrm{kp} = -\mathrm{pk} = \mathrm{s}$ atd. Násobení základních jednotek je možno znázornit na následujícím grafu.



Součin dvou sousedních jednotek na stranách, těžnicích a kružnici vepsané ve směru (proti směru) šipky je roven třetí jednotce se znaménkem plus (minus). Tedy např. $\mathrm{qr} = \mathrm{k}$, $\mathrm{qk} = -\mathrm{r}$, $\mathrm{pq} = \mathrm{i}$, $\mathrm{pi} = -\mathrm{q}$, $\mathrm{qs} = \mathrm{j}$, $\mathrm{qj} = -\mathrm{s}$ atd. Násobení oktáv je nejen nekomutativní, ale i neasociativní (např. $(\mathrm{ij})\mathrm{p} = \mathrm{kp} = \mathrm{s}$, $\mathrm{i}(\mathrm{jp}) = -\mathrm{ir} = -\mathrm{s}$). Je však alespoň alternativní, tj. pro každé dvě oktávy α, β platí rovnosti

$$(\alpha\alpha)\beta = \alpha(\alpha\beta), \quad (\alpha\beta)\alpha = \alpha(\beta\alpha), \quad (\alpha\beta)\beta = \alpha(\beta\beta).$$

Zřejmě existuje jednotkový prvek. Není obtížné ukázat, že ke každé nenulové oktávě existuje oktáva inverzní (tvoří se obdobně jako inverzní kvaternion), tj. v oboru oktáv je možno oboustranně dělit. Oktávy tvoří neasociativní a nekomutativní těleso; asociativní těleso kvaternionů je jeho podtělesem. I pro oktávy platí zákon modulů: modul součinu dvou oktáv je součinem modulů obou činitelů.

Oktávy je možno vyjádřit jako dvojice kvaternionů, jejichž násobení je definováno rovností

$$(\alpha, \beta) \cdot (\gamma, \delta) = (\alpha\gamma - \bar{\delta}\beta,\ \delta\alpha + \beta\bar{\gamma}).$$

*) Roku 1856 dospěl ke stejnému násobení osmisložkových čísel italský matematik Francesco Brioschi (1824–1897) při práci v teorii čísel; výrazům pro osm souřadnic součinu dvou oktáv se proto někdy říká Brioschiovy vzorce.

Stejnou rovností je definováno násobení kvaternionů (jako dvojic komplexních čísel) a násobení komplexních čísel (jako dvojic čísel reálných); jsou-li $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reálná čísla, nehraje žádnou roli jejich „opruhování". Jsou-li tato čísla reálná nebo komplexní, nehraje roli pořadí, v jakém je násobíme; u kvaternionů však již na pořadí záleží.

J. T. Graves se pokoušel vytvořit systém hyperkomplexních čísel s 16 základními jednotkami, ve kterém by také platil zákon modulů. Dnes víme, proč bylo jeho úsilí marné; je to možné jen pro $n = 1, 2, 4, 8$. Tento fakt dokázal roku 1898 německý matematik Adolf Hurwitz (1859–1919).

Vedle kvaternionů a oktáv, tj. systémů hyperkomplexních čísel, které obor komplexních čísel opravdu rozšiřovaly, byly vyšetřovány i obecnější struktury. Skotský matematik A. de Morgan studoval roku 1847 formální výrazy tvaru

$$a\xi + b\eta + c\zeta$$

a na množině těchto prvků zkoumal různě definované operace násobení. Ve stejném roce publikoval C. Graves práci o tzv. tripletech, výrazech tvaru $a + b\mathrm{e} + c\mathrm{e}^2$, kde $\mathrm{e}^3 = 1$; tuto strukturu však studoval i A. de Morgan.*)

Při vytváření rozumných oborů hyperkomplexních čísel bylo třeba nalézt takovou definici násobení základních jednotek, aby platil asociativní zákon a aby byly případně splněny některé další požadavky. Tento problém obešel Cayley roku 1854 tím, že vytvořil pojem grupové algebry. Jako základní jednotky tohoto systému hyperkomplexních čísel vzal prvky nějaké grupy spolu s původním grupovým násobením. Tím byla v tomto systému zaručena asociativita násobení.

Mezi obory hyperkomplexních čísel byl počítán i obor čtvercových matic, který zavedl Cayley roku 1858 v práci *A memoir on the theory of matrices*. Matice řádu n s reálnými prvky tvoří totiž systém hyperkomplexních čísel s n^2 základními jednotkami; formální rozdíl je v tom, že n^2 reálných složek je zapisováno do čtvercového schématu a že díky tomuto způsobu zápisu nejsou základní jednotky označeny zvláštními symboly (základními jednotkami jsou vlastně matice E_{ij}, které mají na místě ij číslo 1 a na ostatních místech nuly). Cayley definoval sčítání a násobení matic, násobení matice skalárem a uvedl prakticky všechny vlastnosti těchto operací. Jak dobře víme, sčítání matic má rozumné vlastnosti (asociativita, komutativita, nulový prvek, opačné prvky), násobení je vzhledem ke sčítání distributivní, je asociativní a existuje jednotkový prvek; násobení matic však není komutativní a inverzní matice existují jen k regulárním maticím. Cayley rozlišoval matice podle nulovosti či nenulovosti jejich determinantu; k jemnějšímu rozlišení matic nedospěl; pojem hodnosti matice definoval až roku 1879 německý matematik Georg Frobenius (1849–1917). Cayley se zabýval i obdélníkovými maticemi. Poukázal i na vztah mezi kvaterniony a maticemi; sestrojil izomorfní vnoření kvaternionů do komplexních matic druhého řádu:

$$a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j} + d\mathrm{k} \longmapsto \begin{pmatrix} a + d\mathrm{i}, & b + c\mathrm{i} \\ -b + c\mathrm{i}, & a - d\mathrm{i} \end{pmatrix}.$$

***) Poznamenejme, že pomocí výrazů tvaru $x + y\varepsilon + z\eta$ se dvěma imaginárními jednotkami ε, η reprezentoval již roku 1799 Wessel vektory v prostoru a pokoušel se tímto aparátem popisovat rotace trojrozměrného prostoru.**

Roku 1853 zavedl Hamilton tzv. bikvaterniony — kvaterniony s komplexními koeficienty. Clifford dospěl k dalším dvěma podobným strukturám; roku 1873 definoval jiné dva druhy bikvaternionů. Šlo o výrazy typu $x + y\omega$, kde x, y byly kvaterniony a pro novou základní jednotku ω platilo $\omega^2 = 1$, resp. $\omega^2 = 0$. Hamiltonovy a Cliffordovy bikvaterniony jsou často nazývány hyperbolické, eliptické a parabolické bikvaterniony. Můžeme se na ně dívat jako na struktury s osmi základními jednotkami.

Ke zmíněné Cliffordově práci z roku 1873 se váže počátek teorie duálních a dvojných čísel. Jde o dvousložková čísla tvaru $a + b\omega$, kde a, b jsou reálná čísla a $\omega^2 = 0$, resp. $\omega^2 = 1$, tj. o jisté modifikace komplexních čísel. Systémy duálních a dvojných čísel však mají netriviální dělitele nuly; jsou to čísla tvaru $a\omega$, resp. $a \pm a\omega$. Duální čísla se nyní většinou zapisují ve tvaru $a + b\varepsilon$, kde $\varepsilon^2 = 0$; jejich násobení je dáno vzorcem

$$(a + b\varepsilon)(c + d\varepsilon) = ac + (ad + bc)\varepsilon.$$

Dvojná čísla se většinou zapisují ve tvaru $a + b\mathrm{e}$, kde $\mathrm{e}^2 = 1$, tj.

$$(a + b\mathrm{e})(c + d\mathrm{e}) = (ac + bd) + (ad + bc)\mathrm{e}.$$

Duální a dvojná čísla se nazývají též parabolická, resp. eliptická komplexní čísla (obyčejná komplexní čísla se pak nazývají hyperbolická).

* * *

Problematiku hyperkomplexních čísel postavil na obecnější a abstraktnější základ americký matematik Benjamin Peirce (1809–1880). Roku 1870 byla v Americké akademii věd ve Washingtonu čtena jeho práce *Linear associative algebras*, ve které byl předložen pojem lineární asociativní algebry. Peirceova práce byla vytištěna ve sto exemplářích; časopisecky však byla publikována až roku 1881, tj. rok po autorově smrti.

Lineární asociativní algebrou nad tělesem T dnes rozumíme množinu A se dvěma binárními operacemi, sčítáním a násobením, a s násobením prvků množiny A prvky tělesa T, která je vzhledem ke sčítání a vzhledem k násobení prvky tělesa T vektorovým (lineárním) prostorem, vzhledem ke sčítání a násobení je asociativním okruhem a násobení je s násobením prvky tělesa T svázáno podmínkou

$$\forall a \in T \quad \forall \xi, \eta \in A \quad (a\xi)\eta = a(\xi\eta) = \xi(a\eta).$$

Dimenzí lineární asociativní algebry rozumíme dimenzi příslušného vektorového prostoru. Je-li T těleso reálných, resp. komplexních čísel, hovoříme o reálné, resp. komplexní lineární asociativní algebře. V dalším budeme uvažovat jen algebry konečné dimenze.

Poznamenejme, že z vektorového prostoru je možno vytvořit lineární asociativní algebru dodefinováním násobení; přitom stačí definovat pouze součin každých dvou vektorů libovolně zvolené báze. Jestliže $\{\alpha_1, \ldots, \alpha_n\}$ je nějaká báze vektorového prostoru A, potom jsou prvky prostoru A vyjádřeny ve tvaru

$$a_1\alpha_1 + \ldots + a_n\alpha_n$$

a pro definici násobení stačí stanovit součiny $\alpha_i\alpha_j$, $i,j = 1,\dots,n$, jako lineární kombinace vektorů $\alpha_1,\dots,\alpha_n$, tj.

$$\alpha_i\alpha_j = \sum_{k=1}^{n} a_{ij}^k\alpha_k.$$

Tyto rovnosti se nazývají strukturní vzorce algebry A, skaláry a_{ij}^k jsou tzv. strukturní konstanty algebry A. Pomocí strukturních vzorců se pak násobí obecné prvky. Násobení vektorů báze nelze však definovat zcela libovolně, neboť požadovaná asociativita násobení klade jistá omezení.

Hamilton a další matematici postupovali ve čtyřicátých a padesátých létech minulého století výše naznačeným způsobem. Hledali strukturní vzorce, tj. formule pro násobení základních jednotek — prvků báze vektorového prostoru všech n-tic reálných čísel (pro pevně zvolené n). Často požadovali, aby operace násobení měla některé další vlastnosti. Zejména šlo o existenci jednotkového prvku a o možnost dělení (komutativity a asociativity násobení byli nuceni — jak jsme už viděli — se nakonec vzdát). Tím bylo hledání strukturních vzorců značně zkomplikováno.

Definici lineární asociativní algebry vyhovují Hamiltonovy kvaterniony, triplety C. T. Gravese (a A. de Morgana), Cayleyovy matice, duální a dvojná čísla. Lineární asociativní algebru však netvoří oktávy, neboť pro ně neplatí asociativní zákon. Vzdáme-li se asociativity násobení, můžeme mluvit o lineárních algebrách; takovéto algebry se začaly obecně studovat koncem 19. století.

Peirce vyšetřoval mnoho různých algeber (maximálně dimenze 6); vytvořil jejich seznam, který však nebyl úplný. Obecnou teorií se pak zabývali zejména Eduard Study (1862–1922), Karl T. W. Weierstrass (1815–1897), Sophus Lie (1842–1899), Georg Scheffers (1866–1945), Frobenius, Theodor Molien (1861–1941), Elie Cartan (1869–1951) a další. Postupně docházelo k zobecňování problematiky. Začaly se vyšetřovat lineární algebry nad libovolným tělesem (Maclagan Wedderburn (1882–1948)) i některé speciální třídy algeber.

Snahy o rozšíření oboru komplexních čísel na nějaký větší číselný obor vedly k vytvoření abstraktního pojmu reálná lineární algebra s dělením. Je to reálná algebra splňující následující podmínku: pro každé $\alpha, \beta \in A$, $\alpha \neq 0$, existují jednoznačně určené prvky $\xi, \eta \in A$, pro které $\alpha\xi = \beta$, $\eta\alpha = \beta$. Jde-li o asociativní algebru, potom je tato podmínka ekvivalentní s existencí jednotkového prvku a s existencí inverzních prvků ke všem nenulovým prvkům. Asociativní reálné algebry s dělením jsou tedy tělesa.

O hyperkomplexních číslech, algebrách a historii této zajímavé partie matematiky se můžeme podrobněji dočíst např. v [3, 4, 5, 9, 10].

* * *

Vraťme se však nyní ke komplexním číslům. Položme si otázku, zda je možno z bodů roviny „udělat" čísla ještě jiným způsobem.

Vyšetřujme tedy množinu prvků tvaru $x + y\mathrm{e}$, kde x, y jsou reálná čísla, tj. zkoumejme reálnou lineární algebru A dimenze 2, která má jednotkový prvek 1. Prvky algebry A se sčítají po složkách, tj.

$$(x + y\mathrm{e}) + (x' + y'\mathrm{e}) = (x + x') + (y + y')\mathrm{e},$$

a násobí se distributivně vůči sčítání, přičemž

$$e^2 = p + qe,$$

kde p, q jsou pevně daná reálná čísla. Je tedy

$$(x + ye) \cdot (x' + y'e) = (xx' + yy'p) + (xy' + yx' + yy'q)e.$$

Prvky algebry A máme vyjádřeny vzhledem k bázi $\{1, e\}$, tj. jako lineární kombinace prvků 1, e; vzhledem k této bázi je vyjádřen i vzorec pro násobení. Snažme se nyní v množině A najít takový prvek f, aby vzhledem k bázi $\{1, f\}$ byl vzorec pro násobení co možná nejjednodušší. Prvek f musí být lineární kombinací prvků 1, e, tj. $f = a + be$; protože mají být prvky 1, f lineárně nezávislé, musí být $b \neq 0$.

Hledejme tedy čísla a, b tak, aby prvek f^2 byl co nejjednodušší. Je

$$\begin{aligned} f^2 = (a + be)(a + be) = a^2 + 2abe + b^2(p + qe) = \\ = (a^2 + b^2p) + b(2a + bq)e. \end{aligned}$$

Položme $b(2a + bq) = 0$; protože je $b \neq 0$, je $a = -bq/2$. Tedy

$$f^2 = a^2 + b^2p = b^2(p + q^2/4).$$

Nyní rozlišíme tři případy:

a) $p + q^2/4 = 0$
Položíme-li např. $b = 2$ a $a = -q$, je $f^2 = 0$. Násobení v algebře A je tedy dáno vzorcem

$$(u + vf)(u' + v'f) = uu' + (uv' + vu')f,$$

tj. A je algebrou duálních čísel.

b) $p + q^2/4 > 0$
Položíme-li $b = \left(p + q^2/4\right)^{(-1/2)}$ a $a = -bq/2$, je $f^2 = 1$. Násobení v algebře A je dáno vzorcem

$$(u + vf)(u' + v'f) = (uu' + vv') + (uv' + vu')f,$$

tj. A je algebrou dvojných čísel.

c) $p + q^2/4 < 0$
Položíme-li $b = \left(|p + q^2/4|\right)^{(-1/2)}$ a $a = -bq/2$, je $f^2 = -1$. Násobení v algebře A je dáno vzorcem

$$(u + vf)(u' + v'f) = (uu' - vv') + (uv' + vu')f,$$

tj. A je algebrou komplexních čísel.

Došli jsme tedy k tomuto tvrzení.

Věta: *Existují právě tři neizomorfní reálné algebry s jednotkovým prvkem, které mají dimenzi 2.*

Jsou to algebra duálních čísel, algebra dvojných čísel a algebra komplexních čísel. Žádné dvě z nich nejsou izomorfní. Algebra komplexních čísel nemá netriviální dělitele nuly a proto nemůže být izomorfní s algebrou, která je má. Algebra duálních čísel, ve které existuje nenulový prvek, jehož dvojmoc je rovna nule, nemůže být izomorfní s algebrou dvojných čísel, ve které takový prvek neexistuje.

Jediným číselným oborem s dělením, který je možno z bodů roviny „udělat", jsou tedy komplexní čísla.

* * *

Na závěr se věnujme problému násobení bodů prostoru, který tolik trápil Hamiltona, a ukažme, proč bylo jeho úsilí o nalezení vhodného předpisu marné (viz [7]).

Uvažujme reálnou lineární algebru A s jednotkovým prvkem, dimenze 3, tj. množinu všech prvků tvaru $x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j}$, kde x, y, z jsou reálná čísla. Předpokládejme, že algebra komplexních čísel je její podalgebrou; prvky $x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j}$ se tedy sčítají po složkách, jejich násobení je distributivní vzhledem ke sčítání a $\mathrm{i}^2 = -1$. Nic jiného o násobení nepředpokládáme, dokonce ani platnost asociativního zákona. Součin jednotek i, j musí být prvkem algebry A; je tedy

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{j} = a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j},$$

kde a, b, c jsou nějaká reálná čísla. Vypočteme nyní součin $\alpha\beta$ prvků

$$\alpha = -c + \mathrm{i},$$

$$\beta = (ac - b) + (bc + a)\mathrm{i} + (c^2 + 1)\mathrm{j} :$$

$$\alpha\beta = -ac^2 + bc - (bc^2 + ac)\mathrm{i} - (c^3 + c)\mathrm{j} + (ac - b)\mathrm{i} + (bc + a)\mathrm{i}^2 + (c^2 + 1)\mathrm{ij}.$$

Po dosazení za i^2 a ij máme

$$\alpha\beta = -ac^2 + bc - (bc^2 + ac)\mathrm{i} - (c^3 + c)\mathrm{j} + (ac - b)\mathrm{i} - (bc + a) + (c^2 + 1)(a + b\mathrm{i} + c\mathrm{j});$$

po roznásobení a sloučení vyjde $\alpha\beta = 0$.

Protože je součin $\alpha\beta$ dvou nenulových prvků α, β roven nule, není možno v dané struktuře dělit. Jinak řečeno: Algebra A nemůže být tělesem (ani neasociativním a nekomutativním), neboť má netriviální dělitele nuly. Z bodů prostoru tedy není možno „udělat" čísla tak, aby zůstala zachována struktura komplexních čísel (rovnost $\mathrm{i}^2 = -1$).

Nyní se vzdejme požadavku zachování násobení v komplexní rovině. Uvažujme opět reálnou lineární algebru A s jednotkovým prvkem, dimenze 3, jejíž prvky mají tvar $x + y\mathrm{i} + z\mathrm{j}$.

Jestliže je možno prvek i^2 vyjádřit jako lineární kombinaci prvků 1, i, potom je množina všech prvků tvaru $x + y\mathrm{i}$ uzavřená vzhledem ke sčítání i násobení a je tedy algebrou dimenze 2. Podle předešlého jde buď o algebru duálních, dvojných či komplexních čísel. První dvě mají netriviální dělitele nuly a nelze je tedy rozšířit na číselný obor s dělením, třetí — jak už víme — nelze rozšířit na algebru dimenze 3 bez netriviálních dělitelů nuly. V těchto případech reálnou algebru s dělením nezískáme.

Předpokládejme tedy, že prvek i^2 není lineární kombinací prvků $1, \mathrm{i}$. V tomto případě tvoří prvky $1, \mathrm{i}, \mathrm{i}^2$ bázi algebry A. Součin $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2$ musí být prvkem algebry A, tj.

$$\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2 = p + q\mathrm{i} + r\mathrm{i}^2,$$

kde p, q, r jsou nějaká reálná čísla. Pokusme se najít — tak jako v předchozím — takové prvky

$$\alpha = x + \mathrm{i}, \qquad \beta = y + z\mathrm{i} + \mathrm{i}^2,$$

pro které bude $\alpha\beta = 0$. Po roznásobení a dosazení za $\mathrm{i} \cdot \mathrm{i}^2$ je

$$\alpha\beta = (x + \mathrm{i})(y + z\mathrm{i} + \mathrm{i}^2) = (xy + p) + (xz + y + q)\mathrm{i} + (x + z + r)\mathrm{i}^2.$$

Chceme tedy, aby platilo

$$(*) \qquad \begin{aligned} xy + p &= 0, \\ xz + y + q &= 0, \\ x + z + r &= 0. \end{aligned}$$

Vyjádříme-li ze třetí rovnice x a dosadíme-li do první a druhé rovnice, dostaneme

$$\begin{aligned} x &= -z - r, \\ zy + ry - p &= 0, \\ z^2 + rz - y - q &= 0. \end{aligned}$$

Vypočteme-li ze třetí rovnice y a dosadíme-li je do rovnice druhé, dostaneme

$$\begin{aligned} y &= z^2 + rz - q, \\ z^3 + 2rz^2 + (r^2 - q)z - rq - p &= 0. \end{aligned}$$

Poslední rovnice je kubickou rovnicí v z; tato rovnice má alespoň jeden reálný kořen. Řešení soustavy rovnic $(*)$ tedy existuje a algebra A má netriviální dělitele nuly. Dokázali jsme tedy následující tvrzení.

Věta: *Každá reálná algebra s jednotkovým prvkem, dimenze 3, má netriviální dělitele nuly.*

Žádná reálná algebra s dělením dimenze 3 tedy neexistuje. Poměrně elementárními prostředky jsme ukázali, proč bylo marné Hamiltonovo úsilí o nalezení vzorce pro „násobení“ bodů prostoru.

Popis všech reálných algeber s dělením konečné dimenze nebyl snadnou záležitostí. Roku 1867 dokázal německý matematik Hermann Hankel (1839–1873) v knize *Theorie* *der complexen Zahlensysteme*, že reálná komutativní asociativní algebra s dělením obsahující komplexní čísla jako vlastní podalgebru neexistuje. O jedenáct let později ukázal Frobenius, že reálné asociativní algebry s dělením jsou pouze tři: reálná čísla, komplexní čísla a kvaterniony. Tento výsledek je často nazýván Frobeniovou větou. Roku 1884 ukázal Weierstrass, že každá reálná komutativní algebra dimenze větší než dvě má netriviální dělitele nuly.

Švýcarský matematik Heinz Hopf (1894–1971) dokázal roku 1940 pomocí výsledků algebraické topologie, že dimenze reálné algebry s dělením musí být mocninou dvojky. O deset let později dokázali R. H. Bruck a E. Kleinfeld, že existuje pouze jediná reálná konečnědimenzionální alternativní algebra s dělením, která není asociativní, a to oktávy. Tomuto tvrzení se často říká zobecněná věta Frobeniova. Vyslovuje se též takto: Reálné alternativní algebry s dělením konečné dimenze existují právě čtyři: reálná čísla, komplexní čísla, kvaterniony a oktávy.

Roku 1958 dokázali nezávisle na sobě M. Kervaire, R. Bott a J. Milnor, že reálné algebry s dělením dimenze n existují pouze pro $n = 1, 2, 4, 8$. Z předchozího víme, že jde o dvě komutativní asociativní algebry (reálná a komplexní čísla), jednu nekomutativní asociativní algebru (kvaterniony), jednu nekomutativní neasociativní algebru, která je však alespoň alternativní (oktávy); dále existuje nekonečně mnoho algeber, které nejsou ani alternativní (jejich popis ještě není zcela znám).

Literatura

[1] R. Franci, L. Toti Rigatelli: *Storia della teoria delle equazioni algebriche*. Mursia, Milano 1979.

[2] A. P. Juškevič (red.): *Istorija matematiki I, II, III*. Nauka, Moskva 1970, 1970, 1972.

[3] I. L. Kantor, A. S. Solodovnikov: *Giperkompleksnyje čisla*. Nauka, Moskva 1973.

[4] M. Kline *Mathematical Thought from Ancient to Modern Times*. Oxford Univ. Press, New York 1972.

[5] A. N. Kolmogorov, A. P. Juškevič (red.): *Matematika XIX veka; matematičeskaja logika, algebra, teorija čisel, teorija verojatnostej*. Nauka, Moskva 1978.

[6] S. Maracchia: *Da Cardano a Galois. Momenti di storia dell'algebra*. Feltrinelli, Roma 1979.

[7] K. O. May: *The impossibility of a division algebra of vectors in three dimensional space*. Amer. Math. Monthly *73* (1966), 289–291.

[8] V. A. Nikiforovskij: *Iz istorii algebry XVI–XVII vv.* Nauka, Moskva 1979.

[9] B. A. Rozenfeľd: *Istorija neevklidovoj geometrii*. Nauka, Moskva 1976.

[10] B. L. van der Waerden: *A History of Algebra. From al-Khwārizmī to Emmy Noether*. Springer-Verlag 1985.