R. D. Mauldin

Zobecnění Velké Fermatovy věty: Bealova domněnka a problém o cenu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 43 (1998), No. 2, 104--107

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137538

Zobecnění Velké Fermatovy věty: Bealova domněnka a problém o cenu

R. Daniel Mauldin

Andrew Beal je dallaský bankéř, který má všeobecný zájem o matematiku a její místo v naší kultuře. Našel v této disciplíně své zalíbení a formuloval domněnku z teorie čísel, na jejímž řešení pracoval několik let. Je pozoruhodné, že příležitostně někdo, kdo pracuje v izolaci a bez kontaktů s matematickou veřejností, formuluje problém, který má tak blízko k současné vědě.

Bealova domněnka. *Nechť* A, B, C, x, y *a* z *jsou přirozená čísla taková, že* $x, y, z > 2$. *Jestliže* $A^x + B^y = C^z$, *pak* A, B *a* C *mají společný netriviální dělitel.*

Nebo řečeno jinak:

Rovnice $A^x + B^y = C^z$ *nemá řešení v přirozených číslech* A, B, C, x, y *a* z, *kde* x, y *a* z *jsou větší nebo rovna* 3 *a čísla* A, B *a* C *jsou vzájemně nesoudělná.*

Poznamenejme, že velmi podobné domněnky vznikaly v průběhu let. Vskutku, V. Brun ve svém článku z roku 1914 formuluje několik podobných problémů [1]. Je to však načasováno tak, že Bealův problém se objevil nyní, protože Velká Fermatova věta byla nedávno dokázána (nebo znovu dokázána[1])) A. Wilesem [6]. O některých významných úspěších, jichž dosáhli H. Darmon a A. Granville [2] při práci na problému o cenu, pojednáme níže. Darmon a Granville ve svém článku též diskutují některé příbuzné domněnky z tohoto oboru a uvádějí mnoho příslušných odkazů.

Cena. Andrew Beal štědře věnoval odměnu 5000 dolarů na vyřešení tohoto problému. Hodnota odměny se zvýší každý rok o 5000 dolarů až na 50 000 dolarů, dokud problém nebude vyřešen[2]). Výkonný výbor ceny se skládá z Charlese Feffermana, Rona Grahama a R. Daniela Mauldina, který bude působit jako předseda výboru. Veškerá navrhovaná řešení a dotazy o odměně nechť jsou adresovány R. D. Mauldinovi.

---

[1]) *Poznámka překladatelů:* Autor má zřejmě na mysli článek R. Taylora a A. Wilese: *Ring-theoretic properties of certain Hecke algebras*, Ann. of Math. *141* (1995), 553–572, který zaplnil mezeru v původním Wilesově důkazu z [6].

[2]) *Poznámka překladatelů:* Odměna již dnes činí 50 000 amerických dolarů za důkaz či protipříklad Bealovy domněnky. Podrobnosti čtenář nalezne na adrese: `http://www.math.unt.edu/~mauldin/beal.html`

A Generalization of Fermat's Last Theorem: The Beal Conjecture and Prize Problem. Notices Amer. Math. Soc. *44* (1997), 1436–1437.

Přeložili Michal Křížek a Karel Segeth za podpory grantu 201/97/0217 GA ČR.

R. Daniel Mauldin je (Regents) profesor matematiky na University of North Texas, Denton, TX, e-mail: `mauldin@unt.edu`, `mauldin@dynamics.math.unt.edu`

Domněnka abc. Během osmdesátých let formulovali Masser, Oesterle a Szpiro diofantickou nerovnost — domněnku abc, která má mnoho aplikací. Přehledný článek o tomto nápadu publikoval S. Lang [5] a elementární diskusi D. Goldfeld [4]. Tato nerovnost se může zadat ve velmi jednoduchých pojmech a může být použita na Bealův problém.

Abychom mohli domněnku abc vyslovit, označme nejprve pro přirozená čísla a, b a c symbolem $N(a,b,c)$ tu část součinu abc, která neobsahuje čtverec. Jinými slovy, $N(a,b,c)$ je součin prvočíselných dělitelů čísel a, b a c, kde se každý dělitel vyskytuje jen jednou. Domněnka abc pak může být formulována následovně:

Ke každému $\varepsilon > 0$ existuje konstanta $\mu > 1$ taková, že pro každá dvě vzájemně nesoudělná čísla a a b a jejich součet $c = a + b$ platí

$$\max(|a|,|b|,|c|) \leqq \mu N(a,b,c)^{1+\varepsilon}.$$

Ukažme nyní, že *pokud domněnka abc platí, pak problém o cenu nemá řešení pro dostatečně velké exponenty.*

Nechť $k = \log\mu/\log 2 + (3+3\varepsilon)$ a $\min(x,y,z) > k$. Předpokládejme, že A, B a C jsou přirozená čísla taková, že A a B jsou nesoudělná a že $A^x + B^y = C^z$. Položíme-li $a = A^x$ a $b = B^y$, dostaneme $c = a + b = C^z$. Z domněnky abc a z nerovnosti $N(A^x, B^y, C^z) \leqq ABC$ máme

$$\max(A^x, B^y, C^z) \leqq \mu(ABC)^{1+\varepsilon}.$$

Pokud $\max(A,B,C) = A$, pak bychom dostali

$$A^x \leqq \mu A^{3+3\varepsilon}$$

nebo

$$x \leqq \frac{\log\mu}{\log A} + 3 + 3\varepsilon \leqq k,$$

což není náš případ. Podobná úvaha pro zbývající dvě možnosti pro maximum ukazuje, že náš původní předpoklad je nemožný.

Dále uveďme explicitní verzi domněnky abc: Jsou-li a a b nesoudělná přirozená čísla a $c = a + b$, pak $c \leqq (N(a,b,c))^2$. Podívejme se, co z toho vyplývá pro problém o cenu. Předpokládejme, že $A^x + B^y = C^z$ s $x \leqq y \leqq z$. Protože A^x a B^y jsou rovněž nesoudělná, platí

$$C^z \leqq (N(A^x B^y C^z))^2 \leqq (ABC)^2 < C^{2(z/x+z/y+1)}.$$

Tudíž $\frac{1}{2} < 1/x + 1/y + 1/z$. Jelikož x, y a z jsou větší než 2, máme následující možnosti pro (x,y,z): $(3,3,z>3)$, $(3,4,z \geqq 4)$, $(3,5,z \geqq 5)$, $(3,6,z \geqq 7)$, $(4,4,z \geqq 5)$ a konečný seznam dalších případů.

Existuje jen konečně mnoho možných řešení. V roce 1995 H. Darmon a A. Granville [2] ukázali, že pokud přirozená čísla x, y a z splňují nerovnost $1/x + 1/y + 1/z < 1$, pak existuje pouze konečně mnoho trojic vzájemně nesoudělných přirozených čísel A, B, C splňujících rovnici $A^x + B^y = C^z$. Protože každé z čísel x, y a z je větší než 2, pak $1/x + 1/y + 1/z < 1$, pokud neplatí $x = y = z = 3$. Avšak Euler a možná i Fermat věděli, že v tomto případě neexistuje žádné řešení. Tedy pro každou trojici přirozených čísel x, y a z větších než 2 může existovat jen konečně mnoho řešení diofantické rovnice $A^x + B^y = C^z$.

Příbuzné problémy. Co se stane, jestliže požadujeme, aby čísla x, y a z byla větší než 1, alespoň jedno z nich větší než 2 a aby A, B a C byla vzájemně nesoudělná? V práci [2] je detailní analýza tohoto případu pro $x, y, z \geqq 2$ a $1/x + 1/y + 1/z > 1$.

Co se stane, pokud pouze požadujeme, aby $1/x + 1/y + 1/z < 1$ a aby čísla A, B a C byla vzájemně nesoudělná? Tento problém je též diskutován H. Darmonem a A. Granvillem. Ve skutečnosti formulovali následující domněnku[3]).

Domněnka Fermatova-Catalanova. *Existuje pouze konečně mnoho trojic vzájemně nesoudělných celočíselných mocnin x^p, y^q, z^r, pro něž*

$$x^p + y^q = z^r \quad a \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} + \frac{1}{r} < 1.$$

Jak je zmíněno v [2], až dosud bylo nalezeno 10 řešení. Prvních pět jsou malá řešení. Jsou to $1 + 2^3 = 3^2$, $2^5 + 7^2 = 3^4$, $7^3 + 13^2 = 2^9$, $2^7 + 17^3 = 71^2$, $3^5 + 11^4 = 122^2$.

Je známo též pět velkých řešení $17^7 + 76271^3 = 21063928^2$, $1414^3 + 2213459^2 = 65^7$, $9262^3 + 15312283^2 = 113^7$, $43^8 + 96222^3 = 30042907^2$, $33^8 + 1549034^2 = 15613^3$, která přináleží F. Beukersovi a D. Zagierovi.

Nedávno H. Darmon a L. Merel dokázali, že neexistují nesoudělná řešení s exponenty $(x, x, 3)$ pro $x \geqq 3$ (viz [3]).

Poděkování. Protože nejsem odborníkem v tomto oboru, rád bych poděkoval A. Granvillovi a R. Guyovi za jejich odbornou pomoc při přípravě tohoto článku.

Literatura

[1] BRUN, V.: *Über Hypothesenbildung.* Arc. Math. Naturvidenskab *34* (1914), 1–14.

[2] DARMON, H., GRANVILLE, A.: *On the equations $z^m = F(x, y)$ and $Ax^p + By^q = cZ^r$.* Bull. London Math. Soc. *27* (1995), 513–543.

[3] DARMON, H., MEREL, L.: *Winding quotients and some variants of Fermat's Last Theorem.* Preprint.

[4] GOLDFELD, D.: *Beyond the Last Theorem.* Math. Horizons (September 1996), 26–31, 34.

[5] LANG, S.: *Old and new conjectured diophantine inequalities.* Bull. Amer. Math. Soc. *23* (1990), 37–75.

[6] WILES, A.: *Modular elliptic curves and Fermat's Last Theorem.* Ann. of Math. *141* (1995), 443–551.

---

[3]) *Poznámka překladatelů:* Původní domněnka E. Catalana z roku 1844 tvrdí, že rovnice $x^p + 1 = z^r$ má pro $x, p, z, r \geqq 2$ jen jediné celočíselné řešení $x = 2$, $p = 3$, $z = 3$ a $r = 2$.

ANDREW BEAL je nadšenec pro teorii čísel žijící v Dallasu ve státě Texas. Vyrůstal v Lansingu v Michiganu a studoval na Michigan State University. Mimořádně se zajímá o některé Fermatovy práce a opravdu mnoho hodin strávil přemýšlením o Velké Fermatově větě. Věří, že Fermat skutečně měl poměrně jednoduchý důkaz své velké věty, který nebyl založen na geometrii, a pokračuje v jeho hledání. Věří také, že Fermat měl metodu pro řešení Pellovy rovnice, která zůstává neznámá a jež byla funkcí čtverců, jejichž součet se rovná koeficientu.

Andrewovi je 44 let a se svou ženou Simonou mají pět dětí. Andrew je zakladatel, předseda a vlastník Beal Bank, která je největší bankou v Dallasu v rukou místního vlastníka. Nedávno se také stal zakladatelem, předsedou ředitelské rady a vlastníkem Beal Aerospace, společnosti, která projektuje a staví raketu další generace pro vypouštění umělých družic na dráhu kolem Země.

Společnosti Beal Bank a Toyota a deník Dallas Morning News jsou hlavními sponzory veletrhu Dallas Regional Science and Engineering Fair. Beal Bank je také hlavním sponzorem soutěže Dallas Area Odyssey of the Mind Competition. Andrew Beal byl a je hlavním donátorem výuky matematiky na University of North Texas. Prostřednictvím stipendií významně podporuje postgraduální studenty a studenty na Texas Academy of Mathematics and Science.

Ultrarychlá optická spektroskopie

Petr Malý, Praha

1. Úvod

Ultrarychlou optickou spektroskopii je možné chápat jako pokračování snahy člověka zachytit (zobrazit) rychle se pohybující předměty a změřit například rychlost jejich pohybu — určením jejich okamžité polohy v určitých časových okamžicích. V této souvislosti lze připomenout zkoumání Galilea Galileiho, který určoval doby kmitu kyvadel pomocí tepu svého srdce, nebo z doby méně vzdálené práce Ernsta Macha při vyšetřování letu střel [1]. V jednom z jeho měřicích uspořádání (viz obr. 1) letící střela sepnula jiskřiště, kterým bylo sepnuto vysoké napětí na druhé jiskřiště, kde přeskočila jiskra, jejíž světlo osvětlilo na okamžik scénu. Střela tak mohla být v přesně daném okamžiku (závislém na délce vedení mezi jiskřišti) své dráhy vyfotografována fotoaparátem s otevřenou závěrkou. Analogická uspořádání užívající elektrooptickou závěrku místo jiskry k expozici dovolila dosáhnout na počátku šedesátých let časového rozlišení $\approx 10^{-9}$ s. Současná ultrarychlá spektroskopie dosahuje rozlišení $\approx 10^{-14}$ s,

---

Doc. RNDr. PETR MALÝ, CSc. (1955), pracuje na katedře chemické fyziky a optiky MFF UK, Ke Karlovu 3, 121 16 Praha 2.