Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Zdeněk Pírko

Příklad soumístné kubické transformace

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 4, 357--372

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137419

PROF. DR ZDENĚK PÍRKO

PŘÍKLAD SOUMÍSTNÉ KUBICKÉ TRANSFORMACE

Budiž dán trojstran PX_1, PX_2, X_1X_2. Budiž $\boldsymbol{K}_1$ jedna z kuželoseček (jednoduchých), které mají tento trojstran za trojstran polární. Budiž dále $\boldsymbol{K}_2$ kuželosečka, která se dotýká přímek PX_1, resp. PX_2 v bodech X_1, resp. X_2 (*obr. 1*).

Budiž dále $\mathfrak{J}_1$ kvadratická inverse o středu P a o řídicí kuželosečce $\boldsymbol{K}_1$, $\mathfrak{J}_2$ kvadratická inverse o témž středu P a o řídicí kuželosečce $\boldsymbol{K}_2$. Inverse $\mathfrak{J}_2$ má zřejmě body P, X_1, X_2 za body hlavní. Inverse $\mathfrak{J}_1$ má body hlavní P, Y_1, Y_2, kde Y_1 a Y_2 jsou průsečíky přímky X_1X_2 s kuželosečkou $\boldsymbol{K}_1$. Ve smyslu výše uvedené konstrukce leží totiž body Y_1 a Y_2 na poláře bodu P vzhledem ke kuželosečce $\boldsymbol{K}_1$, a tedy tečny v bodech Y_1 a Y_2 procházejí bodem P.

Budeme v dalším studovat vlastnosti transformace, definované takto:

Definice 1: *Soumístná transformace $\mathfrak{T}$ je určena vztahem*

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2. \tag{1}$$

Důsledek 1: Transformace $\mathfrak{T}^{-1}$, inversní k transformaci $\mathfrak{T}$, je určena vztahem

$$\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1. \tag{2}$$

Důkaz: Násobme rovnici (1) zleva výrazem $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1$ („násobením" se tu samozřejmě rozumí aplikace transformací). Dostaneme vzhledem k involutorní povaze transformací $\mathfrak{J}_1$ a $\mathfrak{J}_2$

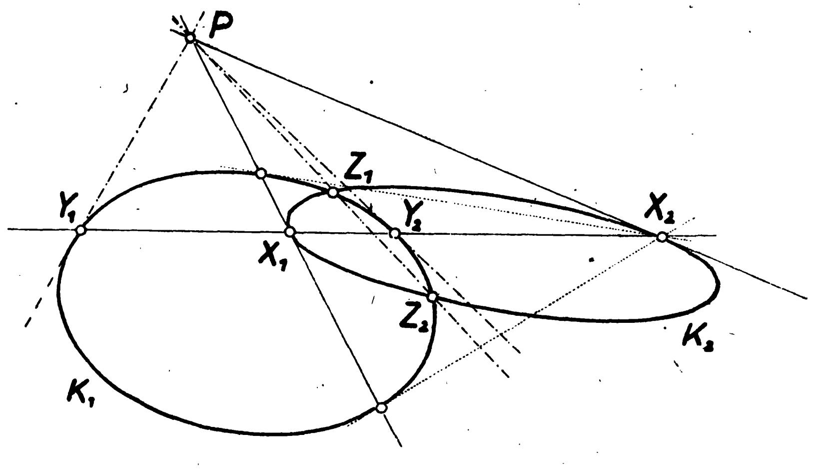
$$\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 \mathfrak{T} = 1,$$

a dále násobením $\mathfrak{T}^{-1}$ zprava

$$\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 \mathfrak{T} \mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1 = \mathfrak{T}^{-1},$$

což jsme měli dokázat.

Důsledek 2: Inversi $\mathfrak{J}_1$, resp. $\mathfrak{J}_2$ lze vyjádřit pomocí transformací $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ a $\mathfrak{J}_2$, resp. $\mathfrak{J}_1$ takto:



Obr. 1

$$\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{T}\,\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_2\,\mathfrak{T}^{-1}, \tag{3}$$

$$\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1\,\mathfrak{T} = \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{J}_1. \tag{4}$$

Důkaz: Násobením rovnice (1) zprava (zleva) $\mathfrak{J}_2$ ($\mathfrak{J}_1$) dostaneme rovnici (3). Násobením rovnice (2) zprava (zleva) $\mathfrak{J}_1$ ($\mathfrak{J}_2$) dostaneme rovnici (4).

Základní vlastnosti transformace $\mathfrak{T}$ popisují věty 1 až 3.

Věta 1: *Transformace $\mathfrak{T}$ je jednojednoznačná a středová se středem v bodě P.*

Důkaz: Bod A', který odpovídá obecnému bodu A v transformaci $\mathfrak{T}$, sestrojíme podle definice transformace $\mathfrak{T}$ takto: Sestrojíme bod A^*, který odpovídá bodu A v inversi $\mathfrak{J}_1$, poté sestrojíme bod A', který odpovídá bodu A^* v inversi $\mathfrak{J}_2$. Body A, A' si odpovídají obecně jednoznačně. Body P, A, A^* leží v přímce, rovněž body P, A^*, A' leží v přímce, tedy také body P, A, A' leží v přímce.

S druhé strany sestrojíme bod B, který v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ odpovídá obecnému bodu B' takto: Sestrojíme bod B^*, který bodu B' odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$, poté sestrojíme bod B, který odpovídá bodu B^* v inversi $\mathfrak{J}_1$. Body B', B si odpovídají obecně jednoznačně. Body P, B', B^* leží v přímce, rovněž body P, B^*, B leží v přímce, tedy také body P, B', B leží v přímce.

Věta 2: *Transformace $\mathfrak{T}$ je kubická.*

Důkaz: Obecné přímce p odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_1$ kuželosečka $\boldsymbol{K}^*$, která obsahuje hlavní body P, Y_1, Y_2 této inverse. Kuželosečce $\boldsymbol{K}^*$ odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ kubická křivka $\boldsymbol{C}_3'$, která má hlavní bod P za dvojnásobný, a která hlavními body X_1 a X_2 této inverse prochází jednoduše. Kubika $\boldsymbol{C}_3'$ je útvarem, který v transformaci $\mathfrak{T}$ odpovídá obecné přímce p.

S druhé strany odpovídá obecné přímce q' v inversi $\mathfrak{J}_2$ kuželosečka $\boldsymbol{K}^{**}$, která obsahuje hlavní body P, X_1, X_2 této inverse. Kuželosečce $\boldsymbol{K}^{**}$ odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_1$ kubická křivka $\boldsymbol{C}_3$, která má hlavní bod P za dvojnásobný a hlavními body Y_1 a Y_2 této inverse prochází jednoduše. Kubika $\boldsymbol{C}_3$ je útvarem, který v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ odpovídá obecné přímce q'.

věta 3: *Transformace $\mathfrak{T}$ není involutorní.*

Důkaz: Podle (1) a (2) je

$$\mathfrak{T}\,\mathfrak{T} = \mathfrak{J}_1\,\mathfrak{J}_2\,\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{J}_2 = \mathfrak{J}_1\,\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{J}_2, \quad \mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{J}_2\,\mathfrak{J}_1\,\mathfrak{J}_2\,\mathfrak{J}_1 = \mathfrak{J}_2\,\mathfrak{T}\,\mathfrak{J}_1.$$

Součiny $\mathfrak{T}\,\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}\,\mathfrak{T}^{-1}$ jsou tedy obecně transformace šestého stupně.

Předcházející věty lze odvodit také početně, analytickou formulací transformací $\mathfrak{T}$ a $\mathfrak{T}^{-1}$. Nejjednodušší takové vyjádření podává

Věta 4: *V souřadnicovém trojstranu PX_1, PX_2, X_1X_2; X_1 (1,0,0,), X_2 (0,1,0), P (0,0,1) odpovídá transformací $\mathfrak{T}$ obecnému bodu $X(x_1, x_2, x_3)$ bod $X'(x_1', x_2', x_3')$ takto:*

$$x_1' : x_2' : x_3 = l_{33}\,(k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2)\,x_1 : l_{33}\,(k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2)\,x_2 : 2\,l_{12}k_{33}x_1x_2x_3, \tag{5}$$

transformací $\mathfrak{T}^{-1}$ pak obecnému bodu $X'(x_1', x_2', x_3')$ odpovídá bod $X(x_1, x_2, x_3)$ takto:

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2\,l_{12}k_{33}x_1'^2x_2' : 2\,l_{12}k_{33}x_1'x_2'^2 : l_{33}\,(k_{11}x_1'^2 + k_{22}x_2'^2)\,x_3'. \tag{6}$$

Přitom k_{11}, k_{22}, k_{33}, l_{12}, l_{33} jsou nenulové koeficienty v rovnicích řídicích kuželoseček $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ inversí $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{K}_1 &\equiv k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2 + k_{33}x_3^2 = 0, \\ \boldsymbol{K}_2 &\equiv 2\,l_{12}x_1x_2 + l_{33}x_3^2 = 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Důkaz: V inversi $\mathfrak{I}_1$ odpovídá bodu $X(x_1, x_2, x_3)$ bod $X'(x_1', x_2', x_3')$ takto:

$$x_1' : x_2' : x_3' = k_{33}x_1x_3 : k_{33}x_2x_3 : -(k_{11}x_1^2 + k_{22}x_2^2), \tag{8}$$

a obráceně

$$x_1 : x_2 : x_3 = k_{33}x_1'x_3' : k_{33}x_2'x_3' : -(k_{11}x_1'^2 + k_{22}x_2'^2). \tag{8}$$

V inversi $\mathfrak{I}_2$ odpovídá bodu $X(x_1, x_2, x_3)$ bod $X'(x_1', x_2', x_3')$ takto:

$$x_1' : x_2' : x_3' = l_{33}x_1x_3 : l_{33}x_2x_3 : -2\,l_{12}x_1x_2, \tag{9}$$

a obráceně

$$x_1 : x_2 : x_3 = l_{33}x_1'x_3' : l_{33}x_2'x_3' : -2\,l_{12}x_1'x_2', \tag{9}$$

$$(k_{11}, k_{22}, k_{33}, l_{12}, l_{33} \neq 0).$$

Postupným užitím rovnic (8), (9) resp. (9), (8) dostaneme — s ohledem na definici transformace $\mathfrak{T}$, resp. $\mathfrak{T}^{-1}$ — vztahy (5) resp. (6). Pomocí těchto vztahů lze pak ihned prokázat platnost vět 1 až 3. Kromě toho vyplývají ze vztahů (5), (6) další dva důsledky:

Důsledek 3: Transformace $\mathfrak{T}$ tvoří trojmocnou soustavu.

Důkaz: Zavedeme-li v rovnicích (5), (6) místo homogenních parametrů k_{11}, k_{22}, k_{33}, l_{12}, l_{33} nehomogenní parametry

$$k_1 = \frac{k_{11}}{k_{33}}, \quad k_2 = \frac{k_{22}}{k_{33}}, \quad k_3 = \frac{2\,l_{12}}{l_{33}},$$

dostaneme toto analytické vyjádření soustavy transformací $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$:

$$x_1' : x_2' : x_3' = (k_1x_1^2 + k_2x_2^2)\,x_1 : (k_1x_1^2 + k_2x_2^2)\,x_2 : k_3x_1x_2x_3, \tag{5'}$$

a obráceně

$$x_1 : x_2 : x_3 = k_3x_1'^2x_2' : k_3x_1'x_2'^2 : (k_1x_1'^2 + k_2x_2'^2)\,x_3' \tag{6'}$$

$$(k_1, k_2, k_3 \neq 0).$$

Důsledek 4: Volbou jednotkového bodu dostaneme toto kanonické vyjádření jednomocné soustavy transformací $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$:

$$x_1' : x_2' : x_3' = (x_1^2 + x_2^2)\,x_1 : (x_1^2 + x_2^2)\,x_2 : 2\,k\,x_1x_2x_3, \tag{10}$$

a obráceně

$$x_1 : x_2 : x_3 = 2\,k\,x_1'^2x_2' : 2\,k\,x_1'x_2'^2 : (x_1'^2 + x_2'^2)\,x_3' \tag{10}$$

$$(k \neq 0).$$

Důkaz: Transformací

$$x_1 : x_2 : x_3 = \frac{'x_1}{\sqrt{k_{11}}} : \frac{'x_2}{\sqrt{k_{22}}} : \frac{'x_3}{\sqrt{k_{33}}}$$

uvedou se rovnice (7) řídicích kuželoseček $\boldsymbol{K}_1$ a $\boldsymbol{K}_2$ (po vynechání akcentů) na tvar

$$\boldsymbol{K}_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$\boldsymbol{K}_2 \equiv 2\,l_{12}k_{33}x_1x_2 + l_{33}\sqrt{k_{11}k_{22}}\,x_3^2 = 0 \quad \text{čili} \quad k_3x_1x_2 + \sqrt{k_1k_2}\,x_3^2 = 0.$$

Položíme-li

$$2k = \frac{2\,l_{12}}{l_{33}} : \sqrt{\frac{k_{11}}{k_{33}}\,\frac{k_{22}}{k_{33}}} = \frac{k_3}{\sqrt{k_1k_2}},$$

dostaneme z rovnic (5), (6) rovnice (10).

Rovnice (10) ztrácejí smysl pro hlavní body inversí $\mathfrak{J}_1$ a $\mathfrak{J}_2$. V těchto případech platí dále uvedené věty 5 až 7.

Věta 5: *V transformaci $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}^{-1}$) odpovídá středu P singulární kuželosečka (PX_1, PX_2) [(PY_1, PY_2)], složená z přímek, které z tohoto bodu promítají hlavní body X_1, X_2 (Y_1, Y_2) inverse $\mathfrak{J}_2$ ($\mathfrak{J}_1$).*

Důkaz: V inversi $\mathfrak{J}_1$ odpovídá středu P protilehlá hlavní přímka Y_1Y_2. Přímce $Y_1Y_2 \equiv X_1X_2$ odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ střed P, ovšem s výjimkou hlavních bodů X_1, X_2, kterým odpovídají přímky PX_1, PX_2. Odpovídá tedy středu P v transformaci $\mathfrak{T}$ složená kuželosečka (PX_1, PX_2), pro kterou je střed P singulárním bodem.

S druhé strany odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ středu P protilehlá hlavní přímka X_1X_2. Přímce $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$ odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_1$ střed P, ovšem s výjimkou hlavních bodů Y_1, Y_2, kterým odpovídají přímky PY_1, PY_2. Odpovídá tedy středu P v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ složená kuželosečka (PY_1, PY_2), pro kterou je střed P bodem singulárním.

Poznámka 1: Z uvedeného důkazu vyplývá tento doplněk k větě 5: Střed P je pro transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ jednak bodem samodružným, jednak hlavním bodem druhého řádu.

Poznámka 2: Věta 5 neplatí obráceně.

Důkaz: Středu P odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}^{-1}$) podle věty 5 kuželosečka

$$x_1'x_2' = 0 \quad (x_1^2 + x_2^2 = 0).$$

Této kuželosečce pak odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ ($\mathfrak{T}$) podle (10) sextika

$$(x_1^2 + x_2^2)^2\, x_1x_2 = 0 \quad [x_1'^2x_2'^2\,(x_1'^2 + x_2'^2) = 0],$$

složená z dvojnásobně počítaných přímek PY_1, PY_2 (PX_1, PX_2) a jednoduše počítaných přímek PX_1, PX_2 (PY_1, PY_2), jež vesměs patří do svazku přímek o vrcholu P. Tato poslední okolnost je ovšem v souhlase s tím, že střed P je samodružný, jak je uvedeno v poznámce 1.

Věta 6: *V transformaci $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}^{-1}$) odpovídá bodu Y_1, resp. Y_2 přímka PY_1, resp. PY_2, bod se středem P. V transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ odpovídá bodu Y_1, resp. Y_2 přímka Y_1 Y_2, spojující tento bod s bodem Y_2, resp. Y_1.*

Důkaz: V inversi $\mathfrak{J}_1$ odpovídá bodu Y, který je pro ni bodem hlavním, přímka PY, to jest hlavní přímka, spojující tento bod se středem P. V inversi $\mathfrak{J}_2$ se pak tato přímka reprodukuje.

S druhé strany odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ bodu Y, ležícímu na hlavní přímce X_1X_2 této inverse, střed P. Tomuto středu pak odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_1$ protilehlá hlavní přímka Y_1Y_2.

Poznámka 3: Větu 6 doplníme takto: Body Y_1, Y_2 jsou pro transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ hlavními body prvního řádu.

Poznámka 4: Věta 6 neplatí obráceně.

Důkaz: Bodům Y ($x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0$, $x_3 = 0$), [($x_1'^2 + x_2'^2 + x_3'^2 = 0$, $x_3' = 0$)] odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}$ ($\mathfrak{T}^{-1}$) podle věty 6 přímka

$$x_1' \pm \mathrm{i}\,x_2' = 0 \ (x_3 = 0), \ (\mathrm{i} = +\sqrt{-1}).$$

Této přímce však v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$, ($\mathfrak{T}$) odpovídá podle rovnice (10) kubika

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(x_1 \pm \mathrm{i}\,x_2) = 0, \ [(x_1'^2 + x_2'^2)\,x_3' = 0], \ (\mathrm{i} = +\sqrt{-1}),$$

složená z dvojnásobně počítané jedné přímky PY a jednoduše počítané zbývající přímky PY (z jednoduše počítaných přímek PY a z přímky $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$).

Věta 7: *V transformaci $\mathfrak{T}$ odpovídá bodu X_1, resp. X_2 přímka X_1X_2, spojující tento bod s bodem X_2, resp. X_1.*

V transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ odpovídá bodu X_1, resp. X_2 přímka PX_1, resp. PX_2, spojující tento bod se středem P.

Důkaz: V inversi $\mathfrak{J}_1$ odpovídá bodu X, ležícímu na hlavní přímce Y_1Y_2 této inverse, střed P. Tomuto středu pak odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ protilehlá hlavní přímka X_1X_2.

S druhé strany odpovídá v inversi $\mathfrak{J}_2$ bodu X, který je pro tuto inversi hlavním bodem, přímka PX, to jest hlavní přímka spojující tento bod se středem P. V inversi $\mathfrak{J}_1$ pak se tato přímka reprodukuje.

Poznámka 5: Větu 7 doplníme takto: Body X_1 X_2 jsou pro transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ hlavními body prvního řádu.

Poznámka 6: Věta 7 neplatí obráceně.

Důkaz: Bodům X $(2kx_1x_2 + x_3^2 = 0, x_3 = 0)$, $[(2kx_1'x_2' + x_3'^2 = 0, x_3' = 0)]$ v transformaci $\mathfrak{T}$ $(\mathfrak{T}^{-1})$ odpovídá podle věty 7 přímka $x_3' = 0$ $(x_{1,2} = 0)$. Té však v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ $(\mathfrak{T})$ odpovídá podle rovnic (10) kubika

$$x_1x_2x_3 = 0, \ (x_1'^2\, x_2' = 0, \text{ po případě } x_1'x_2'^2 = 0),$$

složená z přímek PX_1, PX_2, X_1X_2 (z dvojnásob počítané přímky PX_1, po případě PX_2 a jednoduše počítané přímky PX_2, po případě PX_1).

Věta 8: *Průsečíky Z kuželoseček $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ leží po dvou na přímkách jdoucích bodem P a jsou pro transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ body samodružnými.*

Důkaz: Řešením rovnic

$$\boldsymbol{K}_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, \quad \boldsymbol{K}_2 \equiv 2kx_1x_2 + x_3^2 = 0$$

dostaneme

$$\left.\begin{aligned} &z_1\left(k + \theta,\ 1,\ + \sqrt{-2k(k+\theta)}\right), \\ &z_2\left(k + \theta,\ 1,\ - \sqrt{-2k(k+\theta)}\right), \\ &z_3\left(k - \theta,\ 1,\ + \sqrt{-2k(k+\theta)}\right), \\ &z_4\left(k - \theta,\ 1,\ - \sqrt{-2k(k+\theta)}\right), \end{aligned}\right\} \tag{11}$$

$\theta \doteq + \sqrt{k^2 - 1}$. Odtud plyne jednak, že trojice PZ_1Z_2, PZ_3Z_4 leží v přímce, jednak, že se tyto body reprodukují transformací (10), což jsme měli dokázat.

Na otázku, zda větami 5 až 8 byly stanoveny všechny body hlavní a všechny body samodružné, odpovíme později.

Věta 8 má tento

důsledek 5: Existují dvě transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$, pro něž kuželosečky $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ jsou dvojnásobně se dotýkající. Analytické vyjádření těchto transformací je toto:

$$\begin{aligned} x_1' : x_2' : x_3' &= (x_1^2 + x_2^2)\, x_1 : (x_1^2 + x_2^2)\, x_2 : 2\,\varepsilon\, x_1x_2x_3, \\ x_1 : x_2 : x_3 &= 2\,\varepsilon\, x_1'^2x_2' : 2\,\varepsilon\, x_1'x_2'^2 : (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_3', \end{aligned} \tag{12}$$

kde $\varepsilon = \pm 1$.

Důkaz: Nutná a postačující podmínka pro to, aby body Z_1, Z_3 a Z_2, Z_4 splynuly, je $\theta = 0$ čili $k = \pm 1$. Souřadnice bodů dotyku jsou $(-1, 1, \varepsilon i \sqrt{2})$, $(i = + \sqrt{-1})$. Trojice $PZ_{13}Z_{24}$ leží tedy v přímce. Analytické vyjádření takto specialisované transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ plyne z rovnic (10).

Pro útvary, odpovídající v transformaci $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ přímce, platí dále uvedené věty 9 a 10.

Věta 9: *Obecné přímce* $a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0$ *odpovídá v transformaci* $\mathfrak{T}$ *kubická křivka* $\mathbf{C}'_3$,

a) *která má střed P za dvojnásobný bod o tečnách* PY_1, PY_2,

b) *která prochází jednoduše body* X_1, X_2 *s tečnami, protínajícími se v bodě* $(a_1a_3, a_2a_3, -a_1a_2)$, *a*

c) *protínající přímku* Y_1Y_2 *v bodě, v němž tuto přímku protíná přímka základní.*

Důkaz: Přímce

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0 \quad (a_1, a_2, a_3 \neq 0)$$

odpovídá transformací $\mathfrak{T}$ podle rovnic (10) (po vynechání akcentů) kubická křivka

$$\mathbf{C}'_3 \equiv 2k\,(a_1x_1 + a_2x_2)\,x_1x_2 + a_3\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_3 = 0 \tag{13}$$

s dvojnásobným bodem (0, 0, 1) o tečnách $x_1^2 + x_2^2 = 0$, obsahující bod (1, 0, 0), resp. (0, 1,0) o tečnách $2\,ka_1x_2 + a_3x_3 = 0$, resp. $2\,ka_2x_1 + a_3x_3 = 0$. Tato křivka protíná přímku Y_1Y_2 ještě v bodě

$$a_1x_1 + a_2x_2 = 0,\; x_3 = 0.$$

To jsme měli dokázat.

Poznámka 7: Křivka $\mathbf{C}'_3$ je vlastnostmi a) a b) určena.

Důkaz: Vlastnosti a) a b) představují devět lineárně nezávislých podmínek pro koeficienty kubické křivky.

S hlediska početního uvažujme takto: Soustava ∞^2 kubických křivek s dvojnásobným bodem (0, 0, 1) o tečnách $x_1^2 + x_2^2 = 0$ a s jednoduchými body (1, 0, 0), (0, 1, 0) má rovnici

$$(m\,x_1 + n\,x_2)\,x_1x_2 + p\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_3 = 0.$$

Tečny této křivky v bodech (1, 0, 0), resp. (0, 1, 0)

$$m\,x_2 + p\,x_3 = 0, \text{ resp. } n\,x_1 + p\,x_3 = 0$$

splynou s přímkami

$$2\,ka_1x_2 + a_3x_3 = 0, \text{ resp. } 2\,ka_2x_1 + a_3x_3 = 0,$$

položíme-li

$$m = 2\,ka_2,\; n = 2\,ka_1,\; p = a_3.$$

Poznámka 8: Obecná přímka protne křivku $\mathbf{C}'_3$ kromě v bodě uvedeném sub c) ještě v dalších dvou bodech, v nichž tato přímka je proťata přímkami PZ_1Z_2 a PZ_3Z_4.

Důkaz: Z rovnic

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0,$$

$$2\,k\,(a_1x_1 + a_2x_2)\,x_1x_2 + a_3\,(x_1^2 + x_2^2)\,x_3 = 0$$

plyne

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\,k\,x_1x_2 = 0.$$

Totéž však plyne i z rovnic

$$\mathbf{K}_1 \equiv x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0,$$

$$\mathbf{K}_2 \equiv 2\,k\,x_1x_2 + x_3^2 = 0.$$

Zvláštní případy věty 9 jsou obsaženy v dále uvedených důsledcích 6 až 11.

Důsledek 6: Přímce procházející středem P a různé od přímek PX_1, PX_2, PY_1, PY_2 odpovídá transformací $\mathfrak{T}$ táž přímka s výjimkou bodu P samého (o tom viz větu 5, poznámku 1).

Důkaz: Pro $a_3 = 0$, $(a_1, a_2 \neq 0)$ plyne z rovnice (13)

$$(a_1x_1 + a_2x_2)\, x_1x_2 = 0,$$

což je kubická křivka, složená z přímek PX_1, PX_2 (což jsou útvary, odpovídající středu P) a z přímky základní.

Důsledek 7: Přímce PX, spojující střed P s jedním hlavním bodem inverse $\mathfrak{J}_2$, odpovídá transformací $\mathfrak{T}$ kromě této přímky samé (viz důsledek 6) ještě kuželosečka, složená z přímek PX_1, PX_2.

Důkaz: Jestliže základní přímka obsahuje kromě středu P ještě bod X_1, resp. X_2, je její rovnice

$$x_2 = 0, \text{ resp. } x_1 = 0,$$

a odpovídá složená kubika

$$x_1x_2^2 = 0, \text{ resp. } x_1^2x_2 = 0,$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 8: Přímce PY, spojující střed P s jedním hlavním bodem inverse $\mathfrak{J}_1$, odpovídá transformací $\mathfrak{T}$ kromě této přímky samé (viz důsledek 6) ještě kuželosečka, složená z přímek PX_1, PX_2.

Důkaz: Jestliže základní přímka obsahuje kromě středu P ještě bod Y_1, resp. Y_2, je její rovnice

$$x_1 + \mathrm{i}\, x_2 = 0, \text{ resp. } x_1 - \mathrm{i}\, x_2 = 0 \ (\mathrm{i} = \pm\sqrt{-1}),$$

a odpovídá složená kubika

$$x_1x_2\, (x_1 + \mathrm{i}\, x_2) = 0, \text{ resp. } x_1x_2\, (x_1 - \mathrm{i}\, x_2) = 0,$$

jak jsme měli dokázat.

Důsledek 9: Přímce, procházející hlavním bodem X a různé od přímek XP, Y_1Y_2, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}$ kubická křivka, která má všechny podstatné vlastnosti křivky $\boldsymbol{C}_3'$, o níž mluví věta 9.

Důkaz: Pro $a_1 = 0$, a_2, $a_3 \neq 0$, resp. $a_2 = 0$, a_1, $a_3 \neq 0$ plyne z rovnice (13)

$$2\, k a_2 x_1 x_2^2 + a_3\, (x_1^2 + x_2^2)\, x_3 = 0,$$

resp.

$$2\, k a_1 x_1^2 x_2 + a_3\, (x_1^2 + x_2^2)\, x_3 = 0,$$

což je rovnice kubické křivky s dvojnásobným bodem P o tečnách PY_1, PY_2 a s jednoduchými body X_1, po případě X_2, s tečnami $X_1X_2 \equiv x_3 = 0$, po případě $2\, ka_2x_1 + a_3x_3 = 0$ resp. $2\, ka_1x_2 + a_3x_3 = 0$, po případě $X_2X_1 \equiv x_3 = 0$.

Důsledek 10: Přímce $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$, jež obsahuje hlavní body prvního řádu, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}$ kromě této přímky samé ještě kuželosečka, složená z přímek PY_1, PY_2.

Důkaz: Rovnice základní přímky je $x_3 = 0$ a odpovídá složená kubická křivka

$$(x_1^2 + x_2^2)\, x_3 = 0,$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 11: Přímce, procházející hlavním bodem Y a různé od přímek YP, Y_1Y_2, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}$ kubická křivka, složená z přímky, spojující tento hlavní bod se středem P, a z kuželosečky, obsahující hlavní body P, X_1, X_2.

Důkaz: Rovnice základní přímky je

$$a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 = 0, \quad \pm\, \mathrm{i}a_1 + a_2 = 0, \quad (a_1, a_2 \neq 0,)$$

čili

$$a_1 (x_1 \pm \mathrm{i}\, x_2) + a_3x_3 = 0, (a_1, a_3 \neq 0.)$$

Podle rovnic (10) odpovídá kubická křivka

$$2\, ka_1 (x_1 \pm \mathrm{i}\, x_2)\, x_1x_2 + a_3 (x_1^2 + x_2^2)x_3 = 0,$$

čili

$$(x_1 \pm \mathrm{i}\, x_2) [2\, ka_1x_1x_2 + a_3 (x_1 \pm \mathrm{i}\, x_2)\, x_3] = 0,$$

což jsme měli dokázat.

Věta 10: *Obecné přímce $a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0$ odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kubická křivka $\boldsymbol{C}_3$ těchto vlastností:*

a) *střed P je jejím dvojnásobným bodem s tečnami PX_1, PX_2,*

b) *prochází jednoduše body Y_1, Y_2 s tečnami, protínajícími se v bodě* $[2\, ka_2'a_3', 2\, ka_1'a_3', -(a_1'^2 + a_2'^2)]$,

c) *protíná přímku X_1X_2 v bodě, v němž tuto přímku protíná přímka základní.*

Důkaz: Přímce

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0 \ (a_1', a_2', a_3' \neq 0)$$

odpovídá transformací $\mathfrak{T}^{-1}$ podle rovnic (10) kubická křivka

$$\boldsymbol{C}_3 \equiv (a_1'x_1 + a_2'x_2)(x_1^2 + x_2^2) + 2\, ka_3'x_1x_2x_3 = 0 \tag{14}$$

s dvojnásobným bodem (0, 0, 1) o tečnách $x_1x_2 = 0$, obsahující bod $(x_1 + \mathrm{i}\, x_2, x_3 = 0)$, resp. $(x_1 - \mathrm{i}\, x_2, x_3 = 0)$ o tečnách

$$(a_1' + \mathrm{i}a_2')\, x_1 + \mathrm{i}\, (a_1' + \mathrm{i}a_2')\, x_2 + 2\, \mathrm{i}\, ka_3'\, x_3 = 0,$$

resp.

$$(a_1' - \mathrm{i}a_2')\, x_1 - \mathrm{i}\, (a_1' - \mathrm{i}a_2')\, x_2 - 2\, \mathrm{i}\, ka_3'\, x_3 = 0,$$

$(\mathrm{i} = +\sqrt{-1})$. Tato křivka protíná přímku X_1X_2 ještě v bodě $(a_1'x_1 + a_2'x_2 = 0, x_3 = 0)$, což bylo dokázat.

Poznámka 9: Křivka $\boldsymbol{C}_3$ je vlastnostmi a), b) určena.

Důkaz: Vlastnosti a), b) představují devět lineárně nezávislých podmínek pro koeficienty kubické křivky.

S početního hlediska uvažujme takto: Soustava ∞^4 kubických křivek s dvojnásobným bodem (0, 0, 1) o tečnách $x_1x_2 = 0$ má rovnici

$$m'x_1^3 + n'x_2^3 + (p'x_1 + q'x_2 + r'x_3)\, x_1x_2 = 0.$$

Žádáme-li, aby tato kubická křivka byla proťata přímkou $x_3 = 0$ v dané dvojici bodů $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_3 = 0)$ (a ovšem ještě v dalším bodě), dojdeme k podmínce

$$m'x_1^3 + n'x_2^3 + p'x_1^2x_2 + q'x_1x_2^2 \equiv \lambda\, (x_1^2 + x_2^2)\, (s'x_1 + t'x_2),$$

z níž plyne

$$m' = \lambda\, s', n' = \lambda t', p' = \lambda t', q' = \lambda s'.$$

Tak dostaneme ∞^2 kubických křivek

$$s'x_1^3 + t'x_2^3 + (t'x_1 + s'x_2 + r_*'x_3)\, x_1x_2 = 0,$$

kde $r_*' = \dfrac{r'}{\lambda}$. Tečny v bodech $(x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 = 0, x_3 = 0)$ mají rovnice

$$(s' \pm i t')\, x_1 \pm i\, (s' \pm i t')\, x_2 \pm \frac{1}{2}\, i\, r'_* x_3 = 0,$$

a splynou s přímkami

$$(a'_1 \pm i a'_2)\, x_1 \pm i\, (a'_1 \pm i a'_2)\, x_2 \pm 2\, i\, k a'_3 x_3 = 0,$$

položíme-li

$$s' = a'_1,\; t' = a'_2,\; \frac{1}{2}\, r'_* = 2\, k a'_3.$$

Poznámka 10: Obecná přímka protne kubickou křivku $\boldsymbol{C}_3$ kromě v bodě, uvedeném sub c), ještě v dalších dvou bodech, v nichž tato přímka je proťata přímkami PZ_1Z_2 a PZ_3Z_4.

Důkaz: Z rovnic

$$a'_1 x_1 + a'_2 x_2 + a'_3 x_3 = 0,$$

$$(a'_1 x_1 + a'_2 x_2)\,(x_1^2 + x_2^2) + 2\, k a'_3 x_1 x_2 x_3 = 0$$

plyne vztah

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\, k x_1 x_2 = 0,$$

což bylo dokázat.

Zvláštní případy věty 10 jsou obsaženy v důsledcích 12 až 17.

Důsledek 12: Přímce procházející středem P a různé od přímek PX, PY, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ táž přímka, s výjimkou bodu P samého (o němž viz poznámku 1 k větě 5).

Důkaz: Pro $a'_3 = 0$, $(a'_1, a'_2 \neq 0)$ plyne z rovnice (14)

$$(a'_1 x_1 + a'_2 x_2)\,(x_1^2 + x_2^2) = 0,$$

což je kubická křivka, složená z přímek PY_1, PY_2 (jakožto útvarů, odpovídajících středu P) a z přímky základní.

Důsledek 13: Přímce PX, spojující střed P s jedním hlavním bodem inverse $\mathfrak{J}_2$, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kromě této přímky samé (viz důsledek 12) ještě kuželosečka, složená z přímek PY_1, PY_2.

Důkaz: Obsahuje-li základní přímka kromě středu P ještě bod X_1, resp. X_2, je její rovnice

$$x'_2 = 0, \text{ resp. } x'_1 = 0,$$

a odpovídá složená kubická křivka

$$(x_1^2 + x_2^2)\, x_2 = 0, \text{ resp. } (x_1^2 + x_2^2)\, x_1 = 0,$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 14: Přímce PY, spojující střed P s jedním hlavním bodem inverse $\mathfrak{J}_1$, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kromě této přímky samé (podle důsledku 12) ještě kuželosečka složená z přímek PY_1, PY_2.

Důkaz: Obsahuje-li základní přímka kromě středu P ještě bod Y_1, resp. Y_2, je její rovnice

$$x'_1 + i x'_2 = 0, \text{ resp. } x'_1 - i x'_2 = 0 \quad (i = +\sqrt{-1}),$$

a odpovídá složená kubická křivka

$$(x_1^2 + x_2^2)\,(x_1 + i x_2) = 0, \text{ resp. } (x_1^2 + x_2^2)\,(x_1 - i x_2) = 0,$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 15: Přímce, procházející hlavním bodem X a různé od přímek XP, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kubická křivka, složená z přímky, spojující tento hlavní bod se středem P, a z kuželosečky, obsahující hlavní body P, Y_1, Y_2.

Důkaz: Pro $a_1' = 0$, $(a_2', a_3' \neq 0)$, resp. $a_2' = 0$, $(a_1', a_3' \neq 0)$ plyne z rovnice (14)

$$a_2'x_2(x_1^2 + x_2^2) + 2ka_3'x_1x_2x_3 = 0,$$

resp.

$$a_1'x_1(x_1^2 + x_2^2) + 2ka_3'x_1x_2x_3 = 0$$

čili

$$x_2[a_2'(x_1^2 + x_2^2) + 2ka_3'x_1x_3] = 0,$$

resp.

$$x_1[a_1'(x_1^2 + x_2^2) + 2ka_3'x_2x_3] = 0,$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 16: Přímce $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$, která obsahuje hlavní body prvního řádu, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kromě této přímky samé ještě kuželosečka, složená z přímek PX_1, PX_2.

Důkaz: Rovnice základní přímky je $x_3' = 0$, a odpovídá složená kubická křivka $x_1x_2x_3 = 0$, jak bylo dokázat.

Důsledek 17: Přímce, procházející hlavním bodem Y a různé od přímek YP, odpovídá v transformaci $\mathfrak{T}^{-1}$ kubická křivka, která má všechny podstatné vlastnosti křivky $\boldsymbol{C}_3$, o níž mluví věta 10.

Důkaz: Rovnice základní přímky je

$$a_1'x_1' + a_2'x_2' + a_3'x_3' = 0, \quad \pm\mathrm{i}a_1' + a_2' = 0, (a_1', a_2' \neq 0)$$

čili

$$a_1'(x_1' \pm \mathrm{i}x_2') + a_3'x_3' = 0, (a_1', a_3' \neq 0).$$

Podle rovnic (10) odpovídá kubická křivka

$$a_1'(x_1^2 + x_2^2)(x_1 \pm \mathrm{i}x_2) + 2ka_3'x_1x_2x_3 = 0,$$

která má dvojnásobný bod P o tečnách PX_1, PX_2 atd., jak bylo dokázat.

Z věty 9 a 10 plyne

věta 11: *Střed P (hlavní bod druhého řádu) a body X_1, X_2, Y_1, Y_2 (hlavní body prvního řádu) jsou všechny hlavní body transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$.*

Důkaz: Větami 9 a 10 jsme vyšetřili homaloidní soustavy transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$: Síti všech nečárkovaných přímek odpovídá síť kubických křivek $\boldsymbol{C}_3'$ s rovnicí (13). Síti všech čárkovaných přímek odpovídá síť kubických křivek $\boldsymbol{C}_3$ s rovnicí (14). Všechny křivky $\boldsymbol{C}_3'$ mají tyto společné body: střed P jako dvojnásobný s týmiž tečnami PY_1, PY_2, body X_1, X_2 jednoduché. Všechny křivky $\boldsymbol{C}_3$ mají tyto společné body: střed P jako dvojnásobný s týmiž tečnami PX_1, PX_2, body Y_1, Y_2 jednoduché. Poněvadž obecná homaloidní křivka nemá jiných vícenásobných bodů než body hlavní, je hlavní soustava naší transformace tvořena jedním hlavním bodem druhého řádu (bod P) a čtyřmi hlavními body prvního řádu (X_1, X_2, Y_1, Y_2), jak bylo dokázat.

Tento výsledek potvrzuje i vyšetření Jacobiho křivky obou soustav jakožto geometrického místa dvojnásobných bodů homaloidní sítě. Pro nečárkovanou soustavu je Jacobiho křivka

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_1'}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_2'}{\partial x_3} \\ \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_1} & \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_3'}{\partial x_3} \end{vmatrix} = 0$$

čili sextika

$$x_1 x_2 (x_1^2 + x_2^2)^2 = 0,$$

rozpadající se na přímky PX_1, PX_2 a dvojnásob počítané přímky PY_1, PY_2.

Pro čárkovanou soustavu je Jacobiho křivka

$$\begin{vmatrix} \dfrac{\partial x_1}{\partial x_1'} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_2'} & \dfrac{\partial x_1}{\partial x_3'} \\ \dfrac{\partial x_2}{\partial x_1'} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_2} & \dfrac{\partial x_2}{\partial x_3'} \\ \dfrac{\partial x_3}{\partial x_1'} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_2'} & \dfrac{\partial x_3}{\partial x_3'} \end{vmatrix} = 0,$$

tedy (po vynechání akcentů) sextika

$$(x_1^2 + x_2^2)\, x_1^2 x_2^2 = 0,$$

rozpadající se na přímky PY_1, PY_2 a dvojnásob počítané přímky PX_1, PX_2.

Předcházející výsledky vyhovují ovšem Cremonovým rovnicím: Je-li n stupeň transformace a α_i počet společných bodů o násobnosti i v homaloidní síti, platí

$$\alpha_1 + 4\alpha_2 + \ldots + (n-1)^2 \alpha_{n-1} = n^2 - 1,$$

$$\alpha_1 + 3\alpha_2 + \ldots + \frac{n(n-1)}{2} \alpha_{n-1} = \frac{n(n+3)}{2} - 2.$$

V našem případě je $n = 3$, $\alpha_1 = 2$, $\alpha_2 = 1$ (s dvěma společnými tečnami), tedy

$$2 + (4 \cdot 1 + 2) = 3^2 - 1,\ 2 + (3 \cdot 1 + 2) = \frac{3(3+3)}{2} - 2.$$

Podle důsledků 6, 11, 12 a 16 se přímky, obsahující střed P, a přímka $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$ v transformaci $\mathfrak{T}, \mathfrak{T}^{-1}$ reprodukují. Podrobněji mluví o těchto vlastnostech věty 12, 13 a 14.

Věta 12: *Přímky PZ_1Z_2, PZ_3Z_4, které ze středu P promítají průsečíky kuželoseček $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$, jsou samodružné přímky transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$.*

Důkaz: Přímky PZ_1Z_2, PZ_3Z_4, obsahujíce samodružné body Z_1, Z_2, Z_3, Z_4 inversí $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$, reprodukují se transformacemi $\mathfrak{J}_1 \mathfrak{J}_2$ a $\mathfrak{J}_2 \mathfrak{J}_1$ bod za bodem.

Věta 13: *Přímka $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$, která obsahuje hlavní body prvního řádu transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$, je samodružná přímka této transformace.*

Důkaz: Polára kteréhokoli bodu přímky $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$ vzhledem ke kterékoli kuželosečce $\boldsymbol{K}_1$, $\boldsymbol{K}_2$ prochází středem P. Tomuto středu odpovídá pak v inversích $\mathfrak{J}_1$, $\mathfrak{J}_2$ kterýkoli bod protilehlé hlavní přímky $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$ (ovšem s výjimkou bodů X_1, X_2, Y_1, Y_2 samých), mezi nimi tedy i bod základní.

Věta 14: *Přímky PZ_1Z_2, PZ_3Z_4, $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$ jsou všechny samodružné útvary transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$.*

Důkaz: Pišme rovnice (10) ve tvaru

$$\begin{aligned} \varrho x_1' &= (x_1^2 + x_2^2)\, x_1, & \sigma x_1 &= 2\, k x_1'^2 x_2', \\ \varrho x_2' &= (x_1^2 + x_2^2)\, x_2, \quad \text{resp.} & \sigma x_2 &= 2\, k x_1' x_2'^2, \\ \varrho x_3' &= 2\, k x_1 x_2 x_3, & \sigma x_3 &= (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_3', \end{aligned}$$

kde ϱ, σ (ϱ, $\sigma \neq 0$) jsou koeficienty úměrnosti. Pro samodružné body platí

$$x' \equiv x_i, (i = 1, 2, 3),$$

to jest

$$\begin{aligned} x_1 (x_1^2 + x_2^2 - \varrho) &= 0, & x_1 (2\, k x_1 x_2 - \sigma) &= 0, \\ x_2 (x_1^2 + x_2^2 - \varrho) &= 0, \quad \text{resp.} & x_2 (2\, k x_1 x_2 - \sigma) &= 0, \\ x_3 (2\, k x_1 x_2 - \varrho) &= 0, & x_3 (x_1^2 + x_2^2 - \sigma) &= 0. \end{aligned}$$

Z poslední rovnice první, resp. druhé soustavy plyne jednak $x_3 = 0$, jednak $\varrho = 2\, k x_1 x_2$, resp. $\sigma = x_1^2 + x_2^2$. Po dosazení do prvních dvou rovnic dostaneme v obou soustavách stejně

$$\begin{aligned} x_1 (x_1^2 + x_2^2 - 2\, k x_1 x_2) &= 0, \\ x_2 (x_1^2 + x_2^2 - 2\, k x_1 x_2) &= 0. \end{aligned}$$

Jsou tedy rovnice samodružných útvarů

$$x_1^2 + x_2^2 - 2\, k x_1 x_2 = 0, \quad x_3 = 0,$$

jak bylo dokázat.

Tento výsledek potvrzuje i vyšetření isologických křivek obou soustav. V nečárkované soustavě zvolme obecný bod (ξ) (ξ_1, ξ_2, $\xi_3 \neq 0$). Svazek přímek, tímto bodem určený, má rovnici

$$\lambda_1 (\xi_3\, x_2 - \xi_2\, x_3) + \lambda_2 (\xi_3\, x_1 - \xi_1\, x_3) = 0,$$

a podle rovnic (10) mu (po vynechání akcentů) odpovídá svazek kubických křivek

$$\lambda_1 [2\, k\, \xi_3\, x_1 x_2^2 - \xi_2 (x_1^2 + x_2^2)\, x_3] + \lambda_2 [2\, k\, \xi_3\, x_1^2 x_2 - \xi_1 (x_1^2 + x_2^2)\, x_3] = 0.$$

Oba svazky jsou vzájemně vztaženy projektivně; isologická křivka I_ξ' je geometrickým místem průsečíků odpovídajících si čar obou svazků. Je tedy její rovnice

$$\frac{\xi_3\, x_2 - \xi_2\, x_3}{\xi_3\, x_1 - \xi_1\, x_3} = \frac{2\, k\, \xi_3\, x_1 x_2^2 - \xi_2 (x_1^2 + x_2^2)\, x_3}{2\, k\, \xi_3\, x_1^2 x_2 - \xi_1 (x_1^2 + x_2^2)\, x_3}$$

čili

$$I_\xi' \equiv (\xi_1\, x_2 - \xi_2\, x_1)(x_1^2 + x_2^2 - 2\, k x_1 x_2)\, x_3 = 0.$$

Křivka se rozpadá na přímku, spojující bod (ξ) se středem P, a na další součásti na poloze bodu (ξ) nezávislé, totiž na přímky PZ_1Z_2, PZ_3Z_4 a na přímku $X_1X_2 \equiv Y_1Y_2$. Dvě isologické křivky I_ξ', I_η', příslušné dvěma obecným bodům (ξ), (η), liší se tedy jen v oné součásti, která spojuje střed svazku přímek se středem transformace. Společné součásti jsou útvary samodružné.

Obdobně zvolme v čárkované soustavě obecný bod (ξ') (ξ_1', ξ_2', $\xi_3' \neq 0$) za střed svazku přímek

$$\lambda_1' (\xi_3' x_2' - \xi_2' x_3') + \lambda_2' (\xi_3' x_1' - \xi_1' x_3') = 0,$$

a stanovme odpovídající svazek kubických křivek (s přidáním akcentů):

$$\lambda_1' [\xi_3' (x_1'^2 + x_2'^2) x_2' - 2 k \xi_2' x_1' x_2' x_3'] + \lambda_2' [\xi_3' (x_1'^2 + x_2'^2) x_1' - 2k \xi_1' x_1' x_2' x_3'] = 0.$$

Odtud opět určíme rovnici isologické křivky ve tvaru

$$I_{\xi'} \equiv (\xi_1' x_2' - \xi_2' x_1') (x_1'^2 + x_2'^2 - 2 k x_1' x_2') x_3' = 0,$$

která, až na akcenty, má týž tvar jako rovnice křivky I'_{ξ}. Dvě isologické křivky $I_{\xi'}$, $I_{\eta'}$ se zase liší jen v oné části, která spojuje střed svazku přímek se středem transformace. Společné součásti jsou útvary samodružné.

Dodatek

Bodu (x) nechť v involutorní kolineaci $\mathfrak{L}$ odpovídá bod $(\mathring{x})$ takto:

$$\mathring{x}_1 : \mathring{x}_2 : \mathring{x}_3 = x_2 : x_1 : x_3.$$

Bodu $(\mathring{x})$ v korespondenci $\mathfrak{T}$, vyjádřeně rovnicemi (10), pak odpovídá bod (x') takto:

$$x_1' : x_2' : x_3' = (\mathring{x}_1^2 + \mathring{x}_2^2)\, \mathring{x}_2 : (\mathring{x}_1^2 + \mathring{x}_2^2)\, \mathring{x}_1 : 2 k \mathring{x}_1 \mathring{x}_2 \mathring{x}_3. \qquad (15)$$

Uvažujme nyní transformaci $\mathfrak{Z}^{-1}$, takto definovanou:

Definice 2: *Soumístná transformace* $\mathfrak{Z}^{-1}$ *je určena rovnicí*

$$\mathfrak{Z}^{-1} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{T} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2. \qquad (16)$$

Důsledek 18: Transformace $\mathfrak{Z}$, inversní k $\mathfrak{Z}^{-1}$, je určena rovnicí

$$\mathfrak{Z} = \mathfrak{T}^{-1}\, \mathfrak{L} = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1\, \mathfrak{L}. \qquad (17)$$

Důkaz: Násobme rovnici (16) zprava $\mathfrak{Z}$. Dostaneme

$$\mathfrak{Z}^{-1} \mathfrak{Z} = \mathfrak{L}\, \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z} \quad \text{čili} \quad 1 = \mathfrak{L}\, \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}.$$

Dalším násobením zleva $\mathfrak{L}$ dostaneme

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{I}_1 \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z}.$$

Dalším násobením zleva $\mathfrak{I}_1$ dostaneme

$$\mathfrak{I}_1 \mathfrak{L} = \mathfrak{I}_2 \mathfrak{Z},$$

a konečně násobením zleva $\mathfrak{I}_2$ dostaneme

$$\mathfrak{I}_2 \mathfrak{I}_1 \mathfrak{L} = \mathfrak{Z},$$

jak bylo dokázat.

Důsledek 19: Transformaci $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ lze vyjádřit pomocí transformací $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{-1}$ a transformace $\mathfrak{L}$ takto:

$$\mathfrak{T} = \mathfrak{L}^{-1} \mathfrak{Z}^{-1}, \quad \mathfrak{T}^{-1} = \mathfrak{Z}\, \mathfrak{L}, \quad (\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{-1}).$$

Důkaz: První rovnici dostaneme násobením rovnice (16) zleva $\mathfrak{L}$, druhou násobením rovnice (17) zprava $\mathfrak{L}$.

Důsledek 20: Transformaci $\mathfrak{L}$ lze vyjádřit pomocí transformací $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$, $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{-1}$ takto:

$$\mathfrak{L}^{-1} = \mathfrak{Z}^{-1} \mathfrak{T}^{-1}, \quad \mathfrak{L} = \mathfrak{T}\, \mathfrak{Z}, \quad (\mathfrak{L} = \mathfrak{L}^{-1}).$$

Důkaz: První rovnici dostaneme násobením rovnice (16) zprava $\mathfrak{T}^{-1}$, druhou násobením rovnice (17) zleva $\mathfrak{T}$.

Analytické vyjádření transformace $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{-1}$ podává

věta 15: *V souřadnicovém trojstranu* PX_1, PX_2, X_1X_2; X_1 (1, 0, 0,), X_2 (0, 1 ,0), P (0, 0, 1) *odpovídá v transformaci* $\mathfrak{Z}$ *obecnému bodu* (x) *bod* (x') *takto*:

$$x_1' : x_2' : x_3' = 2\,k x_1 x_2^2 : 2\,k x_1^2 x_2 : (x_1^2 + x_2^2)\, x_3; \tag{18}$$

v transformaci $\mathfrak{Z}^{-1}$ *obecnému bodu* (x') *odpovídá bod* (x) *takto*:

$$x_1 : x_2 : x_3 = (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_2' : (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_1' : 2\,k x_1' x_2' x_3', \tag{19}$$

$$(k \neq 0).$$

Důkaz: Až na změnu akcentování jsou rovnice (19) zřejmě shodné s rovnicemi (15). Rovnice (18) pak dostaneme buď jako analytické vyjádření rovnice (17), nebo obrácením rovnic (19).

Důsledek 21: Transformace $\mathfrak{Z}$ tvoří jednomocnou soustavu. Volbou jednotkového bodu lze dosáhnout kanonického vyjádření

$$x_1' : x_2' : x_3' = x_1 x_2^2 : x_1^2 x_2 : (x_1^2 + x_2^2)\, x_3, \tag{20}$$

a obráceně

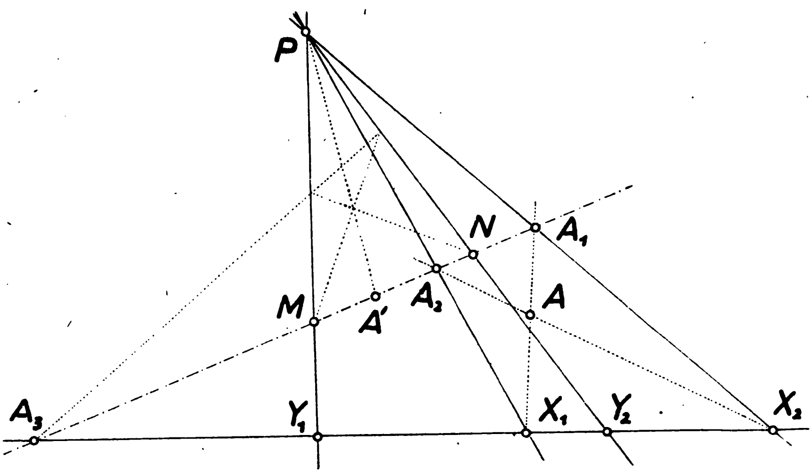
$$x_1 : x_2 : x_3 = (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_2' : (x_1'^2 + x_2'^2)\, x_1' : x_1' x_2' x_3', \tag{20}$$

které neobsahuje žádný arbitrární parametr.

Důkaz: Položíme-li v rovnicích (18) místo $x_1 : x_2 : x_3$ poměr $x_1 : x_2 : 2\,k x_3$, dostaneme první soustavu rovnic (20). Položíme-li v rovnicích (19) místo $x_1' : x_2' : x_3'$ poměr $x_1' : x_2' : \frac{x_3'}{2k}$, dostaneme druhou soustavu rovnic (20).

Ostatní vlastnosti transformace $\mathfrak{Z}$ stručně shrnuje

věta 16: *Transformace* $\mathfrak{Z}$ *je jednojednoznačná, kubická, a má všechny podstatné vlastnosti transformace* $\mathfrak{T}$. *Obdobně transformace* $\mathfrak{Z}^{-1}$.



Obr. 2

Důkaz: pomocí rovnic (20), jako v případě transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$.

Pro transformaci $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{-1}$ platí lineární konstrukce, jak ji udává

věta 17: *Bod A', který v transformaci $\mathfrak{Z}$ odpovídá obecnému bodu A, lze sestrojiti takto: Bod A promítneme z bodů X_1, resp. X_2 na přímku PX_2, resp. PX_1. Dostaneme tak body A_1, resp. A_2. Přímka A_1A_2 protne přímku X_1X_2 v bodě A_3, přímku PY_1, resp. PY_2 v bodě M, resp. N. Bod A' je určen podmínkou*

$$(M\,N A_3 A') = -1.$$

Obrácením této konstrukce dostaneme k obecnému bodu B' bod B, odpovídající mu v transformaci $\mathfrak{Z}^{-1}$ (obr. 2).

Důkaz: Nechť bod A má souřadnice $x_1 : x_2 : x_3$ ($x_1, x_2, x_3 \neq 0$). Souřadnice bodu A_1, resp. A_2 jsou $0 : x_2 : x_3$, resp. $x_1 : 0 : x_3$. Rovnice přímky A_1A_2 (v souřadnicích X_1, X_2, X_3) je

$$\frac{X_1}{x_1} + \frac{X_2}{x_2} - \frac{X_3}{x_3} = 0,$$

souřadnice bodu A_3 jsou $-x_1 : x_2 : 0$.

Rovnice dvojice přímek PY_1, PY_2 je

$$X_1^2 + X_2^2 = 0\text{*)}$$

a přímka A_1A_2 ji protne v bodech M, resp. N o souřadnicích $\pm\, \mathrm{i}\, x_1x_2 : x_1x_2 : (x_1 \pm \mathrm{i}\, x_2)x_3$, ($\mathrm{i} = \sqrt{-1}$). Lze tedy souřadnice bodu A_3 vyjádřit jako lineární kombinaci souřadnic bodů M, N takto:

$$\varrho\,(-x_1) = (\lambda - \mu)\,\mathrm{i}\, x_1x_2,\quad \varrho\, x_2 = (\lambda + \mu)\, x_1x_2,\quad 0 = \lambda\,(x_1 + \mathrm{i}\, x_2) + \mu\,(x_1 - \mathrm{i}\, x_2),$$

$\varrho \neq 0$, λ, μ jsou parametry. Odtud nejprve plyne $\dfrac{\lambda}{\mu} = -\dfrac{x_1 - \mathrm{i}\, x_2}{x_1 + \mathrm{i}\, x_2}$, takže bod A', určený podmínkou $(MNA_3A') = -1$, má souřadnice

$$\sigma\, x_1' = -2\, x_1x_2^2,\quad \sigma\, x_2' = -2\, x_1^2x_2,\quad \sigma\, x_3' = -2\,(x_1^2 + x_2^2)\, x_3,$$

$\sigma \neq 0$. To však jsou rovnice (20), jak bylo dokázat.

Věta 18: *Rovnice (20) lze metricky specialisovat na tvar*

$$x' = \frac{xy^2}{x^2 + y^2},\quad y' = \frac{x^2y}{x^2 + y^2}, \tag{21}$$

a obráceně

$$x = \frac{x'^2 + y'^2}{x'},\quad y = \frac{x'^2 + y'^2}{y'}. \tag{21}$$

Důkaz: Promítněme soustavu souřadnic tak, aby přímka X_1X_2 se stala přímkou nevlastní, body Y_1, Y_2 body kruhovými. Pak přímky PX_1, PX_2 přejdou v pravoúhlé osy souřadnic y, x a rovnice (20) v rovnice (21).

---

*) Ve vyjádření transformace $\mathfrak{T}$, $\mathfrak{T}^{-1}$ rovnicemi (10) má kuželosečka K_1 rovnici $X_1^2 + X_2^2 + X_3^2 = 0$ (viz důsledek 4 věty 4), která je v transformaci $\mathfrak{Q}$ invariantní. Volba jednotkového bodu pro transformaci $\mathfrak{Z}$, $\mathfrak{Z}^{-1}$, jak je udána v důsledku 21 věty 15, uvádí rovnici této kuželosečky na tvar $X_1^2 + X_2^2 + (2\,kX_3)^2 = 0$, resp. $X_1^2 + X_2^2 + \left(\dfrac{X_3}{2\,k}\right)^2 = 0$. Jsou tedy body Y ($X_1^2 + X_2^2 = 0$, $X_3 = 0$) v transformaci $\mathfrak{Z}$ tytéž jako v transformaci $\mathfrak{T}$.

Rovnice (21) však vyjadřují biracionální kubickou transformaci, pro níž jednoduchou konstrukci udal a kterou zvlášť podrobně se zabýval svého času K. Zahradník (*O jisté biracionální kubické transformaci a jejím upotřebení v theorii křivek*, Čas. mat. fys., sv. 34 (1905), 105—123, 329—341, sv. 38 (1909), 6—25; *Beitrag zur Theorie der rationalen Kurven dritter Ordnung*, Stzb. Ak. Wiss. Wien, sv. 113 (1904), 973—986**); *Ueber eine birationale kubische Verwandtschaft und deren Anwendung*, Stzb. Ak. Wiss. Wien, sv. 114 (1905), 669—691**). Naše transformace $\mathfrak{Z}$ je tedy projektivním zobecněním transformace Záhradníkovy. Podrobné vyšetření vlastností transformace $\mathfrak{T}$ podává i některé důležité vlastnosti projektivní i metrické transformace Zahradníkovy, které v citovaných pracích uvedeny nejsou.

ENERGETICKÉ ATOMOVÉ REAKTORY

V poslední době se na celém světě věnuje velká pozornost otázkám výroby elektrické energie v atomových elektrárnách. Budování těchto elektráren je v plném proudu, a i když je dnes ještě výroba elektrické energie touto cestou mnohem dražší než v elektrárnách tepelných nebo vodních, nebudou tyto náklady jistě rozhodující v budoucnu, až se atomová energetika plně rozvine.

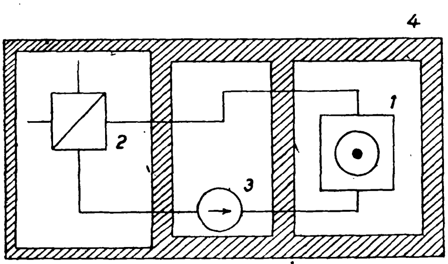
K mírovému rozvoji atomové energie značně přispěla mezinárodní konference, která se konala v srpnu r. 1955 v Ženevě. Na této konferenci byly shrnuty dosavadní výsledky studia atomových reaktorů a byl podán přehled typů, které se nejlépe hodí k energetickým účelům.

1. **Uranový reaktor chlazený vodou vysokého tlaku** (obr. 1.)

Palivem tohoto reaktoru je obohacený uran, jako moderátor a chladicí látka slouží obyčejná nebo těžká voda.

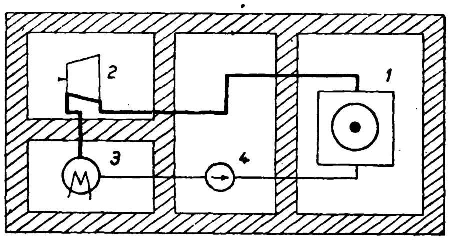
Voda proudí mezi uranovými tyčemi v reaktoru *(1)*, odtud odchází do vyvíječe *(2)* a z něho se opět přečerpává čerpadlem *(3)* do reaktoru. Voda tohoto primárního okruhu je pod značným tlakem, aby nedocházelo k jejímu varu. Ve vyvíječi vzniká pára, která žene již přímo parní turbinu. Reaktor, čerpadlo i vyvíječ jsou umístěny odděleně v samostatných prostorech, jejichž betonové zdi *(4)* poskytují ochranu proti radioaktivnímu záření.

Nevýhodou tohoto reaktoru je poměrně nízká teplota chladicí vody v primár-



Obr. 1.

1 — reaktor, *2* — vyvíječ, *3* — čerpadlo, *4* — ochranné zdi.



Obr. 2.

1 — reaktor, *2* — turbina, *3* — kondensátor, *4* — čerpadlo.

**) Bibliografický soupis J. Vojtěch, *Čas. mat. fys.*, sv. 46 (1917), 300—304.