Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Alois Urban

Zobrazovací methody v deskriptivní geometrii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 1, 22--31

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137388

ZOBRAZOVACÍ METHODY V DESKRIPTIVNÍ GEOMETRII

Prof. dr A. URBAN

(Přednáška pro učitele deskriptivní geometrie pořádaná JČMF, odbočka kraj Praha; Příbram, 4. července 1957.)

Výklady o jednotlivých zobrazovacích methodách v deskriptivní geometrii bývají obvykle zaměřeny na užití zobrazení k řešení základních stereometrických úloh. V článku se naproti tomu zdůrazňují jen základní zobrazovací principy, při čemž do popředí vystupuje otázka vzájemně jednoznačného zobrazení. S tohoto jednotného hlediska jsou pak přehledně probírány zejména nejznámější speciální případy dvojobrazového zobrazení a některé další typické zobrazovací methody.

1. Úvod

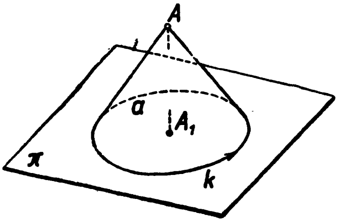
Deskriptivní geometrie se vyvinula jako odvětví geometrie, jehož úkolem je studovat geometrické vlastnosti method, které ukazují cesty, jak lze prostorové geometrické úlohy převést na rovinné úlohy, aby je bylo možno řešit graficky. V souvislosti s těmito methodami, které obvykle nazýváme *zobrazovacími methodami*, deskriptivní geometrie přímo řeší i stereometrické úlohy; rozloží je na sled elementárních úloh, pro něž již explicitně uvádí grafické řešení ve zvolené zobrazovací methodě.

Prvé podněty k řešení otázek, souvisících se zobrazováním prostorových útvarů na rovinu, byly dány jednak požadavky praxe (původně stavitelstvím, teprve mnohem později jinými technickými disciplinami), nutností mít jasnou představu o budoucím díle a potřebné podklady k jeho vybudování, jednak požadavky výtvarného umění, touhou poznat zákonitosti platné při zobrazování přírody na plátno i do kamene. Jestliže stavitelé potřebovali nejprve sestrojit názorný obraz objektu, který se měl teprve později realisovat, pak výtvarníci obráceně byli vedeni snahou co nejvěrněji vzbudit obrazem dojem skutečnosti. V obou případech vůdčím motivem bylo *vidění*. Není tedy divu, že prvé zobrazovací methody, jejichž geometrické zákony byly podány a zevrubně prostudovány, spočívaly na geometricky zjednodušeném procesu vidění, na *principu promítání*.

S některými prvky takto pojímané deskriptivní geometrie se setkáváme poměrně brzy, u stavitelů, sochařů a malířů, a to dokonce ještě ve starověku, na př. u Egypťanů. Pokusy o zachycení výjevů ze života na stěnách chrámových staveb, hrobkách, kresby na papyrech, vytesané zmenšené půdorysy a nárysy navrhovaných chrámů, mnohem pozdější náčrty a rysy na pergamenech a pak již první pokusy o výklad pravidel promítání a zejména užití nejrůznějších jednoduchých zobrazovacích method ukazují zhruba cestu, jakou se bral vývoj deskriptivní geometrie. Od pouhé empirie, od zvyklostí a zkušeností, od pozorování přírody přes nejrůznější návody, jak postupovat při zobrazování předmětů, aby se docílilo co nejvěrnějších obrazů, přes poměrně již dobře podložené výklady o lineární perspektivě až do r. 1799, kdy vyšla *Géométrie descriptive* francouzského geometra Gasparda Mongea (1746—1818), která znamená položení základů deskriptivní geometrie jako vědy. Její rozkvět spadá do druhé poloviny minulého století, kdy se rozvinula zejména jako *nauka o promítacích methodách*.

Ale už i Mongeovo zobrazení, pravoúhlé promítání na dvě k sobě kolmé průmětny, nese v sobě zárodek *obecnějších zobrazovacích method*.

Při středovém promítání, jak víme, bod prostoru se zobrazuje do bodu průmětny (ovšem až po úmluvě, která rozšiřuje eukleidovský prostor o nevlastní body) a tedy prostorový útvar, který uvažujeme jako množinu bodů, se zobrazí na nějakou množinu bodů roviny, která je — při vhodné volbě středu promítání a průmětny — názorným obrazem daného prostorového útvaru. Na tomto místě je vhodné připomenout fotografování, které v podstatě realisuje středové promítání. Fotografie je názorný obraz fotografovaného objektu. V Mongeově promítání však bod prostoru se zobrazuje do dvojice bodů a tedy prostorový útvar se zobrazí do dvojice rovinných útvarů (půdorys, nárys). Nedostáváme jen jeden názorný obraz, dostáváme dvojici sdružených obrazů prostorového útvaru. Mongeovo promítání je ovšem poněkud komplikovanější než prostý geometrisovaný proces vidění; v podstatě se používá dvojího pravoúhlého promítání (proto ty počáteční obtíže při školním výkladu Mongeovy projekce). I když často žádný ze vzniklých sdružených obrazů útvaru není názorný, je Mongeovo promítání přesto v praxi neobyčejně často užíváno. Umožňuje totiž velice snadné řešení metrických prostorových úloh; právě v tom spočíval zásadní obrat v rozvoji deskriptivní geometrie.



Obr. 1.

Mongeovo promítání není zdaleka jediné zobrazení, v němž bod prostoru se zobrazuje do dvojice bodů roviny. V deskriptivní geometrii je celá řada promítacích method založena na obdobném principu. Kromě toho však podněty z praxe, potřeby kartografie, krystalografie, mechaniky a fysiky daly vznik ještě obecnějším zobrazovacím methodám, jejichž základem není promítání, nebo u nichž promítání má jen podružnou úlohu. Příkladem je dobře známé *cyklografické promítání* (obr. 1), v němž bod A eukleidovského prostoru zobrazíme jeho pravoúhlým průmětem A_1 do pevně zvolené roviny π a kružnicí k v rovině π o středu A_1 a poloměru AA_1. Je-li A bodem roviny π, pak kružnice se redukuje na bod A_1, je-li bod A v kladném (záporném) poloprostoru, jehož hraniční rovinou je π, zvolíme na k kladnou (zápornou) orientaci, kterou vyznačujeme šipkou. Kružnice k s orientací se nazývá *cykl*; značíme jej a. Obrazem bodu A je tedy cykl a (se středem A_1). O cyklografickém promítání prostoru na rovinu je jen velmi těžko možno říci, že je názorné. Rozhodně je však užitečné jednak v krystalografii (kde se často za poloměr cyklu volí raději $\frac{1}{2}AA_1$), jednak v geometrii při řešení mnohých rovinných úloh, jež se pomocí cyklografie převádějí na prostorové úlohy, které lze mnohdy řešit snadněji než původní úlohy.

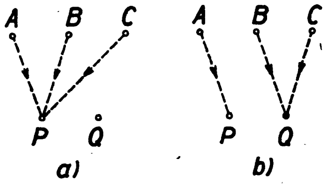
Cyklografické promítání ukazuje užitečnost zavedení obecnějších zobrazovacích method do deskriptivní geometrie než jsou jen klasické promítací methody. Je sice pravda, že stále ještě deskriptivní geometrie, zvláště elementární, se zabývá především těmi zobrazovacími methodami, jejichž základem je promítání, ale je alespoň vhodné uvědomit si, že promítací methody jsou jen zvláštním případem obecnějších zobrazovacích method, užívaných v nynější deskriptivní geometrii, a s nimi náleží do širšího celku, do theorie zobrazení, kterou se zabývá matematika.

Uvedeme proto nejprve stručně některé nejzákladnější pojmy z theorie zobrazení, abychom jich pak mohli užít při výkladu o zobrazovacích methodách v deskriptivní geometrii.

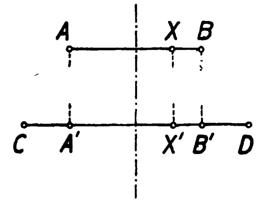
2. Zobrazení

Především si uvědomíme, že geometrické útvary nejsou nic jiného než jisté množiny prvků. Geometrickými prvky mohou být nejen body, ale také na př. přímky, roviny, nebo i kružnice, kuželosečky, koule, kvadriky a pod.; přirozeně rovněž dvojice bodů nebo dvojice přímek atd. může být geometrickým prvkem.

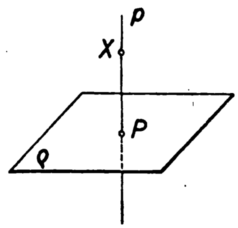
Množinové hledisko nás vede k tomu, za východisko vzít základní pojmy zobrazení, užívané v theorii množin.



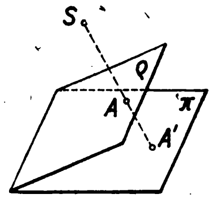
Obr. 2.



Obr. 3.



Obr. 4.



Obr. 5.

Nechť $\mathbf{M}$ *a* $\mathbf{M}'$ *jsou dvě dané množiny. Říkáme, že je dáno zobrazení množiny* $\mathbf{M}$ *do množiny* $\mathbf{M}'$*, jestliže každému prvku* $x \in \mathbf{M}$ *je přiřazen právě jeden prvek* $x' \in \mathbf{M}'$.

Každý prvek $x \in \mathbf{M}$ nazýváme *vzorem*; prvkům $x' \in \mathbf{M}'$, přiřazeným prvkům $x \in \mathbf{M}$, říkáme *obrazy*. Tedy v daném zobrazení x je vzorem prvku x' a obráceně x' je obrazem prvku x.

Zobrazení obvykle značíme f; podrobněji píšeme $x' = f(x)$. Značkou f vyjadřujeme, že zobrazení je jisté zobecnění známého pojmu funkce. Velmi často místo zobrazení říkáme *operace, příbuznost, transformace* nebo i *korespondence*. Je-li daná korespondence $\mathfrak{K}$, pak okolnost, že x' je v korespondenci $\mathfrak{K}$ obrazem prvku x, zapisujeme někdy prostě značkou $x' = \mathfrak{K}x$.

Příklad 1. Je dáno pět vzájemně různých bodů A, B, C, P, Q (obr. 2). Množina $\mathbf{M}$ je tvořena body A, B, C, tedy $\mathbf{M} = \{A, B, C\}$; množina $\mathbf{M}'$ body P, Q, tedy $\mathbf{M}' = \{P, Q\}$. Body P, Q můžeme přiřadit bodům A, B, C celkem osmi způsoby; existuje tedy celkem osm zobrazení množiny $\mathbf{M}$ do množiny $\mathbf{M}'$ (z nichž dvě jsou vyznačeny na obr. 2).

Příklad 2. Nechť jsou dány dvě rovnoběžné úsečky $AB < CD$ se společnou osou souměrnosti (obr. 3). Zobrazení úsečky AB do úsečky CD definujeme tak, že bodu X úsečky AB přiřadíme jeho pravoúhlý průmět X' na úsečku CD.

Příklad 3. Nechť je dána přímka p kolmá k rovině ϱ. Patu kolmice označme P. Každému bodu $X \in p$ přiřadíme jeho pravoúhlý průmět do roviny ϱ, t. j. bod P. Tím je dáno zobrazení přímky p do roviny ϱ (obr. 4).

Příklad 4. Nechť v projektivním prostoru je dáno promítání svým středem S a průmětnou π (která neprochází bodem S). Promítáním bodů A roviny ϱ, která neprochází středem S, do bodů A' roviny π je dáno zobrazení roviny ϱ do průmětny π (obr. 5).

Poznamenejme, že pro lepší názornost jsme uvedli jen takové příklady, kde jak prvky množiny **M**, tak i prvky množiny **M'** byly body. Velmi jednoduchý příklad zobrazení množiny **M** do množiny **M'**, kde prvky obou množin nejsou geometrické útvary téhož druhu, dostaneme z příkladu 3 (obr. 4). Na přímce p za prvky zvolíme přímky a rovinu ϱ pokládejme jako dříve za množinu bodů. Sestrojení průsečíku P přímky p s rovinou ϱ je zobrazením jediného prvku přímky p do roviny ϱ.

Jestliže prvek x probíhá celou množinu **M**, mohou nastat právě dva případy: buď x' současně proběhne celou množinu **M'** nebo x' proběhne jen část **N'** množiny **M'** (přesněji řečeno *pravou* část **N'** množiny **M'**), kde $\mathbf{N'} \subset \mathbf{M'}$.

Nastane-li prvý případ, mluvíme o *zobrazení množiny* **M** *na množinu* **M'**. V druhém případě říkáme jako dosud, že **M** je zobrazeno *do* **M'**.

Hned je patrno, že platí jednoduché tvrzení. Existuje-li zobrazení f množiny **M** do množiny **M'**, pak vždy existuje $\mathbf{N'} \subseteqq \mathbf{M'}$ tak, že f je zobrazení **M** na **N'**.

Zavedené pojmy zobrazení *do* (množiny **M'**) a *na* (množinu **M'**) si ozřejmíme na našich příkladech. V 1a) příkladu je definováno zobrazení množiny $\mathbf{M} = \{A, B, C\}$ do množiny $\mathbf{M'} = \{P, Q\}$; z definice (obr. 2a) je zřejmé, že je to současně zobrazení **M** na množinu $\mathbf{N'} = \{P\}$. V 1b) příkladu dané zobrazení **M** do **M'** je současně zobrazením **M** na **M'**. V 2) příkladě je dáno zobrazení úsečky AB do úsečky CD; je to také zobrazení úsečky AB na úsečku $A'B'$ ($\mathbf{M} \equiv AB$, $\mathbf{M'} \equiv CD$, $\mathbf{N'} \equiv A'B'$). V 3) příkladu je dáno zobrazení přímky p do roviny ϱ; je to současně zobrazení přímky p na bod P ($\mathbf{M} \equiv p$, $\mathbf{M'} \equiv \varrho$, $\mathbf{N'} \equiv P$). Konečně ve 4) příkladě je dáno zobrazení roviny ϱ do roviny π, které je současně zobrazením roviny ϱ na rovinu π ($\mathbf{M} \equiv \varrho$, $\mathbf{N'} = \mathbf{M'} \equiv \pi$).

Při definici zobrazení **M** do **M'** bylo jen předepsáno, že každému prvku $x \in \mathbf{M}$ je přiřazen nějaký prvek $x' \in \mathbf{M'}$. Jiná podmínka pro zobrazení nebyla položena. Jestliže pro zobrazení připojíme dodatečnou podmínku, aby různým prvkům z **M** odpovídaly opět různé prvky v **M'**, pak takové zobrazení nazýváme *prosté*. Podrobněji řečeno, prosté zobrazení definujeme takto: *Nechť f je zobrazení* **M** *do* **M'**. *Zobrazení f se nazývá prosté, jestliže pro $x \in \mathbf{M}$, $y \in \mathbf{M}$ platí* $x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$.

V příkladu 1a) definované zobrazení není prosté, neboť na př. ačkoli $A \neq B$, jest $f(A) = f(B) = P$. Ani zobrazení v 1b) není prosté, neboť různým bodům $B \neq C$ je přiřazen týž bod Q množiny **M'**. Zobrazení úsečky AB do úsečky CD v 2. příkladu je však prosté, neboť, jak je známo z promítání, z podmínky $X \neq Y$ ($X \in AB$, $Y \in AB$) plyne $X' \neq Y'$ ($X' = f(X)$, $Y' = f(Y)$). V 3. příkladu zobrazení přímky p do roviny ϱ není prosté, neboť jsou-li X a Y jakékoli dva různé body přímky p, vždy jim je daným zobrazením přiřazen jediný bod P ($X \neq Y \Rightarrow f(X) = f(Y) = P$; $X \in p$, $Y \in p$). Konečně promítání roviny ϱ z bodu S na rovinu π je prosté zobrazení, neboť různé body roviny ϱ se promítají do různých bodů roviny π.

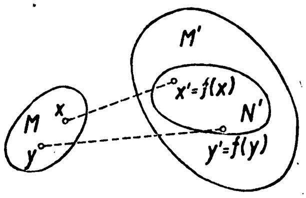
Zdůrazněme, není-li zobrazení prosté, pak existují v **M'** takové prvky x', že jsou obrazy více prvků z **M**; všechny tyto jsou vzory zvoleného $x' \in \mathbf{M'}$. Podle toho již snadno můžeme rozhodnout, zda dané zobrazení je či není prosté. Jestliže existuje v **M'** obraz x', k němuž náleží více vzorů, zobrazení není prosté.

V příkladu 1a) k obrazu P existují vzory A, B, C; v příkladu 1b) k obrazu Q existují vzory B, C; ve 3. příkladu k obrazu P existuje dokonce nekonečně mnoho vzorů (všechny body přímky p). Před tím jsme skutečně zjistili, že žádné z těchto zobrazení není prosté.

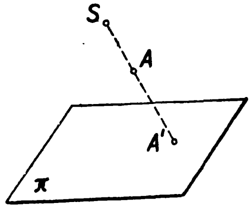
Předpokládejme, že je dáno prosté zobrazení f množiny **M** do množiny **M'**. Jak víme, vždy existuje $\mathbf{N'} \subseteqq \mathbf{M'}$ tak, že f je zobrazením **M** na **N'**. Zvolíme

$x' \in \mathbf{N}'$. Podle definice prostého zobrazení existuje právě jeden prvek $x \in \mathbf{M}$ tak, že $f(x) = x'$. To však znamená, že každému prvku $x' \in \mathbf{N}'$ je přiřazen právě jeden prvek $x \in \mathbf{M}$. Dostáváme tím zobrazení množiny $\mathbf{N}'$ na množinu $\mathbf{M}$. Je hned zřejmé, že je to prosté zobrazení $\mathbf{N}'$ na $\mathbf{M}$, neboť jestliže $x' = f(x)$, $y' = f(y)$, nemůže nikdy platit — jak plyne z definice zobrazení — $x' \neq y' \Rightarrow x = y$ (obr. 6). Tomuto novému zobrazení říkáme *inversní zobrazení* k zobrazení f (množiny $\mathbf{M}$ na $\mathbf{N}'$) a obvykle značíme f^{-1}, aby se vyznačila závislost na zobrazení f; je tedy $x = f^{-1}(x')$. Jestliže dané prosté zobrazení $\mathbf{M}$ na $\mathbf{N}'$ označíme jako korespondenci $\mathfrak{K}$, pak inversní zobrazení značíme $\mathfrak{K}^{-1}$, a tedy pro prvek x přiřazený prvku x' píšeme $x = \mathfrak{K}^{-1}x'$.

Vzhledem k tomu, že prosté zobrazení množiny $\mathbf{M}$ na množinu $\mathbf{M}'$ vede k inversnímu zobrazení $\mathbf{M}'$ na $\mathbf{M}$, při čemž obě zobrazení jsou jednoznačná (každému $x \in \mathbf{M}$ odpovídá právě jeden prvek $x' \in \mathbf{M}'$ a obráceně každému



Obr. 6.



Obr. 7.

$x' \in \mathbf{M}'$ odpovídá právě jeden prvek $x \in \mathbf{M}$), často místo o prostém zobrazení $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}'$ mluvíme o *vzájemně jednoznačném zobrazení* nebo také o *jednojednoznačném zobrazení* $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}'$ (a tedy také $\mathbf{M}'$ na $\mathbf{M}$). Stručně říkáme, že $\mathbf{M}$ a $\mathbf{M}'$ jsou na sebe zobrazeny jednojednoznačně.

Zobrazení v příkladech 1 a 3 nejsou prostá, proto jsou jednoznačná jen v jednom směru. V příkladě 2 zobrazení úsečky AB do úsečky CD je prosté; proto existuje množina $\mathbf{M}' \subseteq CD$ (v našem příkladu $\mathbf{M}' \equiv A'B'$) tak, že zobrazení úsečky AB a množiny $\mathbf{M}'$ je vzájemně jednoznačné. Podobně ve 4. příkladu roviny ϱ a π jsou užitím promítání ze středu S zobrazeny na sebe vzájemně jednoznačně.

Konečně alespoň poznámkou se ještě zmíníme o *skládání zobrazení*. Nechť je dáno zobrazení f množiny $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}'$ a zobrazení g množiny $\mathbf{M}'$ na $\mathbf{M}''$. Pak každému $x \in \mathbf{M}$ je přiřazen právě jeden prvek $x' \in \mathbf{M}'$ užitím zobrazení f a prvku $x' \in \mathbf{M}'$ užitím g opět právě jeden prvek $x'' \in \mathbf{M}''$. Tedy prvku $x \in \mathbf{M}$ je prostřednictvím zobrazení f a g přiřazen právě jeden prvek $x'' \in \mathbf{M}''$. Tím je definováno zobrazení $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}''$; označme je h. Říkáme, že zobrazení h vzniklo složením zobrazení f a g (v tomto pořádku). Protože $x' = f(x)$, $x'' = g(x') = g(f(x))$ a $x'' = h(x)$, jest $h(x) \equiv g(f(x))$.

Často je výhodnější místo o zobrazení mluvit o korespondenci. Je-li $\mathfrak{K}_1$ ($\mathfrak{K}_2$) prvá (druhá) korespondence zobrazující $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}'$ ($\mathbf{M}'$ na $\mathbf{M}''$) a jestliže výsledná korespondence vzniklá složením obou daných korespondencí je $\mathfrak{K}$ (zobrazující $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}''$), pak $x' = \mathfrak{K}_1 x$, $x'' = \mathfrak{K}_2 x' = \mathfrak{K}_2(\mathfrak{K}_1 x) = \mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_1 x$, $x'' = \mathfrak{K}x$. Odtud je zřejmé, že pro výslednou korespondenci $\mathfrak{K}$, vzniklou složením korespondencí $\mathfrak{K}_1$, $\mathfrak{K}_2$ v tomto pořádku, můžeme psát symbolicky $\mathfrak{K} = \mathfrak{K}_2\mathfrak{K}_1$.

Připomenutých základních pojmů užijeme nyní při studiu zobrazení v deskriptivní geometrii.

3. Lineární zobrazení

Nejprve si s našeho hlediska základů theorie zobrazení všimneme nejdůležitějšího zobrazení deskriptivní geometrie, středového promítání, které ve své podstatě jen geometricky popisuje proces vidění jedním okem a je tedy poměrně dost názorné. Pro jednoduchost geometrisaci uvedeme nejprve v projektivním prostoru **P**. Předpokládáme, že v **P** je dána base $[S, \pi]$ středového promítání, t. j. pevný bod S, střed promítání, a pevná rovina π, průmětna, která není incidentní s S (obr. 7). Středovým promítáním o basi $[S, \pi]$ v prostoru **P** rozumíme zobrazení, které je dáno sledem dvou geometrických operací v tomto pořadí 1) promítáním bodu $A \in \mathbf{P}$ $(A \neq S)$ z bodu S, t. j. sestrojením *promítací přímky* bodu A, 2) protínáním promítací přímky AS s průmětnou π, t. j. sestrojením *průmětu* A' bodu A. Protože obě použité operace jsou lineární, počítáme středové promítání mezi *lineární zobrazení*.

Jestliže za prvky prostoru **P** a průmětny π vezmeme body, pak středové promítání o basi $[S, \pi]$ definuje v **P** zobrazení množiny $\mathbf{M} = \mathbf{P} - S$ na množinu $\mathbf{M}' = \pi$, v němž bodu $A \in \mathbf{M}$ je přiřazen jeho průmět $A' \in \pi$; není to však, jak snadno nahlédneme, prosté zobrazení. Podobně, je-li **N** libovolný geometrický útvar ležící v **P** a neprocházející S, pak uvažujeme-li jej jako bodovou množinu $\mathbf{N} \subseteq \mathbf{M}$, středové promítání v **P** zobrazuje **N** do $\mathbf{M}' = \pi$.

Poznamenejme, že podle naší definice zobrazení musíme vždy střed promítání S ze zobrazení vyloučit. Říkáme, že S je *singulárním bodem* středového promítání. Pro něj totiž první z geometrických operací definujících středové promítání není jednoznačná; má dokonce nekonečně mnoho řešení. Jestliže tedy na př. mluvíme o tom, že průmětem promítací přímky je bod, pak je to jen stručné rčení pro tvrzení, že průmětem promítací přímky, z níž je vyňat střed promítání, je bod.

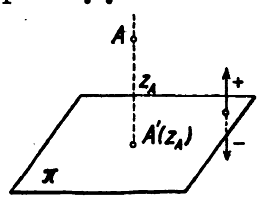
Při praktickém užití ovšem místo v projektivním prostoru **P** pracujeme v eukleidovském prostoru. V něm dostáváme dva druhy promítání 1) *středové promítání* (centrální projekci), 2) *rovnoběžné promítání* (paralelní projekci), které ještě s metrického hlediska dělíme na a) *pravoúhlé promítání* (orthogonální projekci) a b) *kosoúhlé promítání* (klinogonální projekci).

Jestliže, jako obyčejně, za prvky eukleidovského prostoru i průmětny vezmeme body, pak se snadno zjistí, že rovnoběžné promítání je zobrazení (které ovšem není prosté) prostoru na rovinu; rovněž středové promítání je zobrazení prostoru, z něhož je však vyňata středová rovina σ (t. j. rovina rovnoběžná s průmětnou a procházející středem promítání), na průmětnu. Pro žádný bod A $(A \neq S)$ středové roviny totiž druhá z operací, z nichž je složeno středové promítání, nemá řešení. Středová rovina je proto při středovém promítání v eukleidovském prostoru *singulární*. Promítáme-li tedy v eukleidovském prostoru při středovém promítání o basi $[S, \pi]$ libovolný geometrický útvar, pak z promítání musíme vyloučit všechny body, které má daný útvar společné se středovou rovinou σ.

Singularitu středové roviny (nikoli však singularitu středu promítání) můžeme odstranit rozšířením eukleidovského prostoru o nevlastní body. V rozšířeném eukleidovském prostoru volíme basi středového promítání $[S, \pi]$ tak, aby její elementy S, π byly vlastní. Jestliže nyní za prvky rozšířeného eukleidovského prostoru a průmětny vezmeme jak jejich vlastní tak i nevlastní body, pak středové promítání je zobrazením rozšířeného prostoru, z něhož je vyňat střed promítání, na průmětnu.

Pro praktické účely je vhodné zvýšit názornost středového promítání (v rozšířeném eukleidovském prostoru). Stačí kromě již užitých prvků procesu vidění vzít v úvahu ještě některé fysiologické podmínky, které při skutečném vidění jedním okem omezují schopnost sítnice oka vnímat obraz objektu. Především distance (vzdálenost S od π) musí být větší než je nejmenší zraková vzdálenost, která je asi 21—24 cm (aby vůbec oko mohlo vnímat průmět). Dále zobrazovaný útvar musí ležet v zorném poli, to znamená, musí ležet uvnitř rotačního kuželového poloprostoru protínajícího průmětnu a o vrcholu ve středu promítání, o ose v hlavní promítací přímce (jdoucí středem promítání kolmo k průmětně) a o vrcholovém úhlu asi 40°—50° (protože klidně se dívající oko pozoruje jen útvary ležící v tomto kuželovém poloprostoru).

I když vypracování zobrazovacích method k získání obrazů — zejména názorných — z daného vzoru je důležitým úkolem deskriptivní geometrie, přesto jejím hlavním úkolem je získat zobrazovací methody, které by umožnily z daného obrazu přečíst potřebné geometrické údaje o vzoru. Některé vlastnosti vzoru je ovšem možno uvést již z jeho jediného průmětu — z *monoprojekce*. Otázky s tím spojené nejsou však ještě zcela uspokojivě vyřešeny.



Obr. 8.

Promítání samo o sobě nemůže stačit k řešení základního úkolu deskriptivní geometrie; promítání není totiž vzájemně jednoznačné zobrazení. Abychom mohli udat všechny potřebné geometrické vlastnosti prostorového útvaru z jeho obrazu v rovině, musíme nutně užít prostého zobrazení. Uvedeme jenom některá nejdůležitější prostá zobrazení spojená s promítáním.

Nejjednodušší prosté zobrazení prostoru na rovinu dostaneme, jestliže k průmětu A' bodu A připojíme jeho orientovanou vzdálenost od průmětny, t. zv. *kótu* bodu A. Průmětna je hraniční rovinou pro dva poloprostory, z nichž jeden označíme za kladný, druhý za záporný. Kótou rozumíme vzdálenost bodu od průmětny, opatřenou znaménkem poloprostoru, v němž daný bod leží; bod v průmětně má ovšem nulovou kótu. Kótu připisujeme k označení průmětu; je-li daný bod A, jeho kóta z_A, průmět A', pak $A'(z_A)$ nazýváme *kótovaný průmět* bodu A. Přirozeně, promítání může být buď středové (pak ovšem musíme z prostoru vyjmout středovou rovinu) nebo rovnoběžné. Nejčastěji je užito pravoúhlého promítání (obr. 8); zobrazení se pak prostě nazývá *kótované promítání*. V některých technických oborech se ho velmi často užívá. Jeho výhodou je, že za základ má jen jedno pravoúhlé promítání, které po technické stránce lze velmi snadno ovládnout, a tedy při jeho užití nevznikají celkem žádné obtíže. Není však charakteristickou methodou deskriptivní geometrie, neboť s hlediska zobrazení kótované promítání je prosté zobrazení eukleidovského prostoru, jehož prvky jsou body, na množinu, jejíž prvky jsou uspořádané dvojice elementů: prvním elementem je bod průmětny (eukleidovské roviny), druhým elementem je reálné číslo. Schematicky můžeme psát

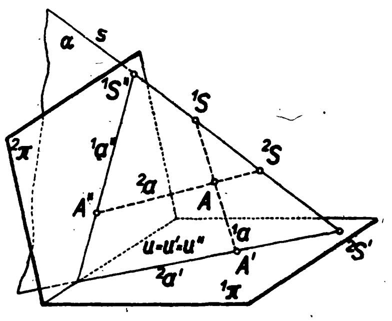
$$A \rightleftarrows (A', z_A) .$$

Obrazem bodu prostoru je tedy útvar, který nemá tak zcela ryze geometrický charakter, neboť obraz je složen z bodu a čísla.

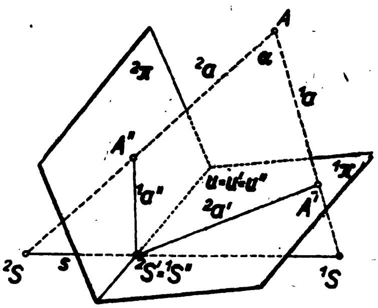
Základním principem jiné, mnohem důležitější skupiny prostých zobrazení prostoru do roviny je užití dvojího promítání. Aby lépe vynikly společné vlastnosti celé skupiny těchto zobrazení, budeme nejprve předpokládat, že zobrazujeme projektivní prostor **P**.

V **P** zvolíme dvě různá středová promítání, t. j. dvě base $[^1S, {}^1\pi]$ a $[^2S, {}^2\pi]$, při čemž učiníme zatím jediný předpoklad, že $^1S \neq {}^2S$ (protože v opačném případě bychom vlastně promítali opět jen z jediného středu promítání). Promítací přímku bodu A v promítání o prvé (druhé) basi označíme $^1a(^2a)$; průměty bodu A označíme $A'(A'')$ (obr. 9).

Z definice středového promítání bezprostředně sleduje, že každému bodu A $(\neq {}^1S, {}^2S)$ prostoru **P** při zvolené dvojí basi můžeme jako obraz přiřadit dvojici jeho průmětů A', A'' (kde $A' \in {}^1\pi$, $A'' \in {}^2\pi$). Je tedy středové promítání v **P** (o basích $[^1S, {}^1\pi]$, $[^2S, {}^2\pi]$, $^1S \neq {}^2S$) zobrazení množiny $\mathbf{M} = \mathbf{P} - {}^1S - {}^2S$, jejímiž prvky jsou body A, do množiny $\mathbf{M}' = {}^1\pi \cup {}^2\pi$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice (A', A'') bodů A', A'', kde $A' \in {}^1\pi$, $A'' \in {}^2\pi$.



Obr. 9.



Obr. 10.

Množinu $\mathbf{M}'$ jsme zavedli prozatím jen pro prvou hrubou informaci. Obraz (A', A'') bodu A vyhovuje totiž jisté nutné podmínce, takže množina $\mathbf{M}^{*\prime}$ všech obrazů bodů množiny **M** je pravou částí množiny $\mathbf{M}'$. Množinu $\mathbf{M}^{*\prime}$ najdeme snadno takto:

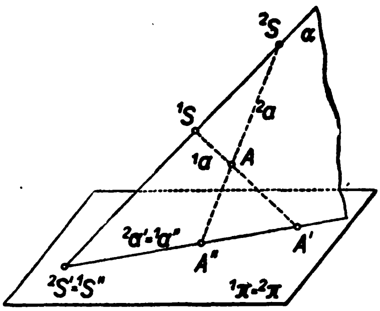
Podle umluveného označení průmět středu ^2S v basi $[^1S, {}^1\pi]$ je $^2S'$, podobně průmět středu ^1S v basi $[^2S, {}^2\pi]$ je $^1S''$. Průmětům $^2S', {}^1S''$ říkáme *uzlové body* průměten $^1\pi$, $^2\pi$.

Jestliže A $(\neq {}^1S, {}^2S)$ leží na přímce $s = {}^1S^2S$ (t. zv. *přímce středů* promítání), pak $A' = {}^2S'$, $A'' = {}^1S''$. V každém jiném případě body ^1S, ^2S, A určují právě jednu *dvojnásob promítací* rovinu α různou od průměten $^1\pi$, $^2\pi$, a rovina α protíná je tedy v přímkách $^2a' = (\alpha \,.\, {}^1\pi)$ a $^1a'' = (\alpha \,.\, {}^2\pi)$, z nichž prvá $^2a'$ (druhá $^1a''$) je průmětem promítací přímky ^2a (^1a) bodu A v prvé (druhé) basi. Přitom $^2a'$ $(^1a'')$ prochází prvým (druhým) uzlovým bodem $^2S'$ $(^1S'')$ a bod A' (A'') leží na $^2a'$ $(^1a'')$ a je různý od $^2S'$ $(^1S'')$. Přímkám $^2a'$, $^1a''$ říkáme odpovídající si *uzlové přímky* (prvá a druhá uzlová přímka). Z konstrukce uzlových přímek je patrno, že odpovídající si uzlové přímky a přímka středů určují právě jednu rovinu (α). Tím jsme však také našli množinu $\mathbf{M}^{*\prime} \subsetneqq \mathbf{M}'$ obrazů (A', A'') bodů A množiny $\mathbf{M} = \mathbf{P} - {}^1S - {}^2S$. Platí tedy:

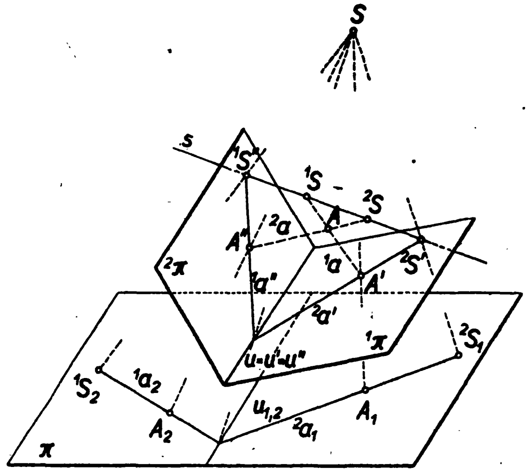
Dvojí středové promítání v **P** o basích $[^1S, {}^1\pi]$, $[^2S, {}^2\pi]$, $^1S \neq {}^2S$, je zobrazení množiny $\mathbf{M} = \mathbf{P} - {}^1S - {}^2S$, jejímiž prvky jsou body A, na množinu $\mathbf{M}^{*\prime} = {}^1\pi \cup {}^2\pi$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice (A', A'') bodů A', A'', kde buď $(A', A'') = (^2S', {}^1S'')$ nebo A' (A'') je bodem prvé (druhé) uzlové přímky $^2a'$ $(^1a'')$ dvojice odpovídajících si uzlových přímek.

Protože prvek $({}^2S', {}^1S'')$ je obrazem každého bodu $(\neq {}^1S, {}^2S)$ přímky středu s, není nalezené zobrazení prostým zobrazením $\mathbf{M}$ na $\mathbf{M}'^*$. Zřejmě však stačí z $\mathbf{M}$ vyloučit přímku s, abychom dostali prosté zobrazení. Tedy jako výsledek najdeme:

V projektivním prostoru $\mathbf{P}$ *dvojí středové promítání o basích* $[{}^1S, {}^1\pi]$, $[{}^2S, {}^2\pi]$, ${}^1S \neq {}^2S$, *je prosté zobrazení množiny* $\mathbf{N} = \mathbf{P} - s$, *jejímiž prvky jsou body* A, *na množinu* $\mathbf{N}' = {}^1\pi \cup {}^2\pi - {}^1S'' - {}^2S'$, *jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice* (A', A'') *bodů* A', A'', *kde* A' (A'') *je bod (různý od uzlu) prvé (druhé) uzlové přímky dvojice odpovídajících si uzlových přímek.*



Obr. 11.



Obr. 12.

Přímka s středu promítání je v našem dvojím středovém promítání *singulární* přímkou prostoru $\mathbf{P}$. Pro její body ${}^1S$, ${}^2S$ neexistuje totiž obraz; pro ostatní body přímky s sice existuje obraz, který je však pro všechny společný, a tedy pro ně je narušena vzájemná jednoznačnost zobrazení.

Přihlédneme-li k vzájemné poloze průměten a uzlů, mohou nastat jen tři případy. a) Obě průmětny i uzly jsou různé (obr. 9), b) obě průmětny jsou různé, uzly splývají (obr. 10), c) obě průmětny (i uzly) splývají (obr. 11). V případech a), b) odpovídající si uzlové přímky se protínají na průsečnici u průměten, v případě c) odpovídající si uzlové přímky splývají.

Dvojí promítání v $\mathbf{P}$ vede sice k prostému zobrazení, ale jen ve speciálním případě c) vyhovuje základnímu požadavku, aby prostor byl zobrazen na rovinu. Abychom oba průměty A', A'' bodu A převedli do téže roviny, promítneme roviny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ z libovolného dalšího středu promítání do nové průmětny, ovšem tak, aby roviny ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ se nepromítaly do přímek. Zvolíme tedy novou basi $[S, \pi]$ tak, aby S neležel v rovinách ${}^1\pi$, ${}^2\pi$. Obrazy bodů roviny ${}^1\pi$ $({}^2\pi)$ v průmětně π označíme indexem 1 (2) místo dřívějšího indexu čárky (dvou čárek).

Při novém promítání uzly ${}^2S'$, ${}^1S''$ průměten ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ se promítnou do uzlových bodů ${}^2S_1$, ${}^1S_2$ roviny π, uzlové přímky ${}^2a'$, ${}^1a''$ do uzlových přímek ${}^2a_1$, ${}^1a_2$ a body A', A'' do bodů A_1, A_2 (obr. 12).

Promítání o basi $[S, \pi]$ definuje prosté zobrazení množiny $\mathbf{N} = {}^1\pi \cup {}^2\pi$, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice (A', A'') bodů $A' \in {}^1\pi$, $A'' \in {}^2\pi$, na množinu π, jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice (A_1, A_2) bodů A_1, A_2 roviny π. Je tedy také prostým zobrazením každé pravé části množiny dvojic (A', A'') na jistou pravou část množiny π dvojic (A_1, A_2). Protože skládáním prostých zobrazení dostaneme opět prosté zobrazení, můžeme jako výsledek vyslovit tvrzení:

Nechť v projektivním prostoru $\mathbf{P}$ *je dáno trojí promítání o basích* $[{}^1S, {}^1\pi]$, $[{}^2S, {}^2\pi]$, $[S, \pi]$, $({}^1S \neq {}^2S; S \text{ non} \in {}^1\pi \cup {}^2\pi)$. *Zobrazení definované operacemi v tomto pořadí* 1) *dvojím promítáním o basích* $[{}^1S, {}^1\pi)$, $[{}^2S, {}^2\pi]$, 2) *promítáním rovin* ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ *v promítání o basi* $[S, \pi]$ *je prosté zobrazení množiny* $\mathbf{N} = \mathbf{P} - s$, *jejímiž prvky jsou body* A, *na množinu* $\mathbf{N}^* = \pi - {}^1S_2 - {}^2S_1$, *jejímiž prvky jsou uspořádané dvojice* (A_1, A_2) *bodů* A_1, A_2 *roviny* π, *kde* A_1 (A_2) *je bod, různý od uzlů roviny* π, *ležící na prvé (druhé) uzlové přímce dvojice odpovídajících si uzlových přímek roviny* π.

Jestliže předpokládáme, že dvojí promítání o basích $[{}^1S, {}^1\pi]$, $[{}^2S, {}^2\pi]$ vedlo k případu a), t. j. k případu, kdy průmětny i uzly byly různé, pak uzlové body průmětny π (které nemusí být nutně různé) neleží na průmětu $u_{1,2}$ průsečnice $u = {}^1\pi \,.\, {}^2\pi$ a odpovídající si uzlové přímky průmětny π mají společný bod na $u_{1,2}$, ale samy nemusí být nutně různé (obr. 12).

Jestliže ${}^1\pi = {}^2\pi$, pak zřejmě nezáleží na volbě base $[S, \pi]$ a můžeme tedy vždy předpokládat, že $\pi = {}^1\pi = {}^2\pi$ a že bod S je zvolen zcela libovolně.

Sestrojené prosté zobrazení prostoru na rovinu v podstatě dává dva obrazy A_1, A_2 průmětů A', A'' bodu A prostoru, proto se nazývá *dvojobrazové zobrazení*. Basím $[{}^1S, {}^1\pi]$, $[{}^2S, {}^2\pi]$ říkáme *pomocné base*, středům ${}^1S$, ${}^2S$ *pomocné středy*, průmětnám ${}^1\pi$, ${}^2\pi$ *pomocné průmětny*, středu S *hlavní střed* a průmětně π *hlavní průmětna* nebo *nákresna*. Bod A_1 (A_2) se nazývá *prvý* (*druhý*) *obraz* bodu A, dvojice (A_1, A_2) *dvojice sdružených obrazů* bodu A; podobně odpovídajícím si uzlovým přímkám v nákresně často říkáme *sdružené uzlové přímky*. Jsou-li pomocné průmětny různé, pak průmětu jejich průsečnice říkáme *základnice*.

Pro lepší přehled vyslovíme alespoň pro případ a) (kdy průmětny i uzly jsou různé; obr. 9 a obr. 12) nutnou i postačující podmínku pro sdružené obrazy A_1, A_2 bodu A prostoru $\mathbf{P}$ (z něhož je vyňata přímka středu s) užitím právě zavedených pojmů.

V dvojobrazovém zobrazení, v němž pomocné průmětny i jejich uzly jsou různé, sdružené obrazy A_1, A_2 *bodu* A *(neležícího na přímce* s *středů) leží na sdružených uzlových přímkách a jsou různé od uzlů. Sdružené uzlové přímky mají společný bod na základnici.*

(Dokončení.)