

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

E Chvojková
Hydromagnetické vlny plasmatu

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 5, 563--573

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137378>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1960

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

ASTRONOMIE

HYDROMAGNETICKÉ VLNY PLASMATU

E. CHVOJKOVÁ, *Astronomický ústav ČSAV, Praha*

Článek je třetí částí cyklu článků o magnetohydrodynamice. J. Kleczek podal v úvodní části (J. Kleczek, Hydromagnetika v kosmickém měřítku, tento časopis, V (1960), č. 3) souborný přehled hlavních problémů hydromagnetiky. A. Hruška shrnul v druhé části (A. Hruška, Rovnice magnetohydrodynamiky plasmatu, tento časopis, V (1960), č. 3) přehledně základní rovnice rovnovážného stavu plasmatu, a to hlavně s ohledem na srážky částic a na vliv elektrického a magnetického pole na pohyb plasmatu. Cyklus článků je uzavřen tímto třetím článkem, v němž jde o plasma, jehož rovnováha je vnějším činitelem porušena, takže se celé plasma rozkmitá oscilacemi různých druhů.

1. Úvod

V prvních dvou částech tohoto cyklu se autoři zabývali plasmatem, jež bylo v rovnováze. Buď šlo o statickou rovnováhu a plasma bylo v klidu vůbec, nebo o stacionární proudění, jež se s časem měnilo velmi pomalu. Protože jde o dobře vodivé prostředí, nemohou vznikat žádné větší rozdíly v náboji. Jakmile by se někde vytvořil větší přebytek jednoho druhu náboje, ihned by se v plasmatu musel rozplynout. Vyrovnání nábojů by nastalo takovou rychlostí, že ho v období zkoumání nějakého proudění můžeme spolehlivě zanedbat. Proto jsme také v předešlých kapitolách časovou změnu elektrického pole $\partial \mathbf{E} / \partial t$ obvykle zanedbali. Pokud budeme zkoumat elektromagnetické vlny plasmatu, nebude však již možné tento člen zanedbat a budeme musít vycházet z úplných, neredukovaných Maxwellových rovnic, jak ukazují další rovnice (11)–(16). Pro elektrostatické, elektromagnetické nebo hydromagnetické vlny jsou právě členy $\partial \mathbf{E} / \partial t$ a $\partial \mathbf{H} / \partial t$ charakteristické, neboť změna elektrického pole vyvolá magnetické pole, jehož změna způsobí, že se vytvoří elektrické pole opačného směru, nežli bylo původní pole. Ionty a především lehké elektrony plasmatu se v rytmu elektrického pole rozkmitají, a pokud nejsou kmity příliš rychlé, můžeme je někdy již pokládat za makroskopické rozkmitání celého plasmatu. Jakékoli slabé porušení rovnovážného stavu způsobuje, že se plasma slabě rozkmitá. Jedním příkladem takového rozkmitání jsou hydromagnetické vlny, jak je v první části tohoto cyklu popsal Dr. Kleczek. Jiným zcela elementárním příkladem by byly elektrostatické vlny, jež vznikají tím, že rychlost elektronů je větší než rychlost iontů. Mysleme si plasma mezi dvěma obrovskými deskami kondensátoru nabitými na značný potenciál. Elektrony budou blíže kladnému pólu kondensátoru, těžké ionty budou blíže k záporné elektrodě. Pokud bude na kondensátoru udržováno stálé napětí, ustálí se zmíněná polarisace náboje. Plasma bude v rovnováze. Elektrické pole z kondensátoru bude

právě kompensováno elektrickým polem coulombovským (tzv. polarisačním polem), vyvolaným právě proto, že je v plasmatu na jedné straně více kladných, na druhé straně více záporných částic. „Vybijeme-li“ náš makroskopický kondensátor, jeho elektrické pole zmizí a zůstane pouze pole polarisační. V prvé fázi nastane jednoduché proudění elektronů a iontů proti sobě, až se vytvoří tzv. kvasineutrální plasma, tj. plasma, v jehož každé jednotce objemu je stejný počet kladných a záporných částic. Protože plasma, složené převážně z nabitých částic, je právě tak dobrým vodičem jako nejlepší kovy, nastane vyrovnání náboje téměř okamžitě, jak jsme se zmínili na začátku této části. Pokud byl kondensátor nabit na velmi vysoký potenciál, takže na záporné elektrodě bylo nahromaděno velké množství těžkých, kladných iontů, pak nastává po vyrovnání náboje ještě druhá fáze daného procesu: vznikají ještě elektrické oscilace elektronového a iontového plynu, jež si můžeme vysvětlit asi takto: Při vyrovnání polarisovaného plasmatu na kvasineutrální se elektrony pohybovaly rychlostí asi 200krát větší než ionty kyslíku nebo dusíku. Elektrony proto přešly od kladné elektrody k záporné podstatně rychleji, nežli ionty od záporné ke kladné. Tak se stalo, že i po vyrovnání náboje stále ještě zbyl při záporné elektrodě značný přebytek iontů, jež byly elektrony z druhého pólu kondensátoru pouze elektricky neutralisovány. V okamžiku neutralisace je tedy na záporné straně velká hustota iontů a elektronů, zatím co u kladné elektrody zůstaly nejdříve neutrální částice. Pro jednoduchost si myslíme, že hranice mezi ionisovaným a neionisovaným plynem je v prvním okamžiku zcela ostrá a že tlak je v obou oblastech vyrovnán. V tom okamžiku elektrony, vlivem menší hmoty a větší rychlosti, přejdou do neionisované oblasti, a to mnohem dále, než ionty. Vznikne nová polarisace náboje, jež způsobí, že se čelo elektronů zastaví a vlivem coulombovského přitahování se elektrony vracejí zpět, zatím co se čelo kladných iontů o něco urychlí. Tomuto procesu říkáme ambipolární difuze, jež je charakterisovaná právě tím, že do méně ionisované oblasti difunduje ionisovaný plyn o něco rychleji, než by difundovaly dva zcela neionisované plyny; při tom před čelem difundujícího ionisovaného plynu, který je jinak kvasineutrální, je úzký pruh záporný, v němž elektrony kmitají skrz čelo difundujících iontů.

Kmity plasmatu, obzvlášť kmity vyvolané nahodilými poruchami v pohybu plasmatu, jsou procesy velmi složité, doprovázené ještě řadou jiných zjevů (např. turbulencí), jež někdy velmi komplikují řešení daného problému; někdy zkoumaný proces po krátké době zcela potlačí a vyvolají zjev nový. Proto i popsany příklad elektrostatických oscilací, který probíhá složitěji, je třeba si představit jen jako názornou ukázkou toho, že prakticky každá změna v rovnovážném stavu (zkoumaném v předešlých člancích) nutně vede k oscilacím uvnitř plasmatu, popř. oscilacím celého plasmatu.

Pro velkou obsáhlost daného problému bude v tomto článku podán jen velmi stručný nástin nejdůležitějších druhů oscilací plasmatu. Bude však třeba alespoň stručně popsat vztah elektromagnetických vln k vlastním oscilacím plasmatu. Při tom se nevyhneme základům teorie elektromagnetických vln, jež značnou část čtenářů nebude zajímat a jež zas naopak bude velké části čtenářů-radioamatérů zcela samozřejmá. Proto si celou problematiku rozdělíme na dvě části. Na část popisnou, v níž fyzikálně popíšeme různé druhy oscilací plasmatu, aniž bychom používali rovnic. Pokud by bylo vhodné čtenáře upozornit, jakým způsobem lze popsany procesy odvodit, pak napíšeme v textu této popisné části jen odkaz na příslušnou rovnici z druhé, teoretické části,

v níž podáme heslovitý přehled teorie elektromagnetického pole. V této teoretické části bude vždy krátce naznačeno, jakým způsobem lze různé rovnice odvodit z předešlých, jaký mají fyzikální smysl a jak je třeba je interpretovat, chceme-li z nich vyčíst fyzikální zákonitosti, popsané v části popisné.

V první, popisné části se budeme zabývat různými typy elektromagnetických vln, k nimž patří i vlny hydromagnetické. V druhé části popsané procesy teoreticky zdůvodníme.

2. Plasma a různé typy elektromagnetických vln

Názvem plasma označujeme prostor, v němž na sebe vzájemně působí jak nabitě a neutrální částice, tak i elektromagnetická pole nejrozličnějších typů. Plasmatem v užším slova smyslu bývá obvykle označován ionizovaný plyn, popř. záření tímto plynem vyvolané.

Elektromagnetické vlny všech frekvencí mají vliv na stav plazmatu. Záření gama, jež má nejkratší vlnovou délku, avšak největší kmitočet a tím i největší energii, vzniká obvykle při přechodu gravitační hmoty v elektromagnetické záření. Způsobuje změny v atomovém jádře a tím i ve vlastní podstatě plazmatu; makroskopický pohyb plazmatu však nevyvolává, nebo aspoň jej vyvolává nepřímo. Stejně je tomu i s roentgenovými, ultrafialovými, viditelnými, ev. infračervenými paprsky, jež jsou spjaty se změnami vnitřních, vnějších, popř. volných elektronů, aniž by jejich působení vyvolalo soustavné oscilace celého plazmatu nebo aspoň jeho částic.

Teprve elektromagnetické vlny rádiových kmitočtů rozkmitají plasma. Vlny o vysoké frekvenci rozkmitají elektrony, vlny s menší frekvencí se již projevují jako makroskopické kmity plazmatu. Oba druhy se od sebe fyzikálně zdánlivě velmi liší, teoreticky je však můžeme pokládat za totéž elektromagnetické pole, jen frekvence, povaha plazmatu a magnetické pole vstupující do rovnic dávají každému typu specifický ráz.

Celkem existuje řada typů oscilací plazmatu, jejichž původ je elektrický. Buď jde o ryze elektrostatické vlny, jež zdánlivě vůbec nemají vztah k magnetickému poli. Nastane-li někde např. polarisace náboje podobného rázu, jak jsme právě ukázali, elektrony i ionty se rozkmitají svou vlastní frekvencí ω_p , jež při dostatečně malých teplotách plazmatu je dána rovnicí (28). Plasma se rozkmitá prakticky všude, kde rychlost proudění kladných a záporných částic se od sebe natolik liší, že musí vzniknout místní polarisace nábojů; rychlejší částice se pak vracejí a tím je dán první impuls k rychlým oscilacím. Při těchto nejjednodušších oscilacích musíme rozlišovat dva druhy kmitání, a to oscilace elektronového plazmatu, jejichž frekvence je o dva řády vyšší než při oscilacích iontů, a iontové oscilace, jež můžeme obvykle již pokládat za oscilace celého plazmatu a jež se šíří podobně jako akustické vlny.

Zkoumáme-li elektronové kmity, pak pokládáme makroskopický pohyb (tj. pohyb iontů) v průměru rovný nule. Pak vychází pro dostatečně nízkou teplotu jediná frekvence ω_p , jež platí podle (28) nezávisle na impulsu, který ji vyvolal.

Chceme-li zjišťovat zákonitosti iontových oscilací, pak můžeme předpokládat dokonalou kvasineutralitu plazmatu, neboť pohyb elektronů je vůči pohybu iontů tak rychlý, že můžeme předpokládat rovnoměrné rozložení elektronů v celém plazmatu. Rychlost iontových vln prakticky nepřekračuje rychlost zvuku. Je to právě při nárazových vlnách nebo při prudkém gradientu

nadzvukových rychlostí, kde se obojí druh elektrostatických oscilací snadno vytváří. Význam elektrostatických oscilací plasmatu se sice zdá důležitým k vysvětlení řady zjevů v plasmatu, jejich průzkum je však dosud velmi nedostatečný a to patrně již proto, že každá elektrostatická oscilace obvykle velmi rychle přejde v některý druh elektromagnetických oscilací a těžko se od něho izoluje.

Všechna ostatní vlnění plasmatu, v nichž má úlohu elektrické pole, můžeme zahrnout pod společný název elektromagnetických vln. Každý jednotlivý rozkmitaný elektron nebo iont již můžeme pokládat za zdroj elektromagnetického vlnění. Zase musíme rozlišovat rychlé oscilace elektronů, vůči nimž jsou oscilace iontů zanedbatelné, a na druhé straně pomalu se šířící iontové oscilace, jež se od akustických vln podstatně liší jen pokud existuje vnější magnetické pole. Třetí zvláštní zmínku si zaslouží i elektronové šíření vln akustických frekvencí ve směru magnetického pole rychlostí řádově srovnatelnou s rychlostí světla. Vlastními hydromagnetickými vlnami jsou tedy především iontové vlny, jež jsou nesený všemi ionty a tím se mohou projevit jako makroskopický pohyb celého plasmatu.

Přesto bude vhodné, začneme-li elektromagnetickými oscilacemi elektronového plasmatu.

Mysleme si vysilač o kmitočtu 10^7 Hz (10 MHz), který během 10^{-7} sec vyšle jeden kmit. V plasmatu vyvolá poruchu, která se šíří ve směru od vysilače. V neionizovaném plynu se šíří rychlostí světla. Jakmile však přejde do styku s plasmatem, elektrický vektor rozkmitá nabitě částice. Každý elektron a každý ion, který pohltí jeden foton vyslané vlny, se rozkmitne v rytmu dopadnuvšího kmity, tím danou vlnu znovu vyzáří jako elektromagnetickou vlnu téměř totožnou s původní, a ta zas rozkmitá další elektrony. Mnohem lehčí a tím i pohyblivější elektrony se rozkmitají s podstatně větší amplitudou, takže jsou prakticky nositeli celého přenosu elektromagnetických vln. Interakce mezi rozkmitanými elektrony a procházejícím zbytkem elektromagnetického pole způsobí, že se fázová rychlost elektromagnetické vlny poněkud zvýší nad rychlost světla (vlnová délka se prodlouží), čelo vlny se však o něco zpomalí proti rychlosti světla. K lepšímu vyjádření stavu elektromagnetické vlny v plasmatu zavádíme index lomu [viz (21) a (27)], jenž je jednoduchou funkcí frekvence procházející vlny a charakteristických vlastností plasmatu (hustoty, hmoty a náboje elektronu, popř. magnetického pole). Tento index lomu n jednoznačně definuje nejen fázovou rychlost vlny v plasmatu, (20), nýbrž i dráhu, po níž se vlna bude šířit. Čím větší bude hustota elektronů, tím více se vlna láme od kolmice, až po případě nastane odraz. Elektromagnetický rozruch, postupně rozkmitávající vždy další a další elektrony, se šíří rychlostí blízkou rychlostí světla. Z rovnice (27) však vidíme, že rozkmitání elektronového plasmatu má jisté meze. Předpokládejme, že neexistuje žádné vnější magnetické pole. Pak je $\omega_c = 0$, a pro frekvenci menší než je plasmatická frekvence ω_p se index lomu stává imaginárním. Imaginární hodnota n , však ukazuje, že exponent v (21) má člen s x reálný; to znamená, že se vlnění elektronového plasmatu sinusově mění již jen s časem (imaginární exponent), zatím co ve směru x amplituda vlnění exponenciálně klesá k nule. Jakmile elektronová hustota plasmatu stoupne tak vysoko, že jeho vlastní elektrostatické oscilace jsou vyšší než je frekvence šířícího se elektromagnetického rozruchu, pak se rozruch okamžitě utlumí. Pokud neexistuje vnější magnetické pole, není možné, aby se elektromagnetický rozruch šířil s frekven-

cí menší, než je elektrostatická frekvence plazmatu ω_p , (28). Jakýkoli podobný rozruch by se v zárodku utlumil.

Jinak je tomu však v přítomnosti vnějšího magnetického pole. Pak gyrofrekvence elektronů ω_{ce} již nebude rovna nule a index lomu (27) může být reálný i při frekvencích hluboko pod ω_p . Z Appletonovy magneto-iontové teorie plyne, že ve směru magnetických siločar se mohou šířit elektromagnetické poruchy velmi nízkých frekvencí, i pod cyklotronovou frekvencí ω_{ce} . Tím lze např. vysvětlit šíření vln akustických frekvencí z blesku od jedné polokoule zemské na druhou podél magnetických siločar. Známe je pod názvem „hvizdy“ (*whistlers*).

Totéž platí i o iontech. Elektromagnetické oscilace iontů o vysoké frekvenci nemají však zatím prakticky velký význam. V poslední době je spíše věnována velká pozornost iontovým oscilacím o velmi nízké frekvenci. Bude-li frekvence iontových kmitů podstatně menší než jsou gyrofrequence ω_{ce} i ω_{ci}

a pokud bude $\frac{H^2}{4\pi q_m} \ll c^2$, pak přejde rovnice pro index lomu (27) do (29) a (30). Z (30) plyne, že pomalé iontové oscilace se šíří plazmatem rychlostí, jež závisí jen na velikosti magnetického pole a na hustotě plazmatu. Je tu jistá obdoba s vlastními elektrostatickými oscilacemi ω_p . Každé hustotě elektronů nebo iontů odpovídá jedna jediná frekvence, kterou kmitají. V daném magnetickém poli H_0 každé hustotě plynu odpovídá jedna jediná rychlost, jakou se porucha plazmatem šíří.

Podrobnější analýsa, která přesahuje rámec tohoto článku, ukazuje, že se pomalé iontové oscilace šíří fázovou rychlostí (30) jen ve směru magnetických siločar a to jen jako vlny příčné. Vedle příčných elektromagnetických vln se ve směru magnetických siločar ještě šíří podélné kmity rázu akustických vln jež se šíří rychlostí zvuku. Rovněž ve směru kolmém k magnetickým siločarám se porucha šíří podobnou zákonitostí jako zvuk. Ve směru kolmém k H i k elektrickému vektoru vlny E vyvolává každý makroskopický kmit plazmatu zhuštění a zředění, jež se šíří podobně jako zvuk, a to podle vztahu (31) kolmo k H_0 i k E .

Zatím jsme vycházeli jen ze zákonitostí elektromagnetických vln, vyvolaných v plazmatu menší poruchou vnějšího původu, aniž jsme si všimli pohybu samého. Nyní věnujeme pozornost pohybu částic a tím i pohybu celého plazmatu.

Budeme-li předpokládat, že je plasma složeno jen z elektronů a kladných iontů, poznáme, že elektronové oscilace ani rychlé iontové oscilace se příliš neprojeví v celkovém pohybu plazmatu. Makroskopické šíření malé poruchy nastane až u pomalých iontových vln, šířících se rychlostí (30) podél magnetických siločar. Protože magnetické pole tu vyvolává makroskopický pohyb plazmatu podél siločáry, nazývají se tyto vlny hydromagnetickými. Jejich objevitel Alfvén je znázorňuje jako pružné trubice, představující magnetické siločáry, jež jsou nabitы plazmatem. Trubice se mohou natahovat, smršťovat nebo rozkmitat. Po dosažení rovnováhy jsou však všechny částice zas v téže trubici a v téměř seskupení.

Jak vznikají hydromagnetické vlny, bylo popsáno již v první části této série článků o hydromagnetice. Proto se o jejich mechanismu zmíníme jen stručně:

Budiž magnetické pole H_0 směrem vzhůru a posuňme část plazmatu směrem za papír. Podle (1) vznikne elektrické pole E , směřující doprava, jež způsobí

proud \mathbf{j} , směřující rovněž doprava. Elektrický proud \mathbf{j} v magnetickém poli \mathbf{H}_0 však působí na každou objemovou jednotku silou \mathbf{f}_1 , směřující dopředu. Tato síla působí proti původnímu pohybu, který poruchu vyvolal. Část plasmatu, pohybující se původně dozadu, se zastaví, dosud klidné části plasmatu nad a pod porušenou oblastí se však již urychlí směrem dopředu. Pohyb dopředu vzbudí elektrické pole \mathbf{E} a proud \mathbf{j} doleva, jež posunou další oblast plasmatu dozadu atd. Tak původní pohyb dozadu způsobil, že se porucha začala šířit podél siločáry na obě strany a to tak, že elektrický vektor kmital střídavě doprava a doleva, zatím co makroskopický pohyb v celém plasmatu byl střídavě dopředu a dozadu. Šíření takovéto poruchy je jen ve směru magnetické siločáry. Ve směru kolmém nastává zhuštění částic, jež se může šířit ve směru \mathbf{E} nejvýše jako vlny akustické: Proud \mathbf{j} je jen krátkodobý, trvá jen po dobu, než vyvolá opačný pohyb. Pak se vrací. Vrací se přes novou oblast; do ní však přejde ve směru \mathbf{H}_0 , což nevyvolává žádné síly. Hydromagnetické vlny se tudíž šíří jen ve směru magnetických siločar nebo ve směru \mathbf{v} podle (31). Jiné šíření bývá akustického rázu, i když je vyvoláno elektromagnetickou příčinou.

3. Přehled teorie vln v plasmatu

Zopakujeme nejzákladnější vztahy, definující pohyb plasmatu v magnetickém poli \mathbf{H} . (Všechny rovnice této kapitoly budou v elektrostatických jednotkách.)

Elektrické pole vyvolané rychlostí \mathbf{v} je

$$(1) \quad \mathbf{E} = \frac{\mu}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}.$$

Hustota proudu způsobeného polem \mathbf{E} nebo rychlostí \mathbf{v}

$$(2) \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E} = Ne\mathbf{v},$$

kde vodivost ve směru \mathbf{H} je

$$(3) \quad \sigma_{||} = \frac{Ne^2\tau}{m_e} = \frac{Ne^2}{m\nu},$$

vodivost ve směru kolmém k \mathbf{H} je

$$(4) \quad \sigma_{\perp} = \sigma_{||} : (1 + \omega_{ce}^2\tau^2)$$

a ve směru kolmém k \mathbf{H} i k výslednici sil (Hallův proud)

$$(5) \quad \sigma_H = \sigma_{\perp} \omega_{ce} \tau.$$

Síla objemové jednotky proudu

$$(6) \quad \mathbf{f}_1 = \frac{\mu}{c} \mathbf{j} \times \mathbf{H}.$$

Elektromagnetická energie objemové jednotky (tlak) =

$$(7) \quad = \frac{\mu H^2}{8\pi} + \frac{\varepsilon E^2}{8\pi}.$$

Gyrofrekvence (též Larmorova nebo cyklotronová frekvence) =

$$(8) \quad = \omega_c = \frac{eH}{mc}.$$

Rychlost proudu ve stacionárním stavu

$$\mathbf{v} = -\frac{c}{H^2} \mathbf{H} \times \mathbf{E}.$$

Přechodný Hallův proud (kolmý k \mathbf{H} i k \mathbf{E})

$$(10) \quad \mathbf{j}_H = \frac{\sigma_H}{H} \left\{ \mathbf{H} \times \left[\mathbf{E} + \frac{1}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H} \right] \right\}.$$

Pohybem částic do míst s vyšší intenzitou magnetického pole \mathbf{H} se nejen zvýší jejich gyrofrekvence (nejen poloměr spirální dráhy částic se zmenší); také směr pohybu středu spirály se změní a to tak, že se ve směru magnetického pole pohyb zpomaluje, až při určité hodnotě H nastane odraz a částice se po spirální dráze zas vrací zpět (magnetické zrcadlo).

Tento úvodní souhrn nejdůležitějších vztahů byl nutný k tomu, aby teoretická část mohla být co nejstručnější, aby však při tom podala co nejúplnější přehled hlavních teoretických zásad, na nichž je založeno vlnění plazmatu. Odvozování různých vzorců se ještě velmi zjednoduší, zavedeme-li operátor (nabla)

$$\nabla = \mathbf{i} \frac{\partial}{\partial x} + \mathbf{j} \frac{\partial}{\partial y} + \mathbf{k} \frac{\partial}{\partial z}, \quad \left(\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right),$$

s nímž se počítá jako s jakýmkoli vektorem.

∇a = grad a uvádí směr a velikost maximálního růstu skaláru a .
 $\nabla \mathbf{a}$ = div \mathbf{a} je výtok vektoru \mathbf{a} z jednotkového objemu.
 $\nabla \times \mathbf{a}$ = rot \mathbf{a} odpovídá práci silového pole \mathbf{a} při oběhu kol jednotkové plochy.
 $\mathbf{a} \nabla \cdot \mathbf{b}$ = (\mathbf{a} grad) \mathbf{b} (vektorgradient) je změna vektoru \mathbf{b} podél vektoru \mathbf{a} .

Symbolem $\rho \equiv \rho_{el} = (N_+ - N_-) e \doteq 0$ bude míněna elektrická hustota, zatímco hustota v gramech bude značena ρ_m . e nebo e^2 bude vždy vyjadřovat náboj elektronu, kdežto základ přirozených logaritmů bude mít v exponentu vždy obecnou funkci. ω_{ce} a ω_{ci} jsou cyklotronové frekvence elektronů a iontů. V a P značí objem a plochu, m hmotu částice a n index lomu vlny. ω je frekvence poruchy, jež se šíří, ν frekvence srážek, τ doba mezi dvěma srážkami, \mathbf{v} rychlost plazmatu.

Po tomto úvodu přejdeme k odvození zákonitostí vlnění: Je třeba vyjít z úplných Maxwellových rovnic

$$(11) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0,$$

$$(12) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \frac{1}{c} \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} - \frac{4\pi}{c} \mathbf{j} = 0,$$

$$(13) \quad \nabla \mathbf{j} = - \frac{\partial \rho}{\partial t}, \quad (\text{rovnice kontinuity}),$$

$$(14) \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}, \quad \mathbf{D} = \varepsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{j} = \sigma \mathbf{E},$$

$$(15) \quad \nabla \cdot \mathbf{H} = 0,$$

$$(16) \quad \nabla \mathbf{E} = 4\pi \rho \doteq 0.$$

Obvykle pokládáme za základní Maxwellovy rovnice (11), (12), (15) a (16). Ve skutečnosti stačí rovnice (11)–(13), neboť násobíme-li rovnici (11) nebo (12) skalárně operátorem nabla a dosadíme-li za $\nabla \cdot \mathbf{j}$ z rovnice (13), vyjde (15) a (16).

Abychom z (11) a (12) vyloučili \mathbf{E} nebo \mathbf{H} , násobíme jednu z nich vektorově operátorem nabla, druhou derivujeme podle času, a sloučíme; dostaneme (s přihlédnutím k (15) a (16)) tzv. vlnovou rovnici

$$(17) \quad \nabla^2 \mathbf{E} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} - \frac{4\pi \mu}{c^2} \frac{\partial \mathbf{j}}{\partial t} = 0 \quad \text{a} \quad \nabla^2 \mathbf{H} - \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2} + \frac{4\pi}{c} \nabla \times \mathbf{j} = 0,$$

jež ve vakuu ($\mathbf{j} = 0$) přejde ve známý tvar

$$(18) \quad \nabla^2 \mathbf{E} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{E}}{\partial t^2} \quad \text{a} \quad \nabla^2 \mathbf{H} = \frac{\mu \varepsilon}{c^2} \frac{\partial^2 \mathbf{H}}{\partial t^2}.$$

Rovnice (17) a (18) vyjadřují jakýkoli stav elektromagnetického pole. Kromě stacionárního případu, řešeného v předešlých dvou článcích, jim vyhovuje ještě nekonečně mnoho spojitých, konečných a jednoznačných jiných funkcí obecného tvaru $f(r \pm vt)$. Jako u kterékoli jiné parciální diferenciální rovnice bude funkce f definována teprve z počátečních podmínek.

Kromě stacionárního proudění ($\partial \mathbf{E} / \partial t \doteq 0$) je možno obdržet jednoduché řešení rovnic (17) a (18) ještě v případě rovinné vlny, tj. budeme-li při řešení rovnice předpokládat, že jak elektrické tak magnetické pole jsou pouze funkcí času t a jediné prostorové souřadnice x . Řešení (18) pak přejde v ryze harmonické šíření ve směru x : Dostáváme

$$(19) \quad \begin{aligned} E &= E_{\max} e^{2\pi i \left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda} \right)} = E_{\max} e^{i\omega \left(t - \frac{x}{v_f} \right)} = E_{\max} e^{i\omega \left(t - \frac{n}{c} x \right)} = \\ &= E_{\max} \left\{ \cos \omega \left(t - \frac{nx}{c} \right) + i \sin \omega \left(t - \frac{nx}{c} \right) \right\}, \end{aligned}$$

kde fázová rychlost v_f dané vlny a index lomu n jsou

$$(20) \quad v_f = \frac{c}{n} \quad n = \sqrt{\varepsilon \mu} \doteq \sqrt{\varepsilon}, \quad \text{viz (27)}$$

μ lze prakticky vždy položit rovno jedné. Stejnou rovnici můžeme napsat pro magnetické pole. Při řešení (18) je jak reálná, tak imaginární část ryze harmonickou funkcí.

Řešení rovnice (17), vhodně upravené podle (14)

$$(21) \quad E = E_0 e^{-\frac{\omega \kappa}{c} x} \cdot e^{i\omega \left(t - \frac{nx}{c}\right)}$$

$$\text{kde } \kappa \text{ je dáno z } n - i\kappa = \sqrt{\varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}}$$

však ukazuje, že jde sice o vlnění téže frekvence (viz imaginární člen exponentu), že však amplituda vlnění exponenciálně klesá (viz reálnou část exponentu). Vodivé prostředí $\sigma \neq 0$, tlumí vlny.

Rovnice (21) vede k jakési ekvivalentní dielektrické konstantě v komplexním tvaru a ke komplexnímu indexu lomu

$$(22) \quad \varepsilon^* = \varepsilon - i \frac{4\pi\sigma}{\omega}, \quad n^* = n_1 + i n_2.$$

Když již byl zaveden index lomu v komplexním tvaru, bylo vhodné vyjádřit i elektromagnetické pole v komplexním tvaru. Protože z (21) plyne $\frac{\partial E}{\partial t} = i\omega E$, $\frac{\partial H}{\partial t} = i\omega H$, lze již Maxwellovy rovnice (11) a (12) výhodně přepsat v komplexním tvaru

$$(23) \quad \nabla \times \mathbf{E} + \frac{i\omega}{c} \mu \mathbf{H},$$

$$(24) \quad \nabla \times \mathbf{H} - \left(\frac{i\omega\varepsilon}{c} + \frac{4\pi\sigma}{c} \right) \mathbf{E} = \mathbf{0},$$

a protože lze konečně snadno dokázat, že s výjimkou dokonalého izolátoru jsou složky pole ve směru šíření E_x a H_x rychle utlumeny ($E_x = E_0 e^{-\frac{\sigma}{\varepsilon} t}$), zbývají jen složky ve směru roviny yz (kolmé na směr šíření), jež píšeme rovněž v komplexním tvaru

$$(25) \quad \mathbf{E} = E_y + i E_y, \quad \mathbf{H} = H_y + i H_y, \quad \mathbf{v} = v_y + i v_y, \\ \mathbf{h} = h_x + i h_x,$$

$\mathbf{h} = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0$ je změna konstantního magnetického pole \mathbf{H}_0 , vyvolaná malými poruchami, \mathbf{v} značí rychlost pohybu hmoty v rovině yz .

Zatím jsme popsali zákonitosti elektromagnetických vln v plasmatu různých vlastností. Plasma se však v elektromagnetickém poli rozkmitá a jeho pohyb zpětně působí na pole. Je proto třeba ještě vyjít z pohybových rovnic a určit pohyb plasmatu, na něž působí elektrické pole (neelektrické síly nechme stranou). Řešení takovéto pohybové rovnice

$$(26) \quad \varrho_m \frac{d\mathbf{v}}{dt} + \varrho_m \mathbf{v}\nu = Ne\mathbf{E} e^{i\omega t} + \frac{Ne}{c} \mathbf{v} \times \mathbf{H}$$

dává výraz pro index lomu; jeho reálná část, charakterisující vlnění bez útlumu, je

$$(27) \quad n = \sqrt{1 - \frac{\omega_p^2}{(\omega - \omega_{ce})(\omega - \omega_{ci})}},$$

ω_c jsou cyklotronové frekvence, ω frekvence vlastního vlnění a ω_p bylo dosazeno za výraz

$$(28) \quad \omega_p = \sqrt{\frac{4\pi N e^2}{m}},$$

jenž označuje tzv. vlastní (elektrostatické) oscilace plasmatu; jsou ekvivalentní s kritickou frekvencí ionosféry (N je elektronová hustota).

Rovnice (27) a (20) charakterisují fázovou rychlost daného vlnění. Elektromagnetická vlna, která se ve vakuu ($\omega_p = 0$) a bez vnějšího magnetického pole ($\omega_c = 0$) šíří rychlostí světla, má v ionisovaném prostředí větší fázovou rychlost. Rozkmitané elektrony interferují s procházející elektromagnetickou vlnou a zrychlují tak její fázovou rychlost. Jakmile však je plasmatická frekvence ω_p vyšší než frekvence elektromagnetické vlny ω , pak se index lomu (27)

stane imaginárním, což podle (22) znamená, že $\frac{\omega n x}{c}$ v exponentu rovnice (21) přejde do reálné části. Amplituda pak exponenciálně klesá a to dokonce velmi rychle. To je známý zjev, že se pod kritickou frekvencí rádiové vlny již nemohou šířit. Zdroj elektromagnetických oscilací o nižší frekvenci, než je plasmatická frekvence ω_p okolního prostředí, zůstává zcela izolován, protože se jeho vlnění v plasmatu hned utlumí.

Při frekvencích blízko ω_c se stává problém velmi složitým a proto se prozkoumal zatím jen případ velmi pomalých kmitů, jejichž frekvence je dokonce mnohem nižší než ω_{ce} i ω_{ci} . Jde o tzv. Alfvénovy hydromagnetické vlny, jež se šíří ze zdroje při frekvencích ω menších než ω_p a ω_c . Dosadíme-li $\omega \ll \omega_{ce}$ a $\omega \ll \omega_{ci}$ do (27), dostaneme při (8) a (28)

$$(29) \quad \frac{v_f}{c} = \left(1 - \frac{\omega_p}{\omega_{ce}\omega_{ci}}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{4\pi N m_i c^2}{B_0^2}\right)^{-1/2} = \left(1 + \frac{4\pi \rho_m c^2}{B_0^2}\right)^{-1/2}$$

Za předpokladu, že druhý člen je dostatečně velký, aby bylo možno jedničku zanedbat, dává (29) fázovou rychlost hydromagnetických vln ve směru \mathbf{H}_0

$$(30) \quad v_f = \frac{H_0}{\sqrt{4\pi \rho_m}}.$$

Všechny výpočty byly provedeny jen za předpokladu, že na pohyb částice a tím po případě i na pohyb celého plasmatu působí jen elektrické nebo magnetické pole, popř. srážky s okolními částicemi. Pokud do pohybové rovnice (26) vstupují ještě jiné, neelektrické síly (gradient tlaku aj.), charakter vln se zas ještě poněkud změní. Je-li na příklad tlak plynu větší než magnetický tlak (7), pak se hydromagnetické vlny, kolmé k \mathbf{H}_0 , šíří ve směru v rychlostí

$$(31) \quad v_f = \sqrt{\frac{H_0^2}{4\pi \rho_m} + v_{zv}^2}.$$

Ještě je třeba se zmínit o jednom typu „vln“, a to o nárazové vlně (někdy nazývané údernou vlnou). Vzniká vždy při vzájemném průniku dvou prostředí, jež se vůči sobě pohybují rychlostí podstatně převyšující rychlost zvuku aspoň v jednom prostředí (např. (31)). Problém nárazové vlny je natolik složitý, že by sám vyžadoval aspoň takový článek, jakým je tento. V závěru možno jen podotknout, že v poměrně úzké oblasti, označované názvem nárazová vlna, vznikají zřejmě oscilace všech právě popsaných druhů, především elektrostatické, jež při vysokém Machově čísle vyvolávají možná tak vysoké elektrostatické pole, že se v něm částice urychlují na potřebnou teplotu.

Nejpodstatnější druhy elektrických a elektromagnetických oscilací byly zde podány formou co nejstručnější. Zájemce o podrobnější studium lze odkázat jednak na literaturu uvedenou již v předešlých dvou článcích a dále ještě na tyto knihy: Aljpert, Ginzburg, Fejnberg: *Rasprostraněníje radiovoln*, Moskva, 1953; Stratton: *Electromagnetic Theory*, Ferraro: Referát na Symposiu ve Vareně 1958.

BUDE SE PRODLUŽOVAT ČAS V KOSMICKÝCH RAKETÁCH?

IVAN ŮLEHLA, Praha

V práci se ukazuje, že v raketách pohybujících se obecně nerovnoměrným pohybem může dojít k relativistické dilataci i ke kontrakci času.

Úvod

V poslední době se v souvislosti s úspěšným vypuštěním družic a kosmických raket znovu vynořily jak v odborné literatuře [1, 2] tak i v populárně vědecké literatuře četné úvahy o prodlužování života posádek v budoucích meziplanetárních a kosmických raketách. Ani ve vědecké literatuře nechybí úvahy o tom, že v důsledku relativistického prodlužování času bude moci člověk dosáhnout prakticky nekonečně vzdálených oblastí vesmíru za dobu jednoho lidského života [3]. V. A. Fok ukázal již dříve [4] na negativní úlohu zrychlení při změnách v chodu času. Zatím co při pohybu rovnoměrném a přímočarém nastává tzv. dilatace času, při pohybu nerovnoměrném, jak uvidíme dále, dochází naopak ke kontrakci času.

Při všech těchto úvahách je důležité znovu si uvědomit, že plynutí času je závislé na soustavě, v níž čas probíhá. Abychom mohli difference mezi chodem času v různých navzájem se pohybujících soustavách měřit, musíme mít nejdříve k dispozici veličinu která tyto difference udá nezávisle na tom, v které soustavě je určujeme. Takovou veličinou je vlastní čas τ . Jestli pro jedny hodiny projde čas $\tau_a - \tau_b$, pak za tuto dobu naměří obecně jiné hodiny časový interval

$$(1) \quad \tau'_a - \tau'_b = \frac{1}{c} \int_{\tau_b}^{\tau_a} ds,$$