Nicolas Bourbaki
Architektura matematiky

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 5, 509--518

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137374

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK V — ČÍSLO 5

MATEMATIKA

ARCHITEKTURA MATEMATIKY[1])

NICOLAS BOURBAKI

Matematika nebo matematiky?[2])

Učinit si dnes obecnou představu o matematice jakožto vědě znamená zabývat se otázkou, jejíž řešení naráží hned zpočátku na skoro nepřekonatelné potíže, plynoucí z rozsáhlosti a rozmanitosti zkoumaného materiálu. Jako v každé vědě i v matematice nesmírně vzrostl do konce XIX. stol. počet vědců a vědeckých prací. Práce z oboru „čisté" matematiky, publikované po celém světě během jednoho roku, zabírají průměrně mnoho tisíc stran. Vědecká hodnota prací je ovšem různá. I když opomineme práce, nepřinášející nové výsledky, poznáme, že se matematika každý rok obohacuje o spoustu nových výsledků, její obsah je neustále rozmanitější, vznikají nové a dále se rozvíjející teorie, jež se vnitřně přetvářejí, vzájemně srovnávají a spojují. Dnes již není matematika, který by byl schopen sledovat tento vývoj do všech podrobností, byť by tomu věnoval veškerou svoji činnost. Mnoho matematiků pracuje v některém „koutku" matematiky, nesnaží se jej opustit, a nejen že téměř ignorují všechno to, co se netýká jejich pracovního oboru, ale dokonce ani nerozumí jazyku a terminologii svých kolegů — specialistů v odlehlejším oboru. Není matematika, ani mezi těmi s největší erudicí, který by se necítil cizincem v některých oblastech obrovského světa matematiky. Ti, jejichž genius se projevil téměř ve všech oborech — např. Poincaré nebo Hilbert — jsou i mezi nejslavnějšími vzácnou výjimkou.

Proto nemůžeme chtít dát neodborníkovi přesnou představu o tom, co ani matematikové nemohou plně obsáhnout. Nicméně si však můžeme položit

---

[1]) Николай Бурбаки, Архитектура математики, (Nikolas Bourbaki, Франция–США), Matěmatičeskoje prosveščenije, č. 5 (1960).

Ruský překlad článku *L'Architecture des mathématiques*, publikovaný ve sborníku *Les grands courants de la pensée mathématique*, vydaném F. Le Lionnaisem (Cahiers du Sud, 1948, str. 35—47). Do ruštiny přeložil Д. Н. Ленский. Autorisovaný anglický překlad tohoto článku *The Architecture of Mathematics*, pocházející od A. Dresdena, je otištěn v časopise *The American Mathematical Monthly* (sv. 57, č. 4, 1950, str. 221—232) s touto poznámkou o autorovi:

„Profesor N. Bourbaki, bývalý člen Královské poldavské akademie věd (*Royal Poldavian Academy*), žijící nyní v Nancy (Francie), je autorem obsáhlé monografie o soudobé matematice, která vychází pod názvem *Eléments de Mathématique* (Herman et C^ie^, Paris, 1939), a jejíž deset svazků již vyšlo".

Úplnější a spolehlivé informace o autorovi (přesněji — o autorech) lze nalézt v článku K. Rychlíka, který je otištěn v tomto časopise (č. 6, roč. IV. 1959, str. 673—678). Viz též P. Halmos, Scientific American, květen 1957, str. 88—99.

[2]) *La mathématique ou les Mathématiques?* (tj. jedna matematika nebo několik matematik?) *D. N. Lenskij.*

otázku, zda tento ohromný růst je vývojem jednoho jednotného organismu, s neustále těsnější souvislostí všech jeho částí, nebo zda je tento růst pouze vnějším znakem tendence rozpadu, vlastní samé podstatě matematiky. Nevyrůstá snad z matematiky babylonská věž, shluk autonomních disciplin, vzájemně oddělených jak metodami tak cíli a jazyky? Krátce, máme v současné době jedinou matematiku nebo více matematik?

Ač je nyní tato otázka velmi aktuální, nesmíme se domnívat, že je nová. Setkáme se s ní totiž již v samých začátcích matematiky. I když ponecháme stranou aplikovanou matematiku, jsou geometrie a aritmetika (alespoň na svém elementárním stupni) zřejmě rozdílné svým původem, protože druhá byla při svém vzniku vědou o diskrétních veličinách, zatím co první pracovala se spojitou rozprostraněností, což jsou dva aspekty, jejichž protikladnost vyzdvihl objev iracionalit. Právě tento objev zmařil první pokusy unifikace matematiky — aritmetisace prováděné pythagorejci („věci jsou čísla").

Zašli bychom příliš daleko, kdybychom chtěli sledovat cesty této jednotící koncepce v matematice od pythagorejců až do naší doby. Kromě toho je k této práci spíše povolán filosof než matematik, ježto společným rysem všech pokusů o sjednocení všech matematických disciplin, ať již jde o Platona, Descartesa, Leibnize nebo o aritmetisaci či logistiku XIX. stol., — je jejich souvislost s filosofickým systémem, jehož východiskem byly vždy apriorní názory na vztahy mezi matematikou a dvojakou skutečností vnějšího světa a světa ideí. Zde bude nejlepší, odkážeme-li čtenáře na historickou a kritickou studii L. Brunschvicga „Etapy matematické filosofie"[3]). Naše úloha je skromnější, ale přesněji vymezena; zůstaneme uvnitř matematiky a budeme hledat odpověď na položenou otázku v rozvoji matematiky samé.

Logický formalismus a axiomatická metoda

Začátkem tohoto století, po více méně zřejmém nezdaru systémů, o kterých jsme právě pojednali, se zdálo, že je třeba opustit názor na matematiku jakožto vědu, charakterisovanou jediným předmětem a jedinou metodou. Brzy se objevily tendence chápat matematiku jako „řadu disciplin, založených na speciálních, přesně definovaných pojmech", mezi nimiž existují „tisíce souvislostí"[4]), které umožňují metodami jedné discipliny obohacovat jednu nebo více dalších disciplin. Nyní se domníváme, že vnitřní vývoj matematické vědy v rozporu s vnějšími znaky upevnil více než kdy jindy jednotu rozmanitých oborů a utvořil jádro, jež je více než kdykoli předtím jediným celkem. Podstatná v tomto vývoji je systematisace vztahů, existujících mezi různými matematickými teoriemi, jež potom vedla k tzv. axiomatické metodě.

V této souvislosti se také mluví o „formalismu" nebo o „formalistické metodě". Je však zapotřebí se od počátku vyhnout zmatku, který způsobuje nedostatečně přesné vymezení smyslu těchto slov a který dosti často využívají odpůrci axiomatické metody. Každý ví, že vnějším specifickým znakem matematiky je onen „dlouhý řetěz soudů", o kterém hovoří Descartes. Každá matematická teorie je sřetězením výroků, jež se vyvozují jeden z druhého pravidly logiky, která se v podstatě neliší od logiky známé z dob Aristotelových pod názvem „formální logika"; formální logika byla jen přizpůsobena specifickým potřebám matematiky. Tvrzení, že dedukce je sjednocujícím principem

[3]) L. Brunschvicg, *Les étapes de la philosophie mathématique,* Paris, Alcan, 1912.

[4]) L. Brunschvicg, tamtéž str. 447.

matematiky, je tedy samozřejmou pravdou. Tento povrchní poznatek nemůže tedy vysvětlit jednotu rozmanitých matematických teorií právě tak, jako nelze např. sjednotit v jedinou vědu fysiku a biologii proto, že obě používají experimentální metody. Úvaha řetězcem sylogismů je pouze transformujícím mechanismem, který lze použít na jakoukoli soustavu premis a nemůže proto tyto premisy charakterisovat. Jinými slovy, je to jen vnější forma, kterou nabývají matematické ideje, nástroj, umožňující spojovat různé matematické ideje, tedy jakýsi jazyk vlastní matematice a nic víc.[5]) Uspořádat slovník tohoto jazyka a zpřesnit jeho syntax je prací velmi užitečnou, jež je skutečně jednou stránkou axiomatické metody, onou stránkou, kterou nazýváme logickým formalismem, nebo, jak se také říká, logistikou. Avšak — znovu to zdůrazňujeme — pouze jedním aspektem této metody, a to nejméně zajímavým.

Právě to, co si axiomatika klade za svůj základní cíl, totiž srozumitelnost stavby matematiky, nemůže dosáhnout logický formalismus sám o sobě. Tak jako experimentální metoda vychází z apriorní neměnnosti přírodních zákonů, opírá se axiomatická metoda o fakt, že není-li matematika hromaděním sylogismů v náhodně vybraném směru, je tím méně jakž takž vynalézavým uměním, spočívajícím na libovolných asociacích, tvořených pouhou technickou dovedností. Tam, kde povrchní pozorovatel vidí jen dvě nebo několik teorií vzájemně úplně odlišných svou vnější podobou, a kde zásah geniálního matematika vede k odhalení zcela „neočekávané pomoci“[6]), kterou jedna z těchto teorií může prokázat jiné, učí nás axiomatická metoda hledat hlubší příčiny takového objevu, nalézt obecné myšlenky, které se skrývají za jednotlivostmi každé z těchto teorií, vyabstrahovat tyto myšlenky a učinit je předmětem samostatného zkoumání.

Pojem „struktury“

Jakou formou probíhá tento proces? Právě zde má axiomatická metoda nejvíce společného s experimentální metodou. Čerpajíc z Descartesa „rozděluje obtíže, aby byly lehčeji zvládnutelny“. V důkazech nějaké teorie se snaží analysovat hlavní motivy prováděných úvah. Načež uvažujíc každý tento motiv sám o sobě, formulujíc jej v abstraktní formě a pozvedajíc jej na obecný princip, vyvozuje z něho závěry. Vracejíc se potom k teorii, znovu kombinuje předem abstrahované prvky a studuje jejich vzájemný vztah. V tomto klasickém spojení analysy a synthesy není nic nového; originalita této metody spočívá ve způsobu jejího použití.

K ilustraci popsaného procesu použijeme nejstarší (a nejjednodušší) axiomatickou teorii, totiž teorii abstraktních grup. Uvažujme tyto tři operace: 1) sčítání reálných čísel, při kterém součet dvou reálných čísel (kladných, záporných nebo nuly) je definován obvyklým způsobem; 2) násobení modulo p přirozených čísel, při němž uvažujeme čísla $1, 2, 3, \ldots, p-1$ a součinem dvou takových čísel rozumíme zbytek při dělení jejich obyčejného součinu číslem p; 3) skládání pohybů v trojrozměrném euklidovském prostoru; součinem dvou pohybů T a S (v tomto pořadí) rozumíme pohyb, který vznikne složením pohybů T a S, tj. pohyb, který vznikne za sebou provedenými pohyby T a S.

[5]) Každý matematik ví, že důkaz není „srozumitelný“ v obvyklém smyslu tohoto slova, omezíme-li se pouze na prověrku správnosti závěrů, které důkaz tvoří, a nesnažíme-li se do důsledků pochopit ty myšlenky, pro které byla dána přednost právě tomuto řetězci závěrů před jiným.

[6]) L. Brunschvicg, tamtéž str. 446.

V každé z těchto tří teorií je každé uspořádané dvojici prvků x a y z uvažované množiny (v prvním případě z množiny všech reálných čísel, v druhém případě z množiny čísel 1, 2, ..., $p-1$, a ve třetím případě z množiny všech pohybů) přiřazen (způsobem pro každou tuto množinu specifickým) jednoznačně prvek z této množiny, který ve všech těchto třech případech symbolicky označíme $x\tau y$ (je to součet, jestliže x a y jsou reálná čísla; součin modulo p v případě, že x a y jsou přirozená čísla menší než p; pohyb, který vznikne složením pohybů S a T v třetím případě). Jestliže si nyní všimneme vlastnosti této „operace" v každé z těchto tří teorií, objeví se nápadný paralelismus. Uvnitř každé z těchto teorií jsou tyto vlastnosti vzájemně závislé a logická analysa těchto vzájemných souvislostí nás vede k vymezení několika málo vlastností, které jsou vzájemně nezávislé (tj. takových vlastností, z nichž žádná není logickým důsledkem ostatních). Lze např.[7]) vzít tyto tři vlastnosti, které zapíšeme pomocí našeho symbolického označení a které lze snadno vyjádřit jazykem každé z uvedených teorií:

a) pro každé tři prvky x, y, z platí $(x\tau y)\,\tau z = x\tau(y\tau z)$ (asociativnost operace $x\tau y$);

b) existuje prvek e takový, že pro každý prvek x platí $e\tau x = x$ (při sčítání reálných čísel má tuto vlastnost nula, při násobení modulo p číslo 1, a při skládání pohybů tzv. „identická transformace", převádějící každý bod v sebe sama);

c) ke každému prvku x existuje prvek x' takový, že platí $x\tau x' = e$ (při sčítání reálných čísel má tuto vlastnost opačné číslo $-x$, při násobení modulo p vyplývá existence prvku x' z jednoduché aritmetické úvahy, při skládání pohybů má tuto vlastnost tzv. inversní pohyb, tj. takový pohyb, kterým obraz bodu při pohybu x se zobrazí ve výchozí bod.[8]) Vlastnosti, které lze použitím obecného označení vyjádřit stejným způsobem v každé z těchto tří teorií, jsou důsledky uvedených tří vlastností. Dokažme např., že z $x\tau y = x\tau z$ plyne $y = z$. Mohli bychom to dokázat v každé z těchto teorií zvlášť, používajíce úvah specifických pro tuto teorii. Můžeme však postupovat způsobem společným pro všechny tři teorie. Ze vztahu $x\tau y = x\tau z$ odvodíme vztah $x'\tau(x\tau y) = x'\tau(x\tau z)$ (x' má shora uvedený smysl). Používajíce vlastnosti a) dostaneme vztah $(x'\tau x)\,\tau y = (x'\tau x)\,\tau z$, z něhož na základě c) plyne $e\tau y = e\tau y$, načež použijeme-li konečně b), dostaneme žádaný vztah $y = z$. V této úvaze jsme úplně abstrahovali od povahy prvků x, y, z. Nezáleželo nám vůbec na tom, zda to byla reálná čísla, přirozená čísla menší než p, či euklidovské pohyby. Využili jsme pouze toho, že operace $x\tau y$ má vlastnosti a), b), c). Abychom se vyhnuli zbytečnému opakování, je přirozené odvodit jednou provždy logické důsledky těchto tří vlastností. K tomu je však vhodné vytvořit obecnou terminologii. Říkáme, že množina, na níž je definována operace $x\tau y$, charakterisovaná vlastnostmi a), b), c), má strukturu grupy (nebo kratčeji je grupou). Podmínky a), b), c) nazýváme axiomy grupy[9]) a odvozování logických důsledků těchto axiomů znamená tvořit axiomatickou teorii grup.

[7]) To není jediná možná volba. Existují různé systémy, které jsou „ekvivalentní" s uvedeným systémem; při tom je každý axiom jednoho systému logickým důsledkem axiomů libovolného systému.

[8]) Poznamenejme, že zbytky při dělení číslem p čísel 1, x, x^2, ... x^n, ... nemohou být vesměs různé. Porovnáme-li totiž dva z nich, snadno dokážeme, že x^{k-l} ($k > l$) má při dělení číslem p zbytek 1. Označíme-li x' zbytek při dělení číslem p čísla x^{k-l-1}, je součin xx' roven 1 modulo p.

[9]) Tento smysl slova „axiom" nemá zřejmě nic společného s obecně přijatým smyslem „zřejmá pravda".

Nyní můžeme objasnit, co jest rozumět v obecném případě matematickou strukturou. Obecným znakem pojmů, označených tímto společným názvem, je to, že mohou být použity na množinu prvků, jejichž povaha[10]) není blíže specifikována. Strukturu definujeme, udáme-li jednu nebo více relací pro tyto prvky[11]) (v případě grupy to byla relace $x\tau y$ mezi libovolnými třemi prvky). Načež postulujeme, že tyto vztahy vyhovují jistým podmínkám (které vyjmenujeme a které nazýváme axiomy uvažované struktury)[12]). Vybudovat axiomatickou teorii dané struktury znamená odvozovat logické důsledky z axiomů struktury bez použití jakýchkoli dalších výroků o uvažovaných prvcích (zejména bez použití jakýchkoli hypotéz o povaze těchto prvků).

Základní typy struktur

Definice struktury se opírá o pojem relace, jež může být velmi různorodou. Relace v grupové struktuře se nazývá algebraická operace (někdy též zákon komposice). Je to relace mezi třemi elementy, jednoznačně přiřazující každé dvojici prvků opět nějaký prvek. Je-li definující relací algebraická operace, nazýváme příslušnou strukturu algebraickou strukturou (např. struktura tělesa se definuje dvěma algebraickými operacemi, splňujícími jisté axiomy. Množina reálných čísel má strukturu tělesa vzhledem k sčítání a násobení).

Dalším důležitým typem struktur jsou struktury definované relací uspořádání, což je binární relace (tj. relace mezi dvěma prvky x, y), kterou symbolicky vyznačujeme xRy a obvyklé vyjadřujeme slovy „x je menší nebo rovno y". O této relaci se nepředpokládá, že určuje jeden z prvků x, y jako funkci druhého. Tato relace splňuje axiomy: a) pro každé x je xRx; b) z xRy, yRx vždy plyne $x = y$; c) z xRy, yRz vždy plyne xRz. Příkladem množiny takové struktury je množina celých čísel (nebo množina reálných čísel), rozumíme-li symbolem R symbol $\leqq$. Je však nutno si uvědomit, že uvedená soustava axiomů neobsahuje axiom: „pro každé dva prvky x, y platí buď xRy nebo yRx", ač by se zdál samozřejmým pro pojem uspořádání, se kterým se běžně setkáváme.

---

[10]) Vycházíme zde z „naivního" stanoviska a nedotýkáme se citlivých polofilosofických, polomatematických problémů, vzniknuvších v souvislosti s otázkou „povahy" matematických „objektů". Omezíme se jen na poznámku, že původní pluralismus v našich představách o těchto „objektech", jež byly zpočátku myšleny jako idealisovaná „abstrakce" smyslových „zkušeností" a zachovaly tudíž veškerou jejich rozmanitost, byl výzkumy o axiomatice v XIX.—XX. století postupně nahrazován unitární koncepcí tak, že se všechny matematické pojmy odvozovaly nejprve z pojmu celého čísla a potom v druhé etapě z pojmu množiny. Pojem množiny byl dlouhou dobu pokládán za „prvotní", „nedefinovatelný" a byl předmětem mnoha sporů, vyvolaných výjimečnou obecností a mlhavostí představ, jež tento pojem vyvolával. Obtíže se překonaly teprve tehdy, když v souvislosti s nedávnými výzkumy v logickém formalismu ztratil svůj význam sám pojem množiny (a s ním i všechny metafysické pseudoproblémy matematických „objektů"). Z hlediska této koncepce jsou možno říci jedinými matematickými objekty, matematické struktury. Čtenář najde zevrubnější vyjádření tohoto hlediska v těchto dvou pojednáních: J. Diedonné, *Les méthodes axiomatiques modernes et les fondements des mathématiques,* Revue Scientifique 78 (1939), str. 224—232; H. Cartan, *Sur le fondement logique des mathématiques,* Revue Scientifique 81 (1943), str. 3—11.

[11]) Pro potřeby matematiky není tato definice dostatečně obecná. Je totiž třeba, aby zahrnovala i takové případy, kdy ve vztazích definujících strukturu vystupují nejen prvky uvažované množiny, ale také např. podmnožiny této množiny, nebo obecněji prvky „vyššího typu" — ve smyslu teorie typů. Další podrobnosti najde čtenář v naší knize *Eléments de Mathématique,* sv. I. (shrnutí výsledků), Actual. Scient. et Industr., str. 846.

[12]) Přesně vzato bylo by třeba v teorii grup považovat za axiom, kromě uvedených a), b), c) také tvrzení, že vztah $z = x\tau y$ přiřazuje právě jeden prvek z každé dvojici prvků x, y. Zpravidla se mlčky předpokládá, že tato vlastnost je splněna již zápisem tohoto vztahu: $z = x\tau y$.

Nevylučujeme tedy případ dvou „nesrovnatelných“ prvků. To se možná jeví na první pohled paradoxní. Snadno však uvedeme velmi důležité příklady struktur uspořádání, které tento axiom nesplňují. Takovou strukturu dostaneme, zavedeme-li v systému všech podmnožin nějaké množiny uspořádání takto: XRY znamená „X je podmnožinou Y“. Další příklady takové struktury získáme, jestliže v množině přirozených čísel relace xRy znamená „x je dělitelem y“, nebo jestliže v množině všech reálných funkcí definovaných na intervalu $a \leqq x \leqq b$ fRg znamená: „$f(x) \leqq g(x)$ pro každé x“. Na těchto příkladech vidíme, v jak rozmanitých oblastech se setkáváme se strukturou uspořádání. Z toho si můžeme učinit představu o důležitosti jejich studia.

Zmíníme se ještě několika slovy o třetí důležité struktuře — o tzv. topologické struktuře (čili topologii). Tato struktura zachycuje abstraktní matematickou formulaci pojmu okolí, limity a spojitosti, ke kterým nás vedou naše představy o prostoru. Formulace axiomů topologické struktury vyžaduje větší stupeň abstrakce než předcházející případy a přesahuje rámec tohoto pojednání. Odkazujeme proto čtenáře, který se o to zajímá, na speciální literaturu.[13])

Standardisace matematických prostředků

To, co jsme řekli, snad již postačí k tomu, aby si čtenář mohl učinit dostatečně přesnou představu o axiomatické metodě. Nejnápadnějším rysem axiomatické metody je značná úspornost v myšlení. „Struktury“ jsou matematickým nástrojem. Jakmile matematik zjistí, že mezi prvky, které studuje, platí vztahy, splňující axiomy struktury jistého typu, může ihned použít celý arsenál obecných vět, které platí o struktuře tohoto typu. Jinak by musel vynaložit velké úsilí, aby vytvořil prostředky nezbytné k řešení vyšetřovaného problému. Při tom účinnost těchto prostředků závisí na jeho osobním nadání a tyto prostředky jsou omezeny řadou zbytečných předpokladů, které vyplývají ze specifičnosti studovaného problému. Axiomatická metoda není tedy ničím jiným, než jakýmsi „taylorismem“ v matematice.[14])

Takové porovnání je však nedostačující. Matematik totiž nepracuje jako stroj. V matematických úvahách je důležitá specifická intuice,[15]) odlišná od běžné smyslové intuice a spočívající spíše v přímém vytušení (před přesnou úvahou) pravého stavu věcí, které matematik zdánlivě oprávněně očekává od matematických objektů, s nimiž se již natolik naučil zacházet, že na ně nazírá jako na objekty reálného světa. Vždyť v jazyku každé struktury se odráží ona specifická teorie, ze které se abstrakcí příslušná struktura tvořila. Jakmile matematik objeví ve studovaném problému již známou strukturu, je tím ovlivněn intuitivní postup jeho myšlení, třeba v neočekávaném směru. To často způsobuje, že zkoumaná matematická problematika se objevuje v jiném světle. Chceme-li uvést starý příklad, vzpomeňme jen, k jakému pokroku vedla na začátku XIX. stol. geometrická interpretace imaginárních čísel. Z našeho hlediska to bylo odhalení dobře známé topologické struktury euklidovské roviny

[13]) Viz např. naše *Eléments,* sv. III. Úvod ke kap. I., Actual. Scient. et Industr., str. 858. (Ruský překlad: Н. Бурбаки, *Топологические структуы*, Moskva, 1959 — *pozn. red.*).

[14]) Taylorův systém — kapitalistický systém organisace práce, navržený americkým inženýrem F. Taylorem, který slouží vytváření maximálního zisku. Jedním z prvků tohoto systému je studium pracovního procesu pomocí rozkladu tohoto procesu na části (*pozn. red.*).

[15]) Intuice, která je i často chybná (jako každá intuice).

v množině komplexních čísel. Tím byly přirozeně spojeny všechny z toho vyplývající možnosti aplikace, pomocí nichž Gauss, Abel, Cauchy a Riemann za méně než jedno století obrodili analysu.

V posledních 50 letech bylo mnoho takových příkladů: Hilbertův prostor a obecnější funkcionální prostory, což jsou množiny funkcí (nikoli bodů) s topologickou strukturou; teorie Henselových p-adických čísel, kterými — což je zvlášť udivující — topologie ovládla i oblast, jež byla až dosud považována za výlučnou doménu nespojitého, diskrétního, totiž množinu celých čísel; Haarova míra, která neomezeně rozšířila oblast použití pojmu integrálu a která umožnila velmi hluboké studium vlastností topologických grup. Takové jsou nejdůležitější momenty ve vývoji matematiky, ty dějinné obraty, v nichž myšlenky géniů udávají nový směr vývoji teorie objevením struktury, která, jak se zdálo a priori, byla bezvýznamná.

Svědčí to o tom, že v současné době je matematika méně než kdykoli před tím mechanickou hrou se vzorci. Silněji než kdykoli předtím dominuje intuice v genesi objevů. Nyní však již má matematika k disposici mohutné nástroje, které jí poskytuje teorie nejdůležitějších typů struktur, a tak může jediným rozmachem obsáhnout obrovské oblasti, unifikované axiomatikou, ve kterých, jak se zdálo, vládl chaos.

Celkový přehled

Vyjdeme z koncepce axiomatiky a pokusíme se přehlédnout matematiku v celku. Samozřejmě nenajdeme zde již ten tradiční řád, který podobně jako první klasifikace živočichů se omezil na to, aby postavil vedle sebe teorie, které se svými vnějšími znaky nejvíce podobaly. Místo přesně rozlišených oborů, např. algebry, analysy, teorie čísel a geometrie jeví se teorie prvočísel vedle teorie algebraických křivek, nebo euklidovská geometrie vedle integrálních rovnic. Pořádajícím principem je hierarchie struktur, která vede od jednoduchého k složitému, od obecného ke konkrétnímu.

Jakýsi střed tvoří základní typy struktur, z nichž jsme se zmínili jenom o nejdůležitějších, o jakýchsi „tvořících" strukturách (*les structures — mères*). U každého z těchto typů se setkáme s dostatečnou rozmanitostí, neboť musíme rozlišovat nejobecnější strukturu uvažovaného typu, tj. strukturu s nejmenším počtem axiomů od struktur, které z ní získáme přidáváním doplňujících axiomů, jež implikují nové důsledky. Např. teorie grup, kromě těch obecných vět, platných pro každou grupu a odvozených z výše uvedených axiomů, obsahuje jako zvláštní případ teorii konečných grup (která vznikne, přidáme-li k axiomům vymezujícím pojem grupy další postulát, požadující, aby počet prvků grupy byl konečný), teorii Abelových grup (tj. grup, ve kterých pro každé dva prvky x, y platí $x\tau y = y\tau x$), nebo i teorii konečných Abelových grup (tj. grup splňujících oba přidané axiomy). Právě tak z uspořádaných množin zkoumáme zvlášť ty, ve kterých jsou každé dva prvky v relaci uspořádání (jako např. v množině celých nebo reálných čísel) a které nazýváme lineárně uspořádanými množinami; z těch se zas zvlášť vyšetřují, tzv. dobře uspořádané množiny, což jsou takové uspořádané množiny, ve kterých každá neprázdná podmnožina obsahuje první (tj. „nejmenší") prvek (jako např. množina přirozených čísel). Podobně je tomu i u topologických struktur.

Vedle těchto základních struktur existují struktury, které bychom mohli nazvat složenými a které jsou tvořeny jednou nebo několika základními strukturami, nikoli prostým spojením (což ale by nedalo nic nového), organickým kombinováním pomocí vhodných spojujících axiomů. Takového charakteru je topologická algebra, zkoumající struktury, definované jednou nebo několika algebraickými operacemi a topologií, při čemž tyto struktury jsou spojeny požadavkem, aby algebraické operace byly spojitými funkcemi prvků vzhledem k zavedené topologii. Stejně důležitá je algebraická topologie, která zkoumá jisté bodové množiny prostoru, určené topologickými vlastnostmi (simplexy, cykly atd.) jako množinu, na níž je definována algebraická operace. Právě tak spojení struktury uspořádání s algebraickou strukturou vede k mnoha výsledkům; jednak k teorii dělitelnosti ideálů, jednak k teorii integrálu a spektrální teorii operátorů, kde také topologie má svoji úlohu.

Pokračujíce dále dostaneme se k speciálním teoriím, ve kterých prvky vyšetřovaných množin, jejichž povaha byla v obecných strukturách nepodstatná, dostávají svůj individuální konkrétní obsah. Tak dospíváme k teoriím klasické matematiky: k teorii funkcí reálné a komplexní proměnné, k diferenciální geometrii, k algebraické geometrii, k teorii čísel. Tyto teorie ztrácejí tak svoji autonomnost, stávají se útvary, v nichž se obecnější matematické struktury spojují a vzájemně na sebe působí.

Abychom získali správnou představu, je třeba k tomuto zběžnému přehledu dodat, že jej považujeme za velmi hrubé přiblížení skutečnosti v matematice. Tento obraz je schematický, idealisovaný a statický.

Schematický proto, že v podrobnostech zdaleka není vše tak jednoduché a systematické, jak by se zdálo po tomto výkladu. V matematice dochází k neočekávaným obratům, kdy teorie, která má jasně speciální charakter, jako např. teorie reálných čísel, poskytuje pomoc, bez níž se nelze obejít v některých obecných teoriích, např. v topologii nebo v teorii integrálu.

Idealisovaný proto, že zdaleka ne ve všech oblastech matematiky se každá z obecných struktur jeví jasně nebo je přesně vymezená. V některých teoriích (např. v teorii čísel) je mnoho isolovaných výsledků, jež až dosud nelze klasifikovat, ani uspokojivě uvést v souvislost se známými strukturami.

Statický proto, že nic není vzdálenějšího axiomatické metodě, než statická koncepce vědy. Nechceme proto u čtenáře vzbudit dojem konečného stavu vědy. Struktury nejsou neměnné ani co do počtu ani co do podstaty. Je zcela možné, že další rozvoj matematiky povede k vytvoření dalších fundamentálních struktur zavedením nových axiomů nebo kombinací axiomů. Přitom účelnost tohoto zavedení se dá posoudit porovnáním s výsledky, jichž bylo dosaženo pomocí již známých struktur. Tyto známé struktury nejsou v žádném případě něčím uzavřeným a bylo by velmi udivující, kdyby jejich „životnost“ se již vyčerpala dosavadními výsledky.

Po těchto nezbytných poznámkách lépe pochopíme vnitřní život matematiky, lépe pochopíme to, co vytváří její jednotu a vnáší do ní rozmanitost. Lépe pochopíme ono velké město, jehož předměstí se neustále chaoticky rozrůstají, zatímco jeho centrum se periodicky přebudovává, pokaždé podle jasnějšího a promyšlenějšího plánu, který je stále velkolepější a který bourá staré čtvrtě s labyrintem uliček, aby mohly být vybudovány přímější, širší a pohodlnější ulice — spojení s předměstím.

Retrospektiva a závěr

Koncepce, kterou jsme se snažili vyložit, nevznikla najednou, ale jako výsledek více než půl století trvajícího vývoje, a nebyla přijata bez odporu jak filosofů tak matematiků. Mnozí matematikové nechtěli dlouho souhlasit s tím, aby se axiomatika považovala za něco více než za pouhou nepotřebnou jemnost logiků, neschopnou rozvíjet jakoukoli teorii. Taková kritika je důsledkem historické nahodilosti: axiomatiky, jež vznikly nejdříve a jež měly největší ohlas (Dedekindova a Peanova axiomatika aritmetiky, Hilbertova axiomatika euklidovské geometrie), se týkaly univalentních teorií, tj. teorií, které byly úplně určeny svým systémem axiomů, přičemž tento systém axiomů nemohl být použit v žádné jiné teorii, kromě takové, ze které byl odvozen (na rozdíl např. od axiomatiky teorie grup). Kdyby tomu tak bylo u všech struktur, pak by námitka o neplodnosti axiomatické metody byla oprávněna.[16]) Axiomatická metoda však svým vlastním rozvojem dokázala svůj význam. Tu a tam se ještě vyskytující odpor k axiomatické metodě lze vysvětlit jen tím, že ,,zdravý rozum se zdráhá připustit, že v konkrétní úloze může být užitečnou intuice jiná než ta, která bezprostředně pramení z předpokladů (a která vzniká obtížnější a vyšší abstrakcí).

Pokud jde o námitky filosofů, týkají se oblasti, kde se necítíme kompetentními. Základní problém je ve vztahu experimentálního a matematického zkoumání.[17]) Úzká souvislost mezi experimentálními jevy a matematickými strukturami byla — zdá se — zcela neočekávaným způsobem potvrzena nedávnými objevy moderní fysiky. Zůstávají nám však zcela neznámé hluboké příčiny tohoto faktu (pokud vůbec má smysl taková formulace) a je možné, že je ani nikdy nepoznáme. V každém případě však může tato poznámka být popudem pro filosofy, aby v budoucnu ještě obezřetněji řešili tuto otázku. Dříve než začal revoluční rozmach moderní fysiky, bylo vynaloženo mnoho práce na to, aby se matematika rodila z experimentálních výsledků. Na jedné straně však kvantová fysika ukázala, že ,,makrokosmická" intuice skutečnosti skrývá ,,mikrokosmické" jevy zcela jiné povahy, jejichž studium vyžaduje užití takových oborů matematiky, které ještě nebyly vytvořeny s cílem aplikace v experimentálních vědách. Na druhé straně axiomatická metoda ukázala, že ,,pravdy", ze kterých se měl vytvořit základ matematiky, jsou jen speciálním aspektem obecnějších koncepcí, jejichž užitečnost zdaleka není vyčerpána tímto zvláštním případem. Konec konců toto vzájemné ovlivňování se, jehož nezbytností jsme se právě zabývali, není nyní ničím jiným než náhodným stykem věd, jejichž souvislosti jsou daleko více skryty než by se a priori zdálo.

Ve své axiomatické stavbě je matematika seskupením abstraktních forem — matematických struktur — a ukazuje se (třebaže v podstatě nevíme proč), že některé aspekty skutečnosti, experimentu, jakoby již svým předurčením spadaly do některé z těchto forem. Nelze samozřejmě popřít, že většina těchto forem měla již při svém vzniku původní a zcela určitý intuitivní obsah. Ale tak jak byly vědomě zbavovány tohoto obsahu, byl jim zároveň dán jiný obsah, v němž spočívá jejich význam a který umožnil vkládat do nich nové interpretace a splnit také nové úkoly při zpracování výsledků.

[16]) Zejména na počátku rozvoje axiomatické metody jsme byli také svědky vzniku podivných struktur, které nebylo možno aplikovat a jejichž jedinou výhodou bylo, že jejich studium umožnilo přesně určit význam každého axiomu, vyjasnit, jaké má důsledky změna nebo vynechání některého axiomu. V tomto období bylo možné podlehnout dojmu, že to jsou jediné výsledky, které lze od této metody očekávat.

[17]) Nemáme zde na mysli námitky, které pramení z používání pravidel formální logiky v úvahách axiomatické teorie: tyto námitky souvisí s logickými obtížemi, na které naráží teorie množin. Poznamenejme jen, že tyto obtíže mohou být překonány tak, že nevzniknou žádné pochybnosti o přesnosti úvah. Uveďme v této souvislosti již citované práce H. Cartana a J. Dieudonné.

Budeme-li jen takto chápat slovo ,,forma", můžeme říci, že axiomatická metoda je ,,formalismem". Jednota, kterou dává matematice axiomatická metoda, není formálně logickou kostrou, není jednotou kostry bez života. Je živnou substancí organismu v jeho vývoji, poddajným a plodným nástrojem výzkumů, kterého vědomě používají ve své práci všichni velcí matematikové-myslitelé, počínaje Gaussem, všichni ti, kteří ve smyslu výroku Lejeuna a Dirichleta se vždy snažili ,,nahradit výpočty idejemi".

Přeložili Jiří Fábera a Jiří Gregor

O ZÁKLADECH A STYLU MODERNÍ MATEMATIKY

(Ke stati N. Bourbakiho)

A. A. LJAPUNOV, Moskva

Řešení konkrétních matematických problémů a tvoření obecných matematických teorií je věnována rozsáhlá moderní matematická literatura. V tom spočívá také význam moderní matematiky. Nesmírně široká problematika a neustále vzrůstající počet těch, kteří na nových problémech pracují, vede však k tomu, že orientace v dnešní vědecké literatuře je stále obtížnější.

Tendence vytvořit systém v soudobé matematice jsou tedy velmi aktuální.

Nejpronikavějším kolektivním dílem v tomto směru jsou ,,Základy matematiky", které vydává početný kolektiv francouzských matematiků pod pseudonymem ,,N. Bourbaki". Některé svazky tohoto díla byly již přeloženy do ruštiny. Úplné vydání tohoto díla v ruském jazyce by bylo velmi užitečné. Poznamenejme ještě, že v nejrůznějších oblastech matematiky neustále vzrůstá počet prací, jež na tyto monografie navazují.

Stať N. Bourbakiho ,,Architektura matematiky" má programový charakter. Autoři v ní vysvětlují názor na moderní matematiku, který plně uplatnili ve svém díle. Proto je tato stať zajímavá pro široký okruh čtenářů, zabývajících se matematikou.

Významnou zvláštností kolektivu Bourbaki je, že jeho členy jsou významní, tvůrčím způsobem pracující matematikové, a tak tendence k systematisaci je harmonicky skloubena se snahou nalézt nové významné směry rozvoje matematiky a rozpracovávat nové matematické teorie. Je možné bez přehánění říci, že Bourbaki je nejvýznamnějším jevem v soudobé matematice. Tento kolektiv dosáhl velmi významných výsledků v rozmanitých oblastech matematiky, např. v topologii, v topologické algebře, v algebraické geometrii, v teorii funkcí více komplexních proměnných, v teorii algebraických čísel, ve funkcionální analyse. Systém v matematice, který vypracovává Bourbaki, získává stále více stoupenců mezi matematiky na celém světě a má neustále větší vliv na moderní vědu.

Právě proto, že velmi vysoko oceňuji činnost Bourbakiho, zdá se mi být velmi nepříjemná nepřesnost obecně filosofických závěrů, formulovaných v závěrečné části stati ,,Architektura matematiky". Autoři velmi přesvědčivě dokazují, že axiomatická metoda studia matematických struktur je progresivní.