Josef Kvasnica

Teorie Čerenkovova záření

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 3, 302--308

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137372

FYSIKA

TEORIE ČERENKOVOVA ZÁŘENÍ

JOSEF KVASNICA, *FTJF Praha*

V roce 1934 objevil P. A. Čerenkov při studiu záření γ na kapaliny zvláštní namodralé záření vycházející z ozařované kapaliny. Zpočátku se domníval, že jde o luminiscenci, avšak podrobný výzkum ukázal, že objevené záření nemůže být luminiscenčního původu. S. I. Vavilov vyslovil domněnku, že záření je způsobeno elektrony vytrženými z atomů kapalin pod vlivem záření γ (tzv. Comptonovské elektrony).

Při zabrzdění elektronů vzniká, jak známo, specifické tzv. brzdné záření s charakteristickým spektrálním a úhlovým rozložením. Podrobný výzkum, provedený Čerenkovem v sérii prací, věnovaných novému záření, ukázal, že spektrální a úhlové rozdělení tohoto záření se podstatně liší od podobných charakteristik brzdného záření. Správné teoretické vysvětlení nového efektu podali sovětští fysikové I. J. Tamm a J. M. Frank. Za objev a interpretaci Čerenkovova efektu byla P. A. Čerenkovovi, I. M. Frankovi a I. J. Tammovi udělena Nobelova cena za fysiku pro r. 1958.

Jak známo, rovnoměrně přímočaře se pohybující elektron (ani libovolná jiná elektricky nabitá částice) nemůže vyzařovat elektromagnetickou energii. Tento výsledek lze snadno pochopit i bez podrobných výpočtů na základě relativistické ekvivalentnosti všech inerciálních systémů. Elektron v klidu nevyzařuje elektromagnetickou energii, proto dle principu ekvivalence inerciálních systémů nemůže vyzařovat energii ani žádný elektron pohybující se rovnoměrně přímočaře.

K podobnému výsledku vede i kvantová teorie: vyzařování kvant γ rovnoměrně přímočaře se pohybujícími elektrony je neslučitelné se zákony zachování hybnosti a energie. O tom se ještě zmíníme později.

I. J. Tamm a I. M. Frank však ukázali, že předchozí závěry by nemusely platit, kdyby se elektricky nabité částice mohly pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla. Závěry teorie relativity, naprosto potvrzené experimentem, však nedovolují, aby se hmotná částice pohybovala rychlostí větší než je rychlost světla ve vakuu $c = 3 \,.\, 10^{10}$ cm/sec. V prostředí s indexem lomu n je fázová rychlost světla $c' = c/n$ (a grupová rychlost v případě disperse je ještě menší), takže elektron se může pohybovat rychlostí větší než je rychlost světla v daném prostředí, avšak stále menší, než je rychlost světla ve vakuu. V posledním případě se tudíž elektron v daném prostředí pohybuje rychleji než elektromagnetické pole, které sám vytvořil, odtrhuje se od svého vlastního pole. Jinými slovy dochází k vyzařování elektromagnetických vln v důsledku předbíhání pole částicí, která vytvořila toto pole. Zde nutno dle Franka a Tamma hledat příčinu záření, objeveného Čerenkovem. Jelikož toto záření je způsobeno elektronem pohybujícím se v daném prostředí rychlostí větší než je rychlost světla v daném prostředí, nazývá se také zářením nadsvětelného elektronu. Jde tudíž o analogii zvukových vln vytvořených pohybem střely anebo letadla, pohybujícího se nadzvukovou rychlostí.

Podrobný výpočet provedený na základě těchto úvah ukázal, že záření vzniklé při nadsvětelné rychlosti elektronu, má stejné vlastnosti jako záření objevené Čerenkovem: je soustředěno v úzkém kuželu a má stejné spektrální rozdělení intensity.

Podáme stručný nástin klasické teorie Čerenkovova záření.

Maxwellovy rovnice v hmotném prostředí s dielektrickou konstantou ε a permeabilitou μ zní

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0\,, \tag{1}$$

$$\operatorname{div} \mathbf{D} = 4\pi\varrho\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{D}}{\partial t} = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,. \tag{2}$$

Zde $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$ jsou intensity elektrického a magnetického pole, $\mathbf{D}$, $\mathbf{B}$ elektrická a magnetická indukce. Ve většině látek vztah mezi $\mathbf{D}$ a $\mathbf{E}$ a mezi $\mathbf{B}$ a $\mathbf{H}$ lze pokládat za lineární, tj.

$$\mathbf{D} = \varepsilon\mathbf{E}\,, \quad \mathbf{B} = \mu\mathbf{H}\,. \tag{3}$$

V rovnicích (2) značí ϱ hustotu elektrického náboje a $\mathbf{j}$ proudovou hustotu, tj. množství náboje, které projde jednotkou plochy za 1 sec.

Použitím vztahů (3) lze systém rovnic (1) a (2) přepsat do tvaru

$$\operatorname{div}(\mu\mathbf{H}) = 0\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\mu\mathbf{H}) = 0\,, \tag{1'}$$

$$\operatorname{div}(\varepsilon\mathbf{E}) = 4\pi\varrho\,, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}(\varepsilon\mathbf{E}) = \frac{4\pi}{c}\mathbf{j}\,. \tag{2'}$$

V obecném případě materiálové konstanty ε, μ jsou funkcemi (kruhové) frekvence ω příslušného elektromagnetického pole.

Je-li známo řešení pole $\mathbf{E}$, $\mathbf{H}$, je množství vyzářené energie dáno známým Poyntingovým vztahem

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{c}{4\pi}\oint(\mathbf{E}\times\mathbf{H})\,.\,\mathrm{d}\mathbf{f}\,, \tag{4}$$

kde $\mathrm{d}\mathbf{f}$ je element plochy, přes níž se integruje.

Řešení rovnic (1) a (2) lze nejsnáze nalézt pomocí elektromagnetických potenciálů $\mathbf{A}$, φ. Jelikož identicky platí div rot $\equiv 0$, lze $\mathbf{B}$ vyjádřit jako rotor jistého vektoru $\mathbf{A}$ tj.

$$\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}\,. \tag{5}$$

Dle definice operace rot jsou komponenty $\mathbf{B}$ dány vztahy:

$$B_x = \frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\,, \quad B_y = \frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\,, \quad B_z = \frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\,. \tag{5'}$$

Z rovnice $\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{B}}{\partial t} = 0$ pak plyne dosazením $\mathbf{B} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\operatorname{rot} \mathbf{A} = 0\,, \quad \operatorname{rot}\left(\mathbf{E} + \frac{1}{c}\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t}\right) = 0\,. \tag{6}$$

Je však $\text{rot grad} \equiv 0$, tudíž výraz v závorce musí být gradientem jisté funkce, kterou označíme $-\varphi$. Řešení rovnice (6) lze pak psát ve tvaru

$$\boldsymbol{E} = -\frac{1}{c}\frac{\partial \boldsymbol{A}}{\partial t} - \text{grad}\,\varphi\,. \tag{7}$$

Pole $\boldsymbol{H} = 1/\mu\, \boldsymbol{B}$ je určeno rovnicí (5), tj.

$$\boldsymbol{H} = \frac{1}{\mu}\,\text{rot}\,\boldsymbol{A}\,. \tag{8}$$

Veličinu $\boldsymbol{A}$ nazýváme vektorovým potenciálem a φ skalárním potenciálem. Znalost potenciálů $\boldsymbol{A}$, φ umožňuje určit pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$, potřebné k výpočtu vyzářené energie. Zbývá tudíž nalézt rovnice pro potenciály $\boldsymbol{A}$, φ.

Za tím účelem dosadíme do rovnic (2′) výrazy (7) a (8). Po snadné úpravě dostaneme

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j} + \text{grad}\left(\text{div}\,\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t}\right), \tag{9}$$

$$\varepsilon\left(\Delta\varphi + \frac{1}{c}\frac{\partial}{\partial t}\,\text{div}\,\boldsymbol{A}\right) = -4\pi\varrho\,, \tag{10}$$

$$\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Vzhledem k tomu, že pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ jsou určena diferenciálními operacemi, potenciály $\boldsymbol{A}$, φ nejsou určeny jednoznačně a lze na ně naložit vhodné podmínky, které zjednoduší rovnice (9), (10). Zdůrazněme však, že pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ zůstávají určená jednoznačně. Tuto podmínku zvolíme v obvyklé formě (tzv. Lorentzova podmínka)

$$\text{div}\,\boldsymbol{A} + \frac{\varepsilon\mu}{c}\frac{\partial\varphi}{\partial t} = 0\,. \tag{11}$$

Poslední člen v rovnici (9) pak vypadne a v (10) nahradíme $\text{div}\,\boldsymbol{A}$ výrazem $-\dfrac{\varepsilon\mu}{c}\dfrac{\partial\varphi}{\partial t}$. Po elementární úpravě tak dostaneme hledané rovnice pro potenciály $\boldsymbol{A}$, φ:

$$\Delta \boldsymbol{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \boldsymbol{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\boldsymbol{j}\,, \tag{12}$$

$$\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = -4\pi\varrho\,. \tag{13}$$

Poslední vztahy představují známé vlnové rovnice pro potenciály vytvořené náboji s hustotou ϱ a proudovou hustotou $\boldsymbol{j}$.

Zbývá ještě specifikovat výrazy pro hustotu ϱ a proudovou hustotu náboje $\boldsymbol{j}$. Podle dnešních představ lze elementární částice s velikou přesností zobrazit jako geometrické body — náboj částice je pak různý od nuly pouze v tom bodě, kde se nalézá tato částice. Má-li částice celkový náboj e_0 (u elektronu $e_0 = 4{,}8 \,.\, 10^{-10}$ abs. j. elst.), lze pro hodnotu ϱ náboje v klidu psát

$$\varrho_{\text{klid}} = e_0\delta(\boldsymbol{r}) = e_0\delta(x)\,\delta(y)\,\delta(z)\,. \tag{14}$$

Zde $\boldsymbol{r}$ značí radiusvektor částice a δ tzv. Diracovu funkci δ. Poslední je definována vztahy

$$\delta(x) = 0 \quad \text{pro} \quad x \neq 0\,, \quad \int_{-\infty}^{+\infty} \delta(x)\,\mathrm{d}x = 1\,. \tag{15), (16}$$

Z (14) pak pro celkový náboj q vychází

$$q = \int q_{\text{klid}}\,\mathrm{d}V = e_0 \int \delta(x)\,\mathrm{d}x \int \delta(y)\,\mathrm{d}y \int \delta(z)\,\mathrm{d}z = e_0\,,$$

jak ostatně i musí být.

Pohybuje-li se částice rychlostí $\mathbf{v}$, nutno vzít v úvahu, že za čas t částice (rovnoměrně přímočaře se pohybující) projde vzdálenost vt; hustota náboje v bodě $\mathbf{r}$ a čase t je pak dána vztahem

$$\varrho = e_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,. \tag{17}$$

Analogicky pro proudovou hustotu $\mathbf{j} = \varrho\mathbf{v}$ nalezneme

$$\mathbf{j} = e_0\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,. \tag{18}$$

Funkce $\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)$ je různá od nuly pouze v bodě $\mathbf{r} = \mathbf{v}t$, tj. v tom bodě, kde se v daný časový okamžik nalézá částice.

Pomocí (17) a (18) lze přepsat rovnice (12) a (13) do tvaru, bezprostředně vhodného pro praktický výpočet

$$\Delta \mathbf{A} - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2 \mathbf{A}}{\partial t^2} = -\frac{4\pi\mu}{c}\,e_0\mathbf{v}\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,, \tag{19}$$

$$\varepsilon\left(\Delta\varphi - \frac{\varepsilon\mu}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2}\right) = -\,4\pi e_0\delta(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)\,. \tag{20}$$

Poslední vztahy jsou výchozími rovnicemi pro různé problémy ztrát energie elektricky nabitých částic při průchodu hmotným prostředím.

Místo rychlosti světla c ve vakuu vystupuje v těchto rovnicích rychlost

$$c' = \frac{c}{\sqrt{\varepsilon\mu}}\,, \tag{21}$$

tudíž veličina

$$n = \sqrt{\varepsilon\mu} \tag{22}$$

má smysl indexu lomu v daném prostředí. Jak jsme se již zmínili, pro homogenní prostředí tato veličina závisí na frekvenci ω.

Ve skutečnosti stačí řešit pouze jednu z rovnic (19) a (20). Známe-li řešení pro φ, vektorový potenciál $\mathbf{A}$ je dán vztahem

$$\mathbf{A} = \frac{\varepsilon\mu}{c}\,\mathbf{v}\varphi = \frac{n^2}{c}\,\mathbf{v}\varphi\,. \tag{23}$$

Vyšetříme nejdříve kvalitativně řešení, jež poskytují rovnice (19) a (20). Budeme zkoumat, za jakých podmínek systém rovnic (19) a (20) může mít za řešení rovinnou elektromagnetickou vlnu

$$\varphi = \text{konst}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}\,, \quad \mathbf{A} = \frac{n^2}{c}\,\mathbf{v}\,\text{konst}\,\mathrm{e}^{i\mathbf{k}(\mathbf{r} - \mathbf{v}t)}\,. \tag{24), (25}$$

Plochami stejné fáze této vlny jsou roviny kolmé k vlnovému vektoru $\mathbf{k}$ a pohybující se v prostoru rychlostí v, rovnou rychlosti částice.

Ve všech bodech prostoru, kromě bodu $\boldsymbol{r} = \boldsymbol{v}t$, kde se nalézá v daný časový okamžit pohybující se náboj, pravou stranu rovnice (20), resp. (19) lze položit rovnu nule (funkce δ je rovna nule), tj. vzít homogenní systém rovnic

$$\Delta\varphi - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\varphi}{\partial t^2} = 0\,, \quad \Delta\boldsymbol{A} - \frac{n^2}{c^2}\frac{\partial^2\boldsymbol{A}}{\partial t^2} = 0\,. \qquad (26), (27)$$

Dosazením $\varphi = \text{konst}\; e^{ik(r-vt)}$ do (26) dostaneme po snadné úpravě

$$k^2 - \frac{n^2(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v})}{c^2}(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v})^2 = 0\,, \qquad (28)$$

kde $\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v} = kv\cos\vartheta$ a $n(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v})$ je funkce skalárního součinu $\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v}$. Lze snadno nahlédnout, že $\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v}$ značí kruhovou frekvenci pole, tj.

$$\omega = \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v} = kv\cos\vartheta\,. \qquad (29)$$

Tento výsledek je okamžitě patrný, srovnáme-li výraz (24) s obecným výrazem

$$e^{i(\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{r} - \omega t))} \qquad (30)$$

pro rovinnou vlnu. Vidíme, že místo ω v rovnici (24) vystupuje výraz $\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v}$, tj. kruhová frekvence, závislá na úhlu směru pohybu částice $\boldsymbol{v}$ a směru šíření pole $\boldsymbol{k}$.

Dosazením $\omega = \boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v}$ a $\boldsymbol{k}\,.\,\boldsymbol{v} = kv\cos\vartheta$ do (28) získáme po úpravě důležitý vztah

$$\cos\vartheta = \frac{\frac{c}{n(\omega)}}{v} = \frac{\frac{c}{n}}{v} = \frac{c'}{v}\,, \qquad (31)$$

kterému lze vyhovět zřejmě pouze v tom případě, je-li

$$c' = \frac{c}{n} \leqq v\,, \qquad (32)$$

tj. je-li fázová rychlost světla v daném prostředí menší než rychlost částice.

Ve vakuu je $n = 1$, $c' = c$ a rovnice (32) by dávala vztah $c \leqq v$, což však není možné z relativistických důvodů. Ostatně pro $v > c$ by byl $\cos\vartheta > 1$, což nelze splnit pro reálné úhly.

Docházíme tak k závěru, že v hmotném prostředí může dojít k vyzařování elektromagnetických vln, je-li rychlost rovnoměrně přímočaře se pohybující elektricky nabité částice větší, než je fázová rychlost světla (elektromagnetických vln) v daném prostředí.

To je první část výsledku získaného Frankem a Tammem. Aby bylo toto záření možno ztotožnit s Čerenkovovým zářením, nutno nalézt ještě celkovou intensitu záření a zjistit, zda souhlasí s experimentálními výsledky P. A. Čerenkova.

Jak jsme se už zmínili, vyzářená energie se spočte pomocí Poyntigovy rovnice (4).

K tomu je však nutno nalézt obecné řešení systému rovnic (19) a (20) a pomocí něho určit pole $\boldsymbol{E}$, $\boldsymbol{H}$ (viz rovnice (7) a (8)). Provedením integrace v rovnici (4) pak dostaneme hledanou intensitu záření.

Podrobný výpočet je zdlouhavý a vyžaduje speciálních znalostí Besselových funkcí, proto jej nebudeme uvádět.

Pro vyzářenou energii dostaneme nakonec Frankovu—Tammovu rovnici

$$J = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{e_0^2 v}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \omega \,\mathrm{d}\omega\,, \tag{33}$$

kde integrace se vztahuje na celou oblast frekvencí ω, pro kterou je splněna podmínka vzniku Čerenkovova záření, tj. oblast $v > \frac{c}{n(\omega)}$.

Zvolíme-li pohyb částice ve směru osy x, pak $v = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ a rovnici (33) lze přepsat do tvaru

$$J = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{e_0^2 v}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \mu(\omega)\, \omega \,\mathrm{d}\omega\,,$$

odkud pro vyzářenou energii na jednom cm dráhy elektronu plyne

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}x} = \frac{e_0^2}{c^2} \int \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \mu(\omega)\, \omega \,\mathrm{d}\omega\,. \tag{34}$$

Různé frekvence Čerenkovova záření jsou tudíž zastoupeny s intensitou $J(\omega)$ rovnou

$$J(\omega) = \frac{e_0^2 v}{c^2} \left(1 - \frac{c^2}{v^2 n^2(\omega)}\right) \mu(\omega)\, \omega\,. \tag{35}$$

Toto spektrální rozdělení je zcela odlišné od spektrálních rozdělení brzdného záření a je ve velmi dobré shodě s Čerenkovovými experimenty.

Čerenkovovo záření vzniká nejen u nadsvětelných elektronů, ale u všech elektricky nabitých částic (protony, atomová jádra, mesony a pod.) a taktéž při nadsvětelném pohybu částic bez náboje, avšak s nenulovým magnetickým momentem (např. neutron). Jde tudíž o obecný efekt při průchodu elektricky nabitých anebo zmagnetovaných částic hmotou a vzniká přirozená otázka jeho využití. Různé typy počítačů jsou probrány ve zvláštním článku, zde se pouze stručně zmíníme o některých možnostech.

Měření intensity Čerenkovova záření umožňuje pomocí (35) vypočítat rychlost v a tudíž i energii $E = \frac{mc^2}{\sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}}$ letící částice.

Výhodnější je užít k měření rychlosti v vztah (31) $\cos\vartheta = \frac{c}{nv}$, $v = \frac{c}{n\cos\vartheta}$. Měřením úhlu ϑ směru pohybu částice a směru emise záření umožňuje vypočítat rychlost (resp. energii) částice. Na tomto principu jsou založeny různé typy Čerenkovových počítačů. Jimi byl např. objeven antiproton.

Před nedávnem přišel sovětský fysik V. I. Veksler se zajímavým návrhem použít Čerenkovova efektu k tzv. koherentnímu urychlování nabitých částic. Stručně naznačíme hlavní myšlenku této metody.

Ukazuje se, že k stejnému efektu jako při pohybu elektronu v prostředí by došlo, kdyby byl elektron v klidu a prostředí se pohybovalo rychlostí v vzhledem k elektronu. I. J. Tamm ukázal, že v takovém případě jsou ztráty energie a síla, působící na elektron, stejné jako při přímém Čerenkovově efektu.

Avšak dosažení ohromných rychlostí makroskopických těles naráží na technické potíže, proto by se mohlo zdát, že prověřit tento obrácený efekt není možné. V. I. Veksler navrhl použít za pohybující prostředí dostatečně husté svazky rychlých elektronů (anebo protonů), urychlených v urychlovači. Na klidový elektron umístěný ve svazku, bude působit zrychlující síla se strany urychlených elektronů svazku. Ukazuje se, že tímto způsobem by mohl elektron dosáhnout enormně vysokých rychlostí. Po překonání některých technických obtíží realisace tohoto návrhu se stanou Čerenkovovy urychlovače důležitým nástrojem nukleární fysiky.

Doposud jsme mluvili o Čerenkovově efektu na základě klasické elektrodynamiky; vzniká otázka jeho kvantově mechanická interpretace.

Jak známo, energie elektronu E je spojena s jeho hybností p a klidovou hmotou m_0 vztahem

$$E = c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2}\,. \tag{36}$$

Foton (kvant γ) má energii $\hbar\nu = \hbar\omega$ a hybnost $h\boldsymbol{k}$, kde $\boldsymbol{k} = 1/\lambda\,\boldsymbol{n}$ je vlnový vektor ($\boldsymbol{n}$ je jednotkový vektor ve směru šíření). Po vyzáření kvanta γ ($h\boldsymbol{k}$) hybnost elektronu bude $\boldsymbol{p}'$

$$\boldsymbol{p}' = \boldsymbol{p} - h\boldsymbol{k}\,. \tag{37}$$

Zákon zachování energie poskytuje vztah

$$c\sqrt{p^2 + m_0^2c^2} - h\nu = c\sqrt{p'^2 + m_0^2c^2}\,. \tag{38}$$

Řešením posledních dvou rovnic dostaneme pro úhel ϑ mezi původním směrem elektronu a vyzářeným kvantem γ

$$\cos\vartheta = \frac{\boldsymbol{p}\,.\,\boldsymbol{k}}{pk} = \frac{\nu}{kv} + \frac{hk}{2p}\left(1 - \frac{\nu^2}{k^2c^2}\right). \tag{39}$$

Ve vakuu je frekvence ν spojena s k vztahem $\nu = ck$, takže rovnice (39) přivádí k absurdnímu vztahu $\cos\vartheta = c/v > 1$. To značí, že v kvantové teorii, právě tak jako v klasické, rovnoměrně přímočaře se pohybující elektron (obecně žádná nabitá částice) nemůže vyzařovat elektromagnetickou energii.

V prostředí s indexem lomu n místo rychlosti c je třeba psát $c' = \frac{c}{n}$ a $v = c'k = \frac{ck}{n}$, takže (39) bude znít

$$\cos\vartheta = \frac{c}{nv} + \frac{\Lambda}{2\lambda}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right), \tag{40}$$

kde $\Lambda = \frac{h}{p}$ je de Broglieova vlna elektronu a $\lambda = \frac{1}{k}$ vlnová délka vyzářeného světla. Při přechodu ke klasické fysice nutno vzít $h \to 0$ (tj. v našem případě $\Lambda \to 0$), takže formule (40) přechází na známý nám již klasický výraz (31).

Za použití obvyklých metod kvantové elektrodynamiky lze vypočíst ztráty energie elektronu Čerenkovova zářením pro případ, kdy jsou důležité kvantové efekty. Příslušné rovnice nalezené B. L. Ginzburgem a A. A. Sokolovem, zde uvedeme bez důkazu

$$-\frac{\mathrm{d}U}{\mathrm{d}t} = \frac{e_0^2 v}{c^2}\int \omega\left[1 - \frac{c^2}{n^2(\omega)\,v^2} - \frac{c\Lambda}{nv}\left(1 - \frac{1}{n^2}\right) - \frac{\Lambda^2}{4\lambda^2}\left(1 - \frac{1}{n^4}\right)\right]\mu(\omega)\,\mathrm{d}\omega\,. \tag{41}$$

V převážné většině případů však kvantové efekty lze zanedbat a rovnice (41) přechází v klasický výraz (35).