V. Boltjanski; V.A. Jefremovič

O topologii. I

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 4 (1959), No. 3, 265--288

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137371`

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK IV — ČÍSLO 3

MATEMATIKA

O TOPOLOGII I[1])

V. G. BOLTJANSKIJ, V. A. JEFREMOVIČ

Topologie je jedna z nejmladších geometrických disciplin. Přes velkou názornost a geometrický charakter jejích základních myšlenek je však jedním z nejabstraktnějších oborů soudobé matematiky. V dnešních učebnicích topologie se čtenář setkává se značně obtížným a abstraktním aparátem, který je sice nezbytný pro přesnou výstavbu topologie, který však čtenáři ztěžuje proniknout k podstatě předmětu a poznat jeho základní ideje a metody. Tento abstraktní aparát je možno srovnat se stavebním lešením, které je pro postavení budovy nezbytné, které však brání poznat snadno její architekturu. Jediné poměrně obecně přístupné dílo o topologii byla kniha P. S. Alexandrova a V. A. Jefremoviče[2]), vydaná v roce 1936. Dnes je tato kniha již bibliografickou vzácností a kromě toho trochu již zastarala.

Cílem tohoto článku je seznámit čtenáře s nejzákladnějšími fakty a myšlenkami topologie. Autoři se pokusili o snadný a názorný výklad, snažíce se o to, aby čtenář nabyl všeobecné a názorné představy o tomto předmětu. Vědomě ponechávají stranou druhořadé podrobnosti a někdy i upouštějí od matematické přesnosti.

Dnešní topologie se dělí na „obecnou topologii" a na „kombinatorickou (algebraickou) topologii". Obecné topologii je věnována druhá část tohoto článku[3]) (první část obsahuje výklad základních pojmů); vyžaduje na čtenáři jistou schopnost abstraktně myslet, je proto o něco obtížnější, než část první a třetí. Třetí část článku je věnována kombinatorické topologii. Tato část je geometričtější a přimyká se přímo k části první.

1. PŘEDMĚT TOPOLOGIE

Vybudování topologie je spjato se jmény Euler, Poincaré, Fréchet, Riesz a jinými. Jako samostatná matematická disciplina existuje topologie teprve něco přes 50 let.

V základech každé matematické discipliny je vždy jistá vedoucí myšlenka. Prolíná celou disciplinu a dává ji tvářnost. Co je touto vedoucí myšlenkou v topologii? Touto vedoucí myšlenkou je myšlenka spojitosti. S tímto

[1]) В. Г. Болтянский (Москва) и В. А. Ефремович (Иваново), Очерк основных идей топологии, Matěmatičeskoje prosveščenije č. 2, 1957.

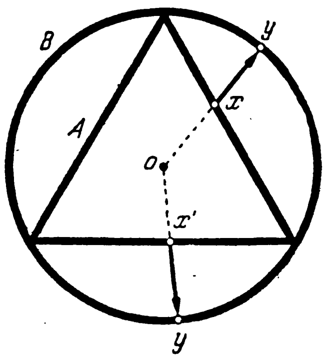
[2]) П. С. Александров и В. А. Ефремович, Очерк основных понятий топологии, Gostěchizdat, M.-L., 1936.

[3]) Vyjde v příštím čísle tohoto časopisu.

pojmem se setkáváme již v matematické analyse; tam však není vedoucím motivem, nedoznává proto plného rozvoje. V topologii je myšlenka spojitosti základní a vedoucí.

Spojité funkce a spojitá zobrazení.

V matematické analyse se setkáváme s různými funkcemi, nejčastěji s funkcemi spojitými. V topologii se pojmy funkce a spojitost zobecňují. Řekneme-li, že y je funkcí x a napíšeme $y = f(x)$, máme tím na mysli, že y závisí na x, tj. každé hodnotě x je zcela určitým způsobem přiřazena jistá odpovídající hodnota y. Funkce může být zadána formulí (např. $y = \log(x^2 + 1)$), nebo může být spjata s geometrickými vlastnostmi nějakého objektu (známe-li poloměr kružnice, můžeme oblouk kruhové výseče určit jako funkci obsahu této výseče), nebo může být definována jinak. Nakonec bereme funkci zcela obecně, tj. předpokládáme, že y jistým způsobem závisí na x.



Obr. 1.

Funkce $y = f(x)$ nemusí být definována pro všechna reálná čísla x. Např. funkce $y = \log x$ je definována jen pro kladná x, funkce $y = \arcsin \log x$ je definována jen pro x, která jsou mezi čísly $\frac{1}{10}$ a 10 (včetně těchto čísel) apod. Obecně řečeno, každá funkce $y = f(x)$ má jistý *definiční obor*, což je množina těch x, pro něž jsou definovány odpovídající hodnoty $y = f(x)$.

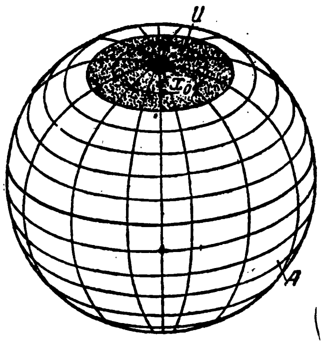
Zadat funkci znamená každému bodu x z jisté množiny **A** (z definičního oboru) přiřadit určitý bod $f(x)$ z jisté množiny **B**. To je obecný pojem funkce. Říkáme také, že *na množině* **A** *je zadána funkce, jejíž hodnoty jsou v množině* **B**, neboli, že je zadáno *zobrazení* množiny **A** do množiny **B**.

Řekneme-li, že zobrazíme jednu množinu do jiné množiny, zdaleka tím nemyslíme jen množiny reálných čísel. Označme např. znakem **A** množinu bodů stran rovnostranného trojúhelníka a znakem **B** množinu bodů na kružnici jemu obsané (obr. 1). Pak promítání bodů stran tohoto trojúhelníka na opsanou kružnici z jejího středu je zobrazením množiny **A** do množiny **B**.

Obraťme se nyní k pojmu spojité funkce. Připomeňme, že funkce $y = f(x)$ se nazývá *spojitou* v bodě x_0, jestliže pro hodnotu x, která se „málo" liší od hodnoty x_0, se příslušná funkční hodnota $f(x)$ rovněž „málo" liší od funkční hodnoty $f(x_0)$. Přesněji: *Funkce $y = f(x)$ je spojitá v bodě x_0, jestliže k libovolnému danému číslu $\varepsilon > 0$ existuje takové číslo $\delta > 0$, že pro každou hodnotu x, která se od hodnoty x_0 liší o méně než o δ, příslušná funkční hodnota $f(x)$ se od hodnoty $f(x_0)$ liší o méně než o ε.* Aby tato definice měla smysl, je nutné, aby i v množině **A**, i v množině **B** byla definována *vzdálenost* dvou bodů. Jde-li o množiny reálných nebo komplexních čísel, bereme za tuto vzdálenost číslo $|a - b|$, (kde a, b jsou reálná nebo komplexní čísla).

Dohodneme se na tom, že množinu **U** všech bodů, které se od bodu x_0 liší o méně než o δ, budeme nazývat δ *okolím* bodu x_0 a analogicky množinu **V** všech bodů, které se od $f(x_0)$ liší o méně než o ε, *okolím* ε bodu $f(x_0)$. Okolím bodu na číselné ose je tedy malá úsečka na této ose (bez krajních bodů), jejímž středem je daný bod. Je-li např. **A** plocha kulová, x_0 její „severní pól", pak okolím **U** bodu x_0 v **A** je kulový vrchlík (obr. 2). Čím menší je tento vrchlík, tím menší je okolí **U** bodu x_0. Obecně nazýváme ε-okolím (v útvaru **A**!) bodu x_0 útvaru **A** tu část útvaru **A**, která padne dovnitř plochy kulové o středu v bodě x_0 a o poloměru ε.

Pomocí této terminologie se spojitost zobrazení (tj. funkce) definuje takto: *Zobrazení f je spojité v bodě x_0, jestliže k jakkoli malému danému okolí* **V** *bodu $f(x_0)$ (v množině* **B**) *existuje (v množině* **A**) *tak malé okolí* **U** *bodu x_0, že všechny body, odpovídající při zobrazení f bodům okolí* **U**, *leží v okolí* **V**. Jinak řečeno, celé okolí **U** se zobrazí do okolí **V**.



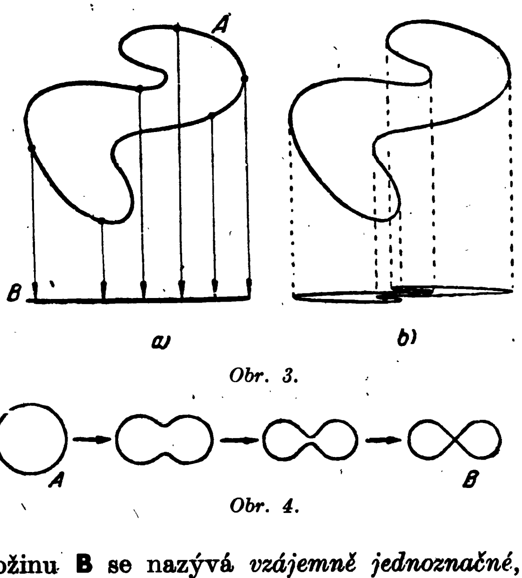
Obr. 2.

Snadno nahlédneme, že např. zobrazení, schematicky znázorněné v obr. 1, je spojité v každém bodě x_0 obrazce **A**.

Je-li zobrazení f množiny **A** do množiny **B** spojité v **každém** bodě x množiny **A**, říkáme krátce, že zobrazení f je *spojité v* **A**.

Názorně řečeno znamená spojitost zobrazení f, že „vzájemně blízké" body množiny **A** přejdou (zobrazením f) opět ve „vzájemně blízké" body množiny **B**, tj. při zobrazení f nedojde k „nespojitostem", nedojde k poruchám v celistvosti množiny **A**. Poznamenejme, že přitom vzájemně různé body množiny **A** se mohou zobrazit na týž bod množiny **B**, mohou vznikat „překrytí", „splývání" apod.

Budiž např. **A** rovinná křivka, **B** přímka, která s ní leží v jedné rovině (obr. 3a). Pak **promítání** křivky **A** do přímky **B** je zobrazení množiny **A** do množiny **B**, a toto zobrazení je spojité, V tomto zobrazení dochází k „překrytím", schematicky znázorněným v obr. 3b. Uveďme ještě jako příklad spojité zobrazení kružnice do „osmičky", spočívající v „slepení" jistých dvou bodů kružnice v jeden bod (obr. 4).



Obr. 3.

Obr. 4.

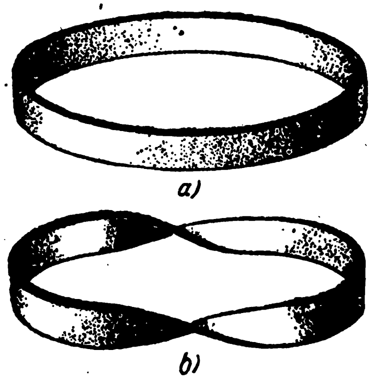
Homeomorfní zobrazení.

Spojité zobrazení nemá tedy „nespojitostí", může však vést k „slepování". Mimořádně důležitá jsou zobrazení, která nejen nemají nespojitostí, ale která nevedou ani k slepování. Taková zobrazení se nazývají *homeomorfiemi*. Probereme tento pojem podrobněji.

Zobrazení f množiny **A** na množinu **B** se nazývá *vzájemně jednoznačné*, (nebo také *prosté*), jestliže se na každý bod y množiny **B** zobrazí právě jeden bod množiny **A**. V takovém zobrazení žádné dva vzájemně různé body množižiny **A** nepřejdou v týž bod množiny **B**, „neslepí" se při zobrazení *f*. Kromě toho je **každý** bod množiny **B** přiřazen některému bodu množiny **A**, tj. množina **A** se zobrazí na celou množinu **B** a nikoli jen na její část. K vzájemně jednoznačnému zobrazení *f* množiny **A** na množinu **B** lze definovat ***inversní zobrazení*** množiny **B** na množinu **A**; k tomu je nutno každému bodu y množiny **B** přiřadit ten bod x množiny **A**, který zobrazením *f* přejde právě v bod y. Inversní zobrazení k *f* budeme označovat znakem f^{-1}.

Příkladem vzájemně jednoznačného zobrazení může být středové promítnutí stran rovnostranného trojúhelníka na jeho opsanou kružnici (ze středu této kružnice), znázorněné v obr. 1.

Zobrazení *f* útvaru **A** na útvar **B** se nazývá ***homeomorfním zobrazením*** neboli ***homeomorfismem***, je-li především vzájemně jednoznačné, a za druhé vzájemně spojité, tj. je-li spojitým nejen zobrazení *f*, ale také zobrazení inversní f^{-1}. Zobrazení z obr. 1 je příkladem takového homeomorfismu.



a)

b)

Obr. 5.

Lze-li dva útvary **A** a **B** zobrazit homeomorfně jeden na druhý, říkáme, že jsou *homeomorfní*. Např. trojúhelník, nebo obecněji mnohoúhelník je homeomorfní s kružnicí. Názorně si můžeme homeomorfismus představit takto: mysleme si, že oba útvary jsou „zhotoveny" z pevné (netrhající se) pružné látky, např. z gumy, tak, že je lze libovolně natahovat a deformovat, aniž se poruší, natrhnou, slepí apod. Je-li potom možno takovými deformacemi jeden z nich „navléci" na druhý, jsou oba útvary homeomorfní. To však neznamená, že obráceně lze každé dva homeomorfní útvary deformacemi v prostoru přeměnit jeden v druhý. Představme si např. dva útvary, nakreslené v obr. 5. V obr. 5a je souvislý pás, homeomorfní s pláštěm válce, v obr. 5b je souvislý pás dvakrát „stočený"[4]. Oba útvary jsou homeomorfní (proč?), ač deformacemi bez natržení a slepování je nelze vzájemně v sebe převést. Důkaz této skutečnosti není jednoduchý[5].

Zde je poučné srovnat pojmy homeomorfismu útvarů a shodnosti útvarů. V geometrii se vyšetřují zobrazení zvláštního typu, tzv. ***pohyby***, tj. přemísťování útvarů jako tuhých celků, beze změn vzdáleností (bez deformací). Dva útvary, které lze takovým pohybem převést jeden v druhý, se nazývají v geometrii shodnými (kongruentními), tj. pokládají se za stejné (z geometrického hlediska). V topologii se vyšetřují zobrazení obecnější, zejména pak homeomorfní zobrazení, která nemusejí zachovávat vzdálenosti, která zachovávají pouze souvislost útvarů (tj. které nepřipouštějí roztržení a slepování). Z topologického hlediska se pak pokládají za stejné právě útvary vzájemně homeomorfní.

Plocha kulová, krychle (pojímaná jako plocha), válec (jeho plášť + podstavy), elipsoid apod. jsou vzájemně homeomorfní; žádný z těchto útvarů

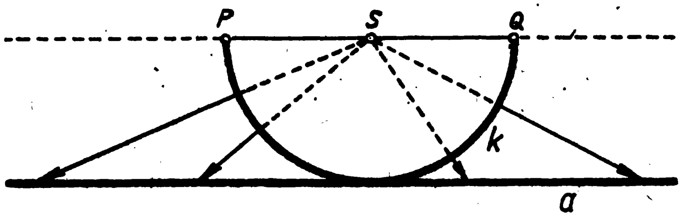
[4]) Oba útvary jsou v obr. 5 nakresleny tak, jako by měly „tloušťku". To je jen pro názornost. Čtenář si musí tuto tloušťku odmyslet. Jde tu o plochy v matematickém smyslu, které tloušťky nemají.

[5]) Základní myšlenku tohoto důkazu najde čtenář v třetí části tohoto článku.

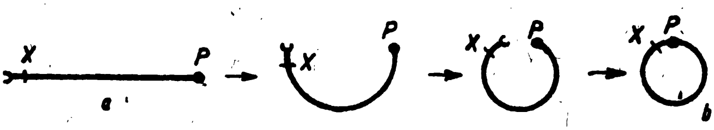
však není homeomorfní s anuloidem (torem). Tvar anuloidu má např. duše automobilového kola, nebo povrch záchranného pásu (obr. 6a). Povrch tělesa zobrazeného v obr. 6b je homeomorfní s anuloidem. Písmena **G**, **L**, **M**, **S** (myslíme-li si je jako jednorozměrné čáry) jsou vzájemně homeomorfní. Také písmena **E**, **Y**, **T** jsou vzájemně homeomorfní. Není však homeomorfní žádné písmeno prvé skupiny s žádným písmenem skupiny druhé. Písmeno **B** zase není homeomorfní s žádným jiným písmenem ap.

Podívejme se ještě na jeden příklad homeomorfismu. Vezměme půlkružnici k o středu S s tečnou a (obr. 7), rovnoběžnou s průměrem PQ. Promítněme každý bod půlkružnice k z jejího středu S na přímku a. Pak každý bod půlkružnice k kromě bodů P a Q se promítne do jednoho jediného bodu přímky a. Vyloučíme-li body P a Q, dostaneme útvar k_1 (půlkružnici k bez bodů P a Q) homeomorfní s přímkou a. Přímka je tedy homeomorfní s půlkružnicí bez jejích krajních bodů. Naproti tomu celá půlkružnice (i s krajními body) je homeomorfní s úsečkou (půlkružnici lze napřímit). Je tedy přímka homeomorfní s úsečkou bez krajních bodů, neboli — jak také říkáme — s *otevřenou úsečkou* (*otevřeným intervalem*).

Obr. 6.



Obr. 7.



Obr. 8.

Ještě jeden příklad (obr. 8): Označme písmenem a úsečku bez levého krajního bodu (zleva otevřený interval). Budiž f zobrazení této úsečky na kružnici b, která vznikne „slepením“ úsečky v uzavřenou čáru. Toto zobrazení je vzájemně jednoznačné (neboť k slepení dvou bodů zde nedochází vzhl. k tomu, že úsečka a je množinou jediným krajním bodem P). Zobrazení je také spojité, jak snadno nahlédneme. Toto zobrazení f není však homeomorfismem, neboť inversní zobrazení f^{-1} není spojité v bodě P, odpovídajícím pravému krajnímu bodu úsečky a: blíží-li se totiž bod X na kružnici b neomezeně bodu P zleva (ve smyslu pohybu hodinových ručiček), neblíží se odpovídající bod X na úsečce a bodu P, tj. při zobrazení f^{-1} se útvar b „trhá“.

Topologické invarianty.

Nyní již není obtížné vidět, čím se zabývá topologie. Poněvadž z topologického hlediska se dva homeomorfní útvary pokládají za stejné, je patrné, že v topologii se budeme zabývat takovými vlastnostmi útvarů, které se nezmění, přejde-li útvar v útvar s ním homeomorfní. Dva „topologicky stejné" útvary musí mít totiž „topologicky stejné" vlastnosti. *Vlastnosti útvarů, které se nemění homeomorfním zobrazením, se nazývají topologické vlastnosti útvarů neboli topologické invarianty.* Topologie se pak zabývá (mimo jiné) studiem topologických invariantů útvarů.

Trojúhelník má tři vrcholy. Tato vlastnost není však topologickým invariantem, neboť čtverec má vrcholy čtyři, kružnice nemá vrcholů, a čtverec i kružnice jsou s trojúhelníkem homeomorfní.

Jaké vlastnosti útvarů jsou tedy topologicky invariantními? Dále, co máme rozumět pod pojmem „útvar" (kterého se zde užívá jen pro názornost)? Na tyto otázky je nutno odpovědět, chceme-li mít jasnou představu o tom, co se v topologii studuje; tím se v dalším budeme zabývat.[6])

2. NEJJEDNODUŠŠÍ TOPOLOGICKÉ INVARIANTY

Úloha topologických invariantů.

K tomu, abychom mohli tvrdit, že dva útvary jsou vzájemně homeomorfní, stačí konkrétně udat zobrazení jednoho útvaru na druhý a dokázat, že toto zobrazení je homeomorfismem. Právě tak jsme ukázali výše, že obvod trojúhelníka je homeomorfní s kružnicí jemu opsanou, že přímka je homeomorfní s úsečkou bez krajních bodů (s otevřeným intervalem) atd.

Jak však dokážeme, že dva útvary nejsou homeomorfní? Vždyť z toho, že nedovedeme najít homeomorfní zobrazení jednoho útvaru na druhý, ještě neplyne, že takové homeomorfní zobrazení neexistuje. Mluvili jsme o tom, že kulová plocha není homeomorfní s anuloidem, že písmena **L** a **T** nejsou vzájemně homeomorfní, a čtenář sotva bude pochybovat o tom, že např. kulová plocha a anuloid jsou skutečně topologicky „různé" (tzn. že nejsou vzájemně homeomorfní). Je však něco jiného nepochybovat o tom, že kulová plocha a anuloid nejsou vzájemně homeomorfní, a něco jiného umět to dokázat!

K důkazu, že dva útvary nejsou vzájemně homeomorfní, se používá topologických invariantů. Nejčastěji se používá invariantů, které jsou čísly (nebo jiné algebraické výrazy), neboť s takovými invarianty se nejlépe pracuje. Dejme tomu, že jsme stanovili pravidlo, pomocí něhož se každému útvaru přiřadí určité číslo, a to tak, že čísla přiřazená homeomorfním útvarům jsou vždy stejná. Takové číslo pak charakterisuje jistou vlastnost útvaru, a homeomorfním zobrazením se zachovává, tj. je topologickým invariantem. Jestliže čísla, charakterisující útvary **A**, **B** jsou různá, nemohou být **A** a **B** homeomorfními.

Dnes je známo mnoho topologických invariantů. Některé nejjednodušší zde probereme.

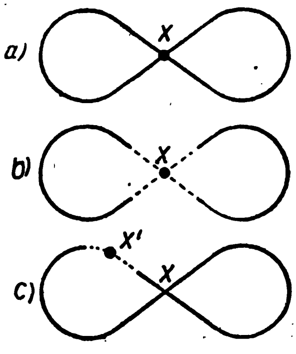
[6]) Konečně, co to je vůbec „spojitost", „homeomorfie", tím se budeme zabývat v 2. části tohoto článku. *Pozn. překl.*

Počet složek (komponent).

Písmeno **CH** je útvar složený ze dvou „částí“, nijak spolu nesouvisících. Ostatní písmena latinské abecedy (nepřihlížíme-li k háčkům, čárkám, kroužkům, např. Č, Ů apod.) tvoří souvislé útvary, složené z jedné části. Počet „částí“, z nichž je útvar složen (počet *složek, komponent* útvaru) je topologickým invariantem: jsou-li dva útvary homeomorfní, jsou složeny ze stejného počtu složek (komponent). Písmeno **CH** není tedy homeomorfní s písmeny **O**, **P**, **S**, a pod. Počet komponent je nejjednodušším topologickým invariantem.

Dělicí body.

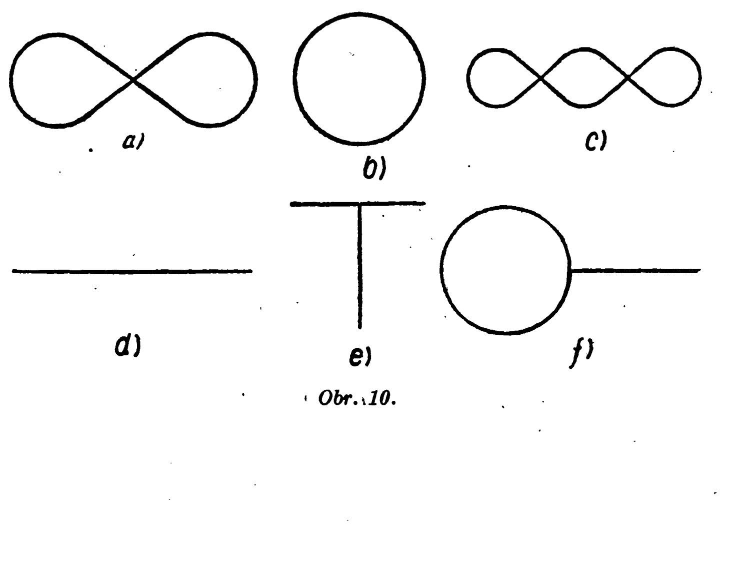
V osmičce (obr. 9a) je bod X takový, že odstraníme-li z osmičky libovolně malé jeho okolí, dostaneme útvar nesouvislý — tj. útvar složený z více než jedné komponenty (obr. 9b). Body této vlatsnosti nazýváme *dělicí body* útvaru. Snadno nahlédneme, že kromě bodu X nemá osmička jiných dělicích bodů. Zvolíme-li libovolný bod X' různý od X (obr. 9c), můžeme vždy najít takové jeho okolí, že po odstranění tohoto okolí z útvaru zůstane útvar souvislý (tj. složený z jedné komponenty).



Obr. 9.

Osmička v obr. 10a má tedy jeden jediný dělicí bod. Není obtížné poznat, že kružnice v obr. 10b nemá žádného dělicího bodu, čára v obr. 10c že má dva dělicí body. Úsečka v obr. 10d má všechny body dělicí kromě bodů krajních, všechny body čáry v obr. 10e kromě tří bodů (krajních) jsou dělicí, útvar v obr. 10f (homeomorfní např. s písmeny **P**, **e**) má nekonečně mnoho bodů dělicích a nekonečně mnoho bodů, které dělicími nejsou.

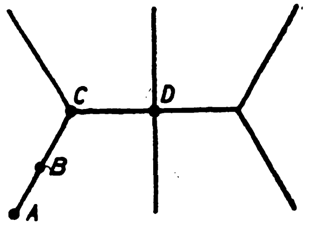
Počet dělicích bodů i počet bodů, které nejsou dělicími, jsou topologické invarianty. Je-li x dělicí bod útvaru **A**, a je-li f homeomorfní zobrazení **A** na **B**, je $f(x)$ dělicí bod útvaru **B**. Z toho např. plyne, že žádné dva útvary z obr. 10a—f nejsou vzájemně homeomorfní.



Obr. 10.

Indexy bodů.

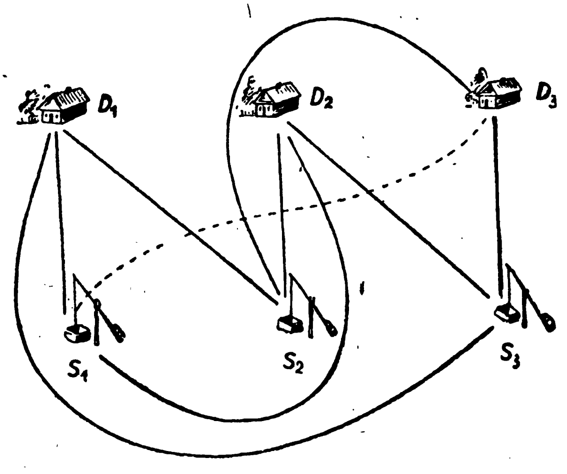
Ukážeme další topologický invariant, zvaný *index bodu*. Budiž **A** útvar složený z konečného počtu oblouků a X jeho bod. Počet oblouků útvaru **A**, vycházejících z bodu X, se nazývá *index* bodu X v útvaru **A**. Index bodu je topologický invariant. V obr. 11 je útvar typu ruského písmene ж. Jeho bod A má index 1, bod B index 2, bod C index 3, bod D index 4. Počet bodů o indexu 1, 3, 4 atd. je topologickým invariantem. Pomocí pojmu indexu bodu se snadno dokáže, že např. ruská písmena Ю a Ф nejsou vzájemně homeomorfní (jen pomocí výše uvedených topologických invariantů není tento důkaz možný).



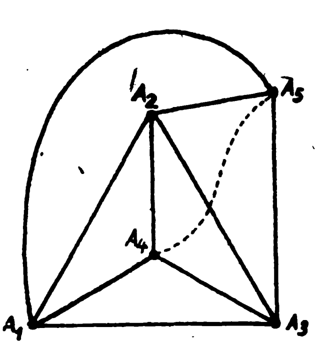
Obr. 11.

Unikursální čáry.

Zajímavým topologickým invariantem je unikursálnost čáry. Čáru, složenou z konečného počtu oblouků, nazýváme *unikursální*, lze-li ji „nakreslit jedním tahem", tj. projít ji spojitým pohybem, aniž některou částí (některým obloukem) projdeme dvakrát. Taková vlastnost je zřejmě také topologickým invariantem. Není to však invariant nový, nýbrž invariant odvozený z indexu bodu. Dá se totiž ukázat, že *čára je právě tehdy unikursální, nemá-li buď vůbec bodů s lichým indexem, nebo má-li takové body právě dva*[7]).



Obr. 12.



Okr. 13.

Rovinné útvary.

Útvar nazveme *rovinným*, je-li homeomorfní s nějakým útvarem ležícím v rovině. Vlastnost útvaru být rovinným je zřejmě topologickým invariantem. Velmi známé jsou dva příklady s tímto invariantem spojené.

---

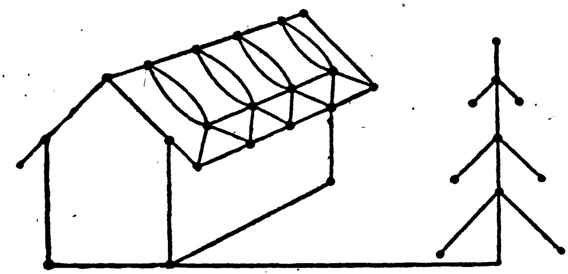
[7]) Důkaz najde čtenář v knihách: Hans Rademacher und Otto Toeplitz, *Von Zahlen und Figuren*, Berlín, J. Springer 1930, ruský překlad Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, ONTI, M. L., 1936; dále Д. О. Шклярский, Н. Н. Ченцов, И. М. Яглом, Избранные задачи и теоремы элементарной математики, č. 2. (задача 382), Gostěchizdat, M., 1952.

Příklad 1: (domky a studně). V rovině je dáno šest bodů D_1, D_2, D_3 (domky), S_1, S_2, S_3 (studně). Otázka zní: je možné, aby se od každého domku vedla (v rovině) stezka ke každé studni tak, aby se žádné dvě nekřížily? Odpověď je záporná — nelze.

Cestiček, spojujících každý domek s každou studní, je celkem devět. Jen osm však lze vést tak, aby se žádné dvě nekřížily (v obr. 12 jsou zakresleny všechny stezky kromě stezky D_3S_1)[8]).

Útvar, sestávající z šesti bodů D_1, D_2, D_3, S_1, S_2, S_3 a devíti spojnic D_1S_1, D_1S_2, D_1S_3, D_2S_1, D_2S_2, D_2S_3, D_3S_1, D_3S_2, D_3S_3 (spojujících každý bod D s každým bodem S) takových, že žádné dvě spojnice se neprotínají, není rovinný. Tento útvar označíme $\mathbf{P}_1$.

Příklad 2: Vezměme pět bodů A_1, A_2, A_3, A_4, A_5 v rovině a spojme každý s každým čarou (těchto spojnic je $\binom{5}{2} = 10$). Označíme tento útvar $\mathbf{P}_2$. V obr. 13 je plně vyrýsováno devět spojnic, z nichž žádné dvě se neprotínají, desátá A_4A_5 je čárkována. Tuto desátou spojnici již nelze v rovině vést tak, aby neprotala žádnou z prvých devíti spojnic[8]). Dá se ukázat, že tentýž výsledek dostaneme i při jakékoli jiné poloze spojnic daných pěti bodů. Útvar $\mathbf{P}_2$ tedy rovněž není rovinný.



Obr. 14.

Uvedli jsme výše řadu příkladů na útvary, složené z konečného počtu oblouků. Takové útvary nazýváme v topologii *konečné grafy*. Obecně se konečný graf — budeme dále říkat jen *graf*, neboť nekonečné grafy nebudeme uvažovat — definuje takto: Je dán konečný počet bodů (zvaných *vrcholy* grafu), z nichž některé jsou spojeny oblouky vzájemně se neprotínajícími (tyto oblouky nazýváme *hrany* grafu.) Přitom dva vrcholy grafu lze spojit více hranami a jsou také přípustné hrany, které vycházejí a končí v tomtéž vrcholu (tzv. *uzavřené hrany*). Příklad grafu je v obr. 14. Také písmena ruské nebo latinské abecedy lze pokládat za grafy. Útvary $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ z předcházejících příkladů jsou rovněž grafy. Grafy $\mathbf{P}_1$ a $\mathbf{P}_2$ nejsou, jak jsme ukázali, rovinné. Je zajímavé, že tyto dva grafy jsou typické: *není-li nějaký graf rovinný, pak nutně obsahuje (jako část) buď útvar* $\mathbf{P}_1$ *nebo útvar* $\mathbf{P}_2$. Důkaz podal již v roce 1927 sovětský matematik L. S. Pontrjagin, nepublikoval jej však. Nezávisle na Pontrjaginovi podal důkaz této věty a publikoval jej polský matematik K. Kuratowski.[9])

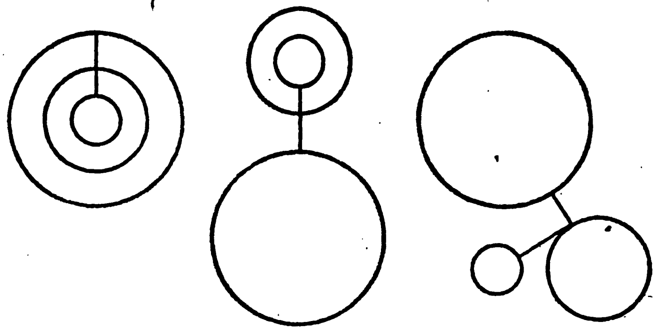
Jordanova věta.

Nakonec promluvíme ještě o jednom topologickém invariantu. Budiž $\mathbf{A}$ rovinný graf. Takový graf je možno obecně v rovině rozmanitě umístit. V obr. 15 např. jsou zobrazeny tři stejné grafy (tj. grafy vzájemně homeomorfní),

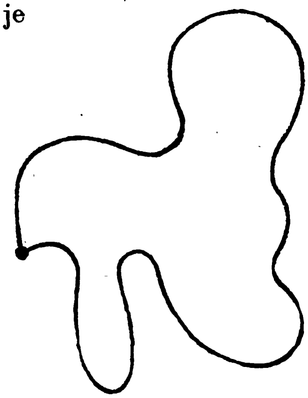
[8]) Viz např. knihu Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, M.-L., Gostěchizdat, 1952.

[9]) Také je zajímavé, že každý graf lze uložit v trojrozměrném prostoru (pro plochy to neplatí — viz dále). *Pozn. překl.*

v rovině různě rozmístěné. Z obrazu je vidět, že ve všech třech případech dělí graf rovinu ve stejný počet částí. *Počet částí,* v něž rovinný graf dělí rovinu, nezávisí na tom, jak je tento graf v rovině rozmístěn. Toto číslo je topologickým invariantem uvažovaného grafu. Důkaz není jednoduchý. Ještě se k věci vrátíme. Např. graf, složený z jediného vrcholu a z jediné hrany (uzavřené), tj. graf homeomorfní s kružnicí (obr. 16), dělí rovinu na dvě části, z nichž jedna se nazývá *vnitřní* a druhá *vnější.* Obecněji *každá jednoduchá uzavřená křivka v rovině* (*tj. křivka homeomorfní s kružnicí*) *rozděluje rovinu na dvě oblasti* (*vnitřní a vnější*). To je částí znamenité *Jordanovy věty.*



Obr. 15.



Obr. 16.

3. TOPOLOGIE PLOCH

Mimořádně zajímavý a důležitý topologický invariant najdeme v pracích geniálního matematika L. Eulera, který jej první popsal. Nazývá se *Eulerovou charakteristikou.* Promluvíme o ní.

Eulerova věta.

Je dobře známo pět tzv. platonských těles: pravidelný čtyřstěn (tetraedr), pravidelný šestistěn (hexaedr, krychle), pravidelný osmistěn (oktaedr), pravidelný dvanáctistěn (dodekaedr) a pravidelný dvacetistěn (ikosaedr) (obr. 17). Počet vrcholů, hran a stěn těchto pěti mnohostěnů (polyedrů) vidíme v následující tabulce.

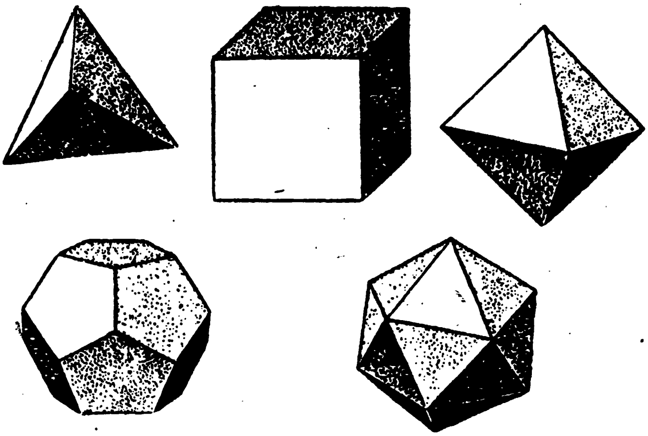
Těleso	Počet vrcholů	Počet hran	Počet stěn
tetraedr	4	6	4
hexaedr	8	12	6
oktaedr	6	12	8
dodekaedr	20	30	12
ikosaedr	12	30	20

Z této tabulky snadno určíme tento vztah mezi počtem vrcholů v, počtem hran h a počtem stěn s:

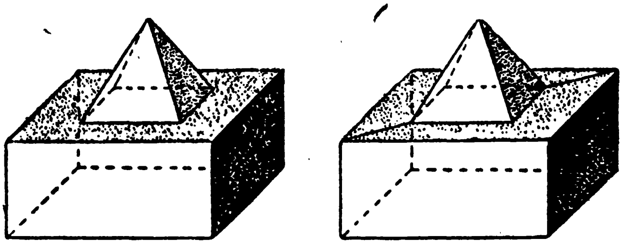
$$v + s = h + 2 . \qquad (1)$$

Vztah (1) platí nejen pro pravidelné mnohostěny ale i pro jiné mnohostěny, např. pro jehlany, hranoly atd. Euler první si této vlastnosti všiml a dokázal ji. Vztah (1) se proto nazývá *Eulerovou větou pro mnohostěny.*

Formulaci této věty zpřesníme. Především si všimněme, že každá stěna každého z výše uvedených těles je mnohoúhelník, tj. útvar homeomorfní s kruhem. Existují mnohostěny, v nichž nejsou všechny stěny homeomorfní



Obr. 17.



a) b)

Obr. 18.

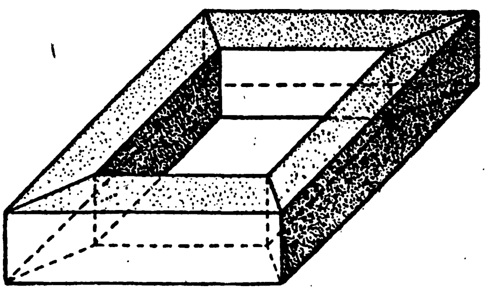
s kruhem. Např. horní vodorovná stěna tělesa zobrazeného v obr. 18a není homeomorfní s kruhem, nýbrž s mezikružím. Tento mnohostěn má 13 vrcholů, 20 hran a 10 stěn, vztah (1) pro něj tedy neplatí. Je tomu tak právě proto, že jedna ze stěn tohoto mnohostěnu není homeomorfní s kruhem. Přidáme-li k tomuto tělesu ještě dvě „hrany“, jak je znázorněno v obr. 18b, tj. rozdělíme-li uvažovanou horizontální stěnu ve dvě, budou všechny stěny takto vzniklého tělesa homeomorfní s kruhem. Vrcholů bude 13, hran 22 a stěn 11, vztah (1) bude platit. Budeme proto v dalším rozumět „mnohostěnem“ takový mnohostěn, jehož každá stěna je homeomorfní s kruhem, tj. jehož každá stěna je omezena jednou uzavřenou čarou, a nikoli např. dvěma čarami, jako stěna, která je homeomorfní s mezikružím.

Povrch každého z výše uvažovaných těles (máme na mysli plochu, která těleso omezuje, nikoli velikost) je dále homeomorfní s plochou kulovou.

Jestliže totiž opíšeme kolem každého z těchto mnohostěnů plochu kulovou a promítneme-li do ní z jejího středu povrch mnohostěnu, dostaneme hledaný homeomorfismus. Povrchy mnohostěnů, vyobrazených v obr. 18a,b jsou rovněž homeomorfní s plochou kulovou. Pro mnohostěn, jehož povrch není homeomorfní s plochou kulovou, vztah (1) neplatí. V obr. 19 např. je zobrazeno těleso, jehož povrch není homeomorfní s plochou kulovou, nýbrž s anuloidem. Tento mnohostěn má 16 vrcholů, 32 hran a 16 stěn. Zde je tedy $v + s = h$, vztah (1) tedy není splněn. Ve větě Eulerově se tak mlčky předpokládá, že povrch uvažovaného mnohostěnu je homeomorfní s plochou kulovou (povrch kteréhokoli konvexního polyedru je vždy homeomorfní s plochou kulovou) Věta Eulerova pak přesněji zní takto:

Pro každý mnohostěn, jehož povrch je homeomorfní s plochou kulovou a jehož každá stěna je homeomorfní s kruhem, platí vztah (1).

Větu Eulerovu můžeme konečně formulovat také čistě topologicky. Všechny vrcholy a hrany polyedru tvoří graf (zvaný *síť* polyedru). Rozřízneme-li povrch mnohostěnu podél hran tohoto grafu, rozpadne se na jednotlivé stěny, tj. útvary homeomorfní s kruhem. Můžeme pak říci (poněkud obecněji než ve větě Eulerově) toto:



Obr. 19.

Budiž dán na ploše kulové (nebo na ploše s kulovou plochou homeomorfní) graf, který „dělí" tuto plochu na části homeomorfní s kruhem. Je-li těchto částí s, počet hran grafu h a vrcholů grafu v, je $v + s = h + 2$.

Důkaz tohoto tvrzení není obtížný (dal by se provést na několika málo stránkách), nebudeme jej však uvádět. Čtenář jej najde v knize Rademachera a Toeplitze (citované v pozn. 7) i jinde.

Eulerova charakteristika.

Probereme některé důsledky, plynoucí z Eulerovy věty. Budeme říkat, že plochu **A** je možno *rozdělit na mnohoúhelníky*, lze li na ní „narýsovat" takový graf, který ji rozděluje na konečný počet „mnohoúhelníků" (tj. částí homeomorfních s kruhem). Označíme počet vrcholů grafu v, počet jeho hran h a počet mnohoúhelníků samých m. Číslo $v - h + m$ se nazývá *Eulerovou charakteristikou* daného dělení plochy **A** na mnohoúhelníky. Plochu kulovou nebo plochu s ní homeomorfní lze rozdělit na mnohoúhelníky. Eulerova věta říká, že u plochy homeomorfní s plochou kulovou nezávisí Eulerova charakteristika na volbě dělení na mnohoúhelníky, že je tedy určena plochou samou — je jejím topologickým invariantem.

Vezměme některé jiné plochy, jež lze rozdělit na mnohoúhelníky. Vezměme plochu **A**, kterou dostaneme z plochy kulové tak, že v ní vyřízneme několik kruhových otvorů (obr. 20). Takovou plochu lze snadno rozdělit na mnohoúhelníky. Přidáme-li k těmto mnohoúhelníkům ještě všechny otvory, dostaneme rozdělení celé kulové plochy na mnohoúhelníky. Označíme zase písmeny v, h, m počet vrcholů, hran a mnohoúhelníků dělicího grafu a písmenem q počet otvorů. Pak dělení celé kulové plochy má v vrcholů, h hran a $m + q$

mnohoúhelníků. Podle Eulerovy věty je tedy $v - h + (m + q) = 2$, tedy

$$v - h + m = 2 - q\,. \tag{2}$$

Plocha **A**, která vznikla z plochy kulové vyříznutím q otvorů, má Eulerovu charakteristiku $2 - q$, ať je dělení plochy **A** na mnohoúhelníky jakékoli. Také v tomto případě je tedy Eulerova charakteristika dána plochou samou, tj. je jejím topologickým invariantem.

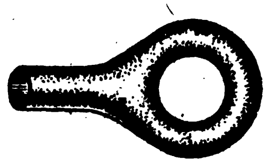
Obr. 20.

Dá se ukázat, že Eulerova charakteristika je topologickým invariantem obecně, tj. pro každou plochu, že tedy nezávisí u žádné plochy na dělení na mnohoúhelníky. To má nesmírný význam. Např. pro výpočet Eulerovy charakteristiky stačí tak volit dělení co nejjednodušší (mající pokud možno co nejméně vrcholů, hran a mnohoúhelníků)[10]).

Slepování.

Vypočteme Eulerovu charakteristiku některých ploch. Poznamenejme především: Buďtež $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ dvě plochy, které mají *kraj* (*břeh*) homeomorfní s kruhem (obr. 21). Spojením krajů těchto ploch (spojením obou ploch podél těchto krajů) dostaneme novou plochu. Tomuto úkonu říkáme *slepování*. Říkáme také, že otvor v ploše $\mathbf{A}_1$ se *zalepí* plochou $\mathbf{A}_2$ (nebo obráceně, otvor v ploše $\mathbf{A}_2$

Obr. 21.

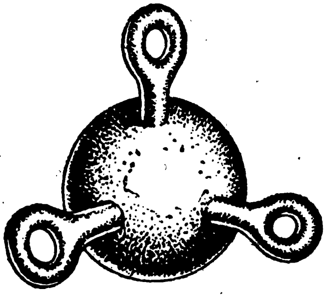


Obr. 22.

se zalepí plochou $\mathbf{A}_1$). Ukazuje se, že Eulerova charakteristika plochy, vzniklé slepením dvou ploch, je rovna součtu Eulerových charakteristik těchto dvou ploch. Můžeme si totiž myslet plochy $\mathbf{A}_1$ a $\mathbf{A}_2$ rozděleny na mnohoúhelníky tak, že kraje obou ploch jsou rozděleny na stejný počet oblouků. Obě plochy slepíme tak, že vrcholy krajů padnou na sebe, tedy také jednotlivé oblouky krajů padnou po dvou na sebe. Plocha vzniklá takovým slepením bude rozdělena rovněž na mnohoúhelníky. Označíme nyní počet vrcholů, hran a mnohoúhelníků plochy $\mathbf{A}_1$ písmeny v_1, h_1, m_1, plochy $\mathbf{A}_2$ analogicky písmeny v_2, h_2,

[10]) Zajímavou topologickou charakteristikou plochy je nejmenší počet barev, jimiž lze položit jakoukoli „mapu“, na ploše nakreslenou (danou jakýmkoli grafem), tak, aby kterékoli dvě sousední „země“ byly různě zbarveny. O úlohách spojených s touto charakteristikou viz např. knihy Е. Б. Дынкин и В. А. Успенский, Математические беседы, M.-L., Gostěchizdat, 1952; Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры, ONTI, M.-L., 1936 (viz také pozn. 7); Р. Курант и Г. Роббинс, Что такое математика, Gostěchizdat, M.-L., 1947; Л. И. Головина и И. М. Яглом, Индукция в геометрии, Gostěchizdat, M.-L., 1956.

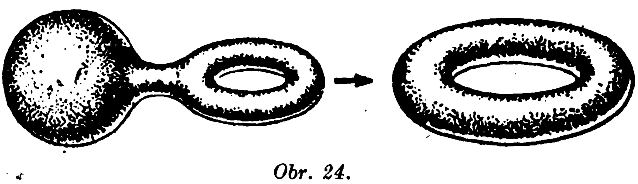
m_2; počet vrcholů (tedy také oblouků) krajů, podél nichž plochy $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ slepujeme, označme m. Bude tedy mít dělení plochy, vzniklé slepením plochy $\mathbf{A}_1$, $\mathbf{A}_2$ právě $v_1 + v_2 - m$ vrcholů (vrcholy, ležící na krajích, nutno v důsledku slepení počítat jen jednou), $h_1 + h_2 - m$ hran a $m_1 + m_2$ mnohoúhelníků. Eulerova charakteristika plochy bude tedy $(v_1 + v_2 - m) - (h_1 + h_2 - m) + (m_1 + m_2) = (v_1 - h_1 + m_1) + (v_2 - h_2 + m_2)$, což dokazuje naše tvrzení.



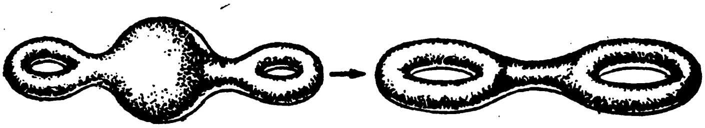
Obr. 23.

Eulerova charakteristika kruhu je rovna jedné. Kruh je totiž homeomorfní s kulovou plochou, která má jeden otvor, ve vztahu (2) je tedy $q = 1$. Zalepíme-li proto otvor kruhem, zvětší se Eulerova charakteristika o 1. Obráceně znamená vyříznutí otvoru, že Eulerova charakteristika se o 1 zmenší. Eulerova charakteristika anuloidu je rovna nule, jak nahlédneme z výpočtu Eulerovy charakteristiky mnohostěnu z obr. 19. Vyřízneme-li v anuloidu otvor, dostaneme útvar (obr. 22) s Eulerovou charakteristikou -1. Tento útvar se nazývá „*ucho*". Z toho, co jsme řekli, plyne, že nalepíme-li k ploše ucho podle některého z otvorů v ploše vyříznutých, dostaneme útvar s Eulerovou charakteristikou o 1 menší.

Nalepíme-li na plochu kulovou podél otvorů v ní vyříznutých ucha, dostaneme tzv. *plochu kulovou s uchy* (obr. 23). Eulerova charakteristika kulové



Obr. 24.



Obr. 25.

plochy s p otvory je $2 - p$, Eulerova charakteristika kulové plochy s p uchy je podle toho, co jsme řekli,

$$2 - 2p \qquad (3)$$

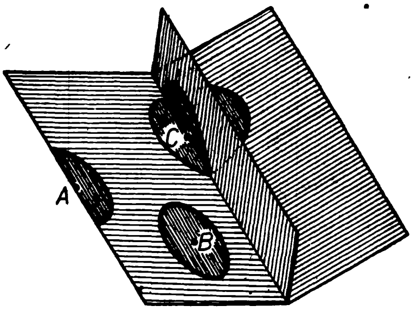
(v obr. 23 je $p = 3$). Plocha kulová s jedním uchem (obr. 24) je homeomorfní s anuloidem, plocha kulová se dvěma uchy je homeomorfní s „preclíkem" (obr. 25).

Plochy.

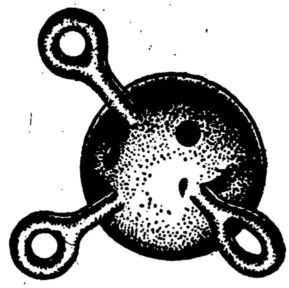
Plocha kulová má v blízkosti kteréhokoli svého bodu topologicky touž strukturu. Vysvětlíme tento pojem. V obr. 26 je zobrazen „sešit" se „třemi listy". Podívejme se na body A, B, C v obraze 26 vyznačené. V blízkosti každého z těchto bodů je útvar stavěn jinak. Okolí bodu A je homeomorfní s kruhem, přičemž bod A je na hranici tohoto okolí. Říkáme v tomto případě, že bod A leží na *kraji* útvaru. Okolí bodu C je složeno ze tří polokruhů o společném průměru. Říkáme, že útvar se v takovém místě *větví*, tj. k některé čáře se přimyká více „listů" zkoumaného útvaru. Konečně okolí bodu B je homeomorfní s kruhem; útvar se zde ani nevětví, ani nemá kraj. Na ploše kulové je okolí každého jejího bodu homeomorfní s kruhem, tj. plocha kulová nemá krajů, ani se nikde nevětví.

Útvar, jehož každý bod má okolí homeomorfní s kruhem, se nazývá plochou[11]).

Plocha nemá krajů a nevětví se, tj. v okolí každého svého bodu je topologicky „stejně stavěná". Plocha kulová s uchy (obr. 23) je plochou. Plocha kulová, anuloid, preclík jsou rovněž plochy. Někdy se uvažují také *plochy s krajem*



Obr. 26.



Obr. 27.

(*břehem*), tj. útvary, které mají kraj, nevětví se však. Kruh je plocha s krajem. Plocha kulová s otvory je rovněž plocha s krajem. Vyřízneme-li v ploše kulové $p + q$ otvorů a p z nich zalepíme uchy (obr. 27), dostaneme plochu s krajem (plochu s p uchy a q otvory). Snadno zjistíme, že Eulerova charakteristika této plochy je $2 - 2p - q$.

Moebiův list.

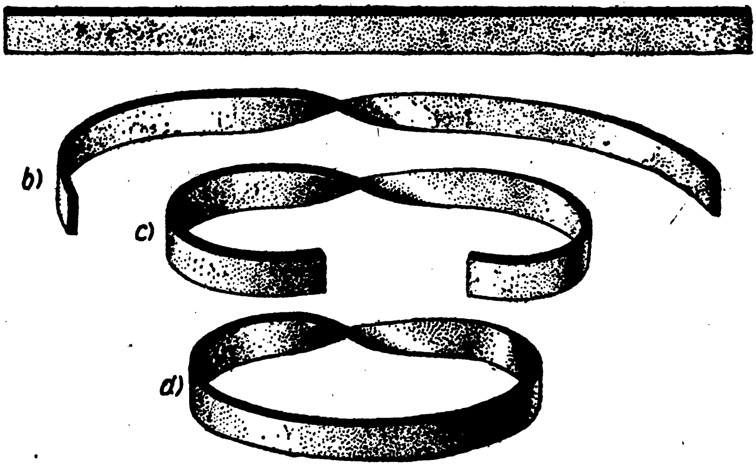
Velmi zajímavá plocha s krajem byla popsána v letech 1862—1865 v pracích německých matematiků Moebia a Listinga. Nazývá se *Moebiův list*. Vytvoří se takto: Delší tvárná stuha obdélníkového tvaru (obr. 28a) se jednou stočí (o 180°, obr. 28b). Pak se její konce vzájemně (již bez stočení) slepí na sebe (obr. 28c,d). Vznikne plocha s krajem (obr. 28d), zvaná Moebiův list. Moebiův list má tu pozoruhodnou vlastnost, že je to jednostranná plocha. Vysvětlíme tento pojem.

Slepíme-li (užší) konce obdélníkové stuhy bez předchozího stočení, dostaneme plochu s krajem, která je zřejmě homeomorfní s pláštěm válce (obr. 29). Zhotovíme-li model této plochy např. z papíru, můžeme ji obarvit z jedné strany jednou barvou, z druhé strany jinou barvou, aniž by se barvy někde slily. To značí, že plocha má dvě strany. Moebiův list takto obarvit nelze. Při jeho barvení se štětcem dostaneme (obr.30) nejprve zpět do místa, z něhož jsme vyšli, avšak na druhou stranu (aniž jsme překročili kraj); pokračujeme-li v barvení, dostaneme se zase do místa, kde jsme barvit začali. Moebiův list

[11]) Je-li navíc omezený (tj. leží-li v dostatečně velké kouli), nazýváme jej uzavřenou plochou. Např. rovina je plocha, která není uzavřená. *Pozn. překl.*

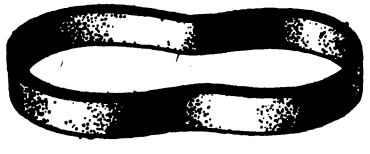
můžeme takto bez překročení kraje obarvit souvisle celý jednou barvou. Je to *jednostranná plocha* (v obr. 30 jsou čísly 1, 2, 3, ... vyznačeny některé polohy štětce při barvení).

Tímto názorným způsobem — barvením — je možno ilustrovat pojem jednostranné nebo dvojstranné plochy jen na modelech, pořízených z nějakého materiálu, tj. mají-li tloušťku. Avšak plocha jako matematický pojem tloušťku nemá. Vysvětlíme proto pojem jednostrannosti plochy i z matematického hlediska.



Obr. 28.

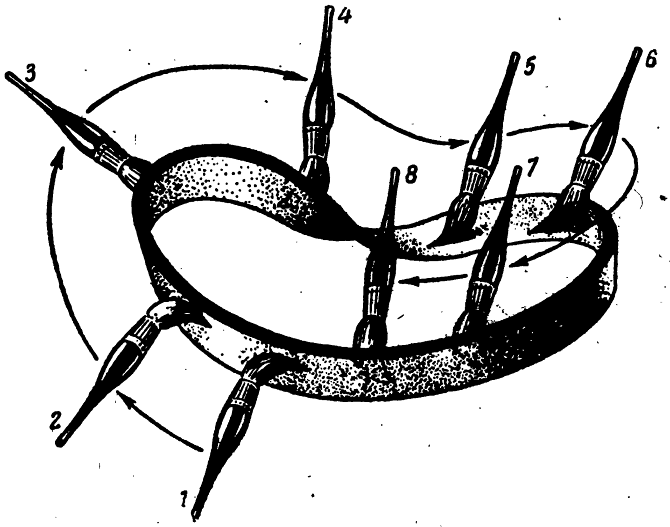
V každém bodě A Moebiova listu můžeme vést dva vektory, oba kolmé k ploše a vzájemně opačně orientované (obr. 31a). Nazýváme je *normálami* (*normálovými vektory*) Moebiova listu v bodě A. Pohybuje-li se nyní bod A po Moebiově listu, pohybuje se s ním i normála v něm vedená (obr. 31b). Mysleme si nyní, že bod A proběhne po jisté čáře celý Moebiův list a vrátí se do původní polohy. Normála, jak si snadno představíme, přejde v normálu proti původní normále opačně orientovanou (obr. 31c). Existuje tedy na Moebiově listu uzavřená cesta té vlastnosti, *že normála, která se po ní pohybuje, se vrátí ne do polohy původní, nýbrž do polohy opačně orientované.* Plochy, které mají tuto vlastnost, se nazývají plochy *jednostranné* (doporučujeme čtenáři přesvědčit se, že na ploše kulové, na anuloidu, na válcovém plášti takových uzavřených cest není). Snadno si představíme, že tento matematický pojem jednostrannosti plochy je ekvivalentní s předcházejícím „barvením“.



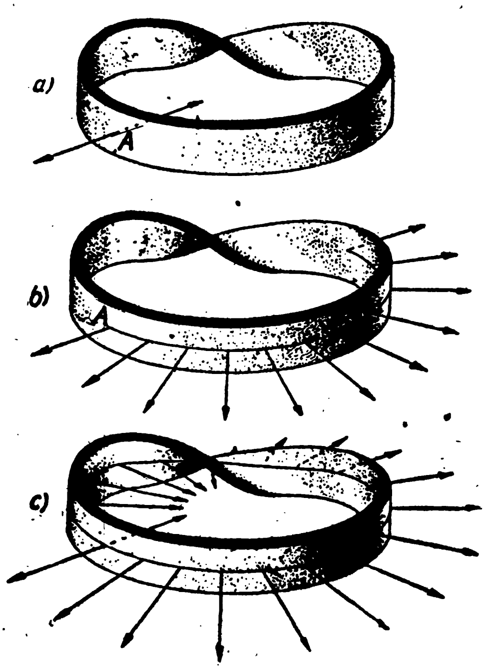
Obr. 29.

Avšak i tento matematický popis jednostranné plochy má své nedostatky. Otázka, je-li plocha jednostranná nebo dvojstranná, spočívá v stavbě plochy *samé*. Mluvíme-li o normále plochy, máme na mysli nejen plochu samu, ale i jak je uložena v prostoru. Přitom např. útvary, zobrazené v obr. 5a,b jsou vzájemně homeomorfní. Je možné podat „vnitřní“ definici jednostranné plochy, tj. definici, která by nebyla spjata s otázkou, jak je plocha uložena v prostoru?

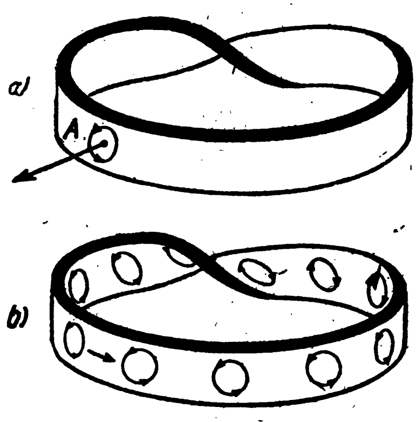
Takovou „vnitřní" definici lze získat snadno. Kolem bodu A, v němž je vedena normála plochy, opíšeme malou kružnici, na níž zvolíme smysl oběhu



Obr. 30.

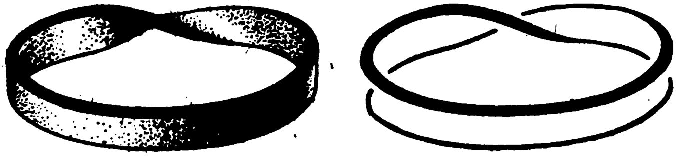


Obr. 31.

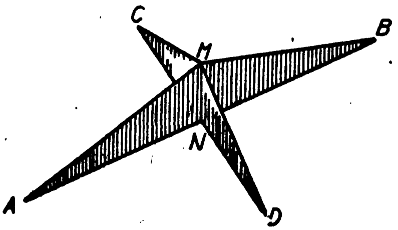


Obr. 32.

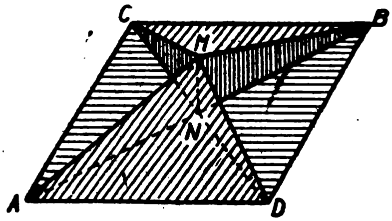
(nějak, pevně) (obr. 32a). Bude-li se nyní pohybovat bod A po ploše, bude se s ním pohybovat spojitě i normála, i kružnice kolem něj opsaná s daným smyslem oběhu. Proběhne-li bod A celý Moebiův list až zpět do výchozí polohy, přejde původní normála v normálu opačně orientovanou; na kružnici, která probíhá plochu spolu s bodem A, se proto změní smysl oběhu po ní (obr. 32b). *Existuje tedy na Moebiově listu uzavřená cesta té vlastnosti, že pohybuje-li se podél ní kružnice, změní se po návratu do výchozí polohy smysl oběhu na ní.* Takové cesty se nazývají cesty *měnící orientaci*. Plochy, na nichž není takových cest, se nazývají *orientovatelné* neboli *dvojstranné* (kulo-



Obr. 33.



Obr. 34.



Obr. 35.

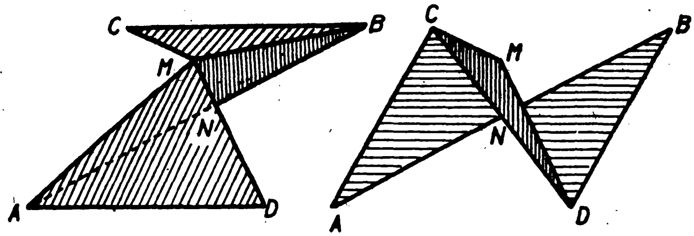
vá plocha, anuloid), plochy, na nichž takové cesty existují, se nazývají *neorientovatelné* neboli *jednostranné* (Moebiův list a jiné plochy, o nichž ještě budeme hovořit). Názorně vzato znamená orientovatelnost plochy, že lze plochu pokrýt malými kružnicemi a zvolit na všech takový smysl oběhu, že „blízké" kružnice budou stejně orientovány (tj. budou mít týž smysl oběhu). Na neorientovaných plochách to možné není.

Moebiův list má další zajímavou vlastnost: jeho *kraj je homeomorfní s kružnicí*. Názorně to vidíme v obr. 33. Tato okolnost nabádá přirozeně k pokusu slepit Moebiův list podél jeho kraje s plochou podél otvoru v ní vyříznutého. To by znamenalo deformovat Moebiův list tak, aby jeho kraj dostal tvar kružnice a Moebiův list sám aby celý ležel po jedné straně roviny této kružnice. Pak by bylo možno provést slepení přímo. V trojrozměrném prostoru však taková deformace Moebiova listu není možná, pokud se nepřipustí, aby se plocha Moebiova listu sama protínala.

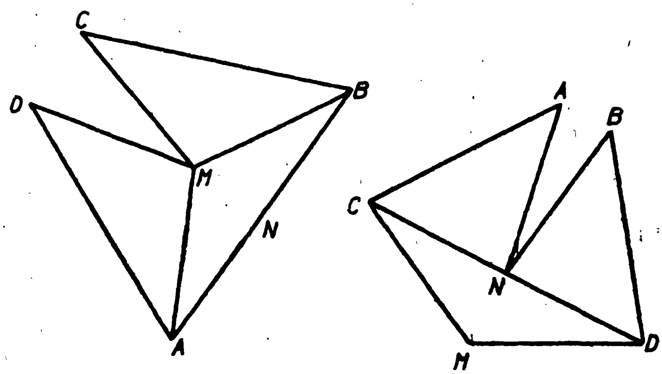
Abychom se o tom přesvědčili, vězměme dva trojúhelníky, ABM a CDM, které se protínají podél společné příčky MN (obr. 34). Připojme k tomuto útvaru ještě čtyři trojúhelníky ANC, BND, AMD a BMC (obr. 35). Tento útvar sám sebe protíná podle úsečky MN a čtyřúhelník $ADBC$ je jeho krajem.

Ukážeme, že jej lze v prostoru uložit tak, že se sám nebude protínat; ukážeme dále, že v tomto případě bude homeomorfní s Moebiovým listem.

Rozřízneme útvar podél úseček CM, DM, AN, BN. Dostaneme dva útvary vyobrazené v obr. 36. Oba útvary narovnáme a slepíme znovu podle týchž úseček. Po narovnání obou částí dostaneme dva rovinné útvary, vyobrazené v obr. 37. Tyto útvary je možno (topologicky) přeměnit v obdélníky, vyobrazené



Obr. 36.

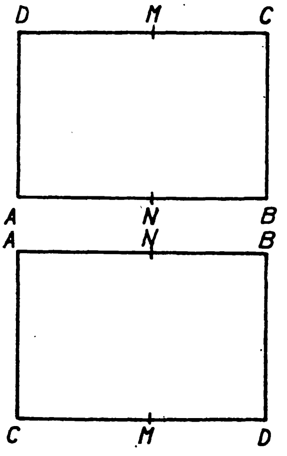


Obr. 37.

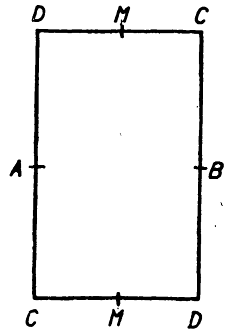
v obr. 38. Slepením obou těchto obdélníků podél úseček AN, BN dostaneme pravoúhlý proužek (obr. 39), který nyní slepíme podél úseček CM a DM. K tomu je ovšem třeba proužek jednou stočit (slepení je třeba provést tak, aby se slepily stejně označené body C, D, M), čímž dostáváme Moebiův list.

V obr. 35 je tedy vyobrazen Moebiův list sám sebe protínající. Vyřízneme-li nyní v nějaké ploše otvor tvaru čtyřúhelníka, můžeme jej zalepit Moebiovým listem z obr. 35 podél kraje $ADBC$. Výsledkem je nová plocha, sama sebe protínající. Této operaci říkáme *zalepování otvorů Moebiovým listem.*

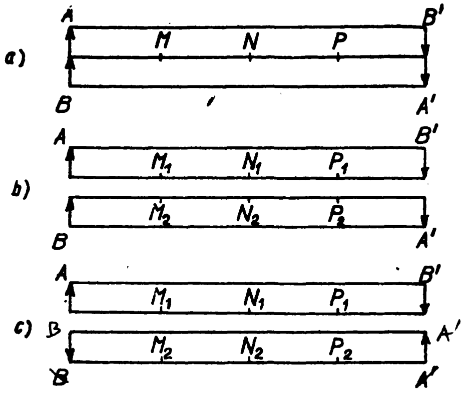
Zalepování otvoru Moebiovým listem lze popsat ještě jiným způsobem, který je někdy vhodnější, než způsob výše popsaný. Rozřízneme Moebiův list podél „střední příčky", tj. podél střední příčky obdélníka, z něhož se Moebiův list utvoří slepením s jedním přetočením (obr. 40a). Slepíme-li úsečku AB s úsečkou $A'B'$ (bod A s bodem A', bod B s bodem B'), dostaneme z nerozříznutého obdélníka $AB'A'B$ Moebiův list. Chceme-li dostat Moebiův list rozříznutý podél „střední příčky“, můžeme nejprve podél střední příčky rozříznout původní obdélník (obr. 40b) a pak provést slepení, jak bylo řečeno před tím. K tomu dolní polovinu rozříznutého obdélníka „převrátíme“ (obr. 40c) a potom obě poloviny položíme, jak je naznačeno v obr. 41. Následující slepení je již snadné (obr. 42). *Vidíme, že podle „střední příčky“ rozříznutý Moebiův list je útvar homeomorfní s mezikružím.* V obr. 40—42 jsou body, M_1, N_1, P_1, M_2, N_2, P_2 body, jež vzniknou z bodů M, N, P rozříznutím obdélníka $AB'A'B$ podél



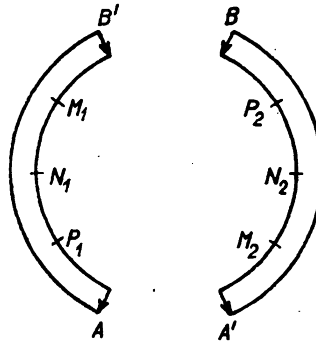
Obr. 38.



Obr. 39.



Obr. 40.

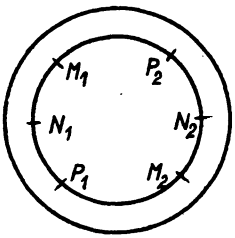


Obr. 41.

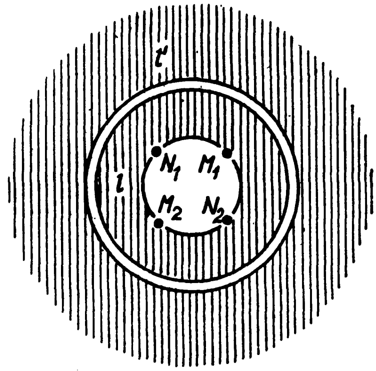
střední příčky. V obr. 42 tvoří dvojice bodů (M_1, M_2); (N_1, N_2); (P_1, P_2) dvojice bodů diametrálně proti sobě položených. Zpětné slepování M_1 s M_2, N_1 s N_2, P_1 s P_2 atd. změní mezikruží opět v Moebiův list. Máme tento výsledek: *Jestliže na jedné z obou kružnic mezikruží slepíme každé dva diametrálně proti sobě položené body, dostaneme Moebiův list.*

Budiž nyní l kraj otvoru na nějaké ploše **A**. Vezmeme úzké mezikruží, vytvořené kolem l a větší z obou jeho kružnic označíme l'. Mezikruží nyní z plochy **A** vyřízneme (obr. 43). Zůstane táž plocha, jenže s otvorem l', který je o něco větší (táž plocha z topologického hlediska, tj. s původní plochou homeomorfní) a mezikruží. Na kružnici l slepíme nyní každé dva diametrálně proti sobě ležící body; dostaneme Moebiův list, a tento nalepíme nyní na zbylou plochu podél otvoru l'. Tím jsme slepili naší plochu (přesněji plochu s ní homeomorfní) s Moebiovým listem. Ihned však nahlédneme, že rozřezání původní plochy podél l' a opětné slepení podél l' nebylo nutné. Stačilo prostě slepit na křivce l každé dva diametrálně proti sobě položené body. *Je tedy slepení každých dvou diametrálně proti sobě ležících bodů okraje kruhového otvoru ekvivalentní se zalepením tohoto otvoru Moebiovým listem.* Poznamenejme, že takové slepení nemusí být vždy proveditelné (v trojrozměrném prostoru), nepřipustí-li se, aby se plocha sama protínala.

Snadno zjistíme, že Eulerova charakteristika Moebiova listu je rovna nule.



Obr. 42.



Obr. 43.

Zalepení otvoru Moebiovým listem nemění tedy Eulerovu charakteristiku útvaru. Vyřízneme-li tedy v ploše kulové q otvorů a zalepíme-li je Moebiovými listy, dostaneme plochu s Eulerovou charakteristikou

$$2 - q\,. \tag{4}$$

Základní věta topologie ploch.

Vyslovíme nyní pozoruhodnou větu o topologické klasifikaci ploch, kterou odvodili v polovině minulého století německý matematik Moebius a francouzský matematik Jordan. Omezíme se na *uzavřené plochy*, tj. na plochy bez krajů, které připouštějí rozdělení na konečný počet mnohoúhelníků. Rovina např. není uzavřená plocha, žádný konečný graf ji nerozdělí na oblasti homeomorfní s kruhem. Úloha topologicky klasifikovat plochu spočívá v tom, *ukázat řadu uzavřených ploch, z nichž žádné dvě by nebyly vzájemně homeomorfní, a které by měly tu vlastnost, že libovolná uzavřená plocha by byla homeomorfní s jednou z nich.* Jinak řečeno, úlohou je provést výčet všech topologicky různých uzavřených ploch.

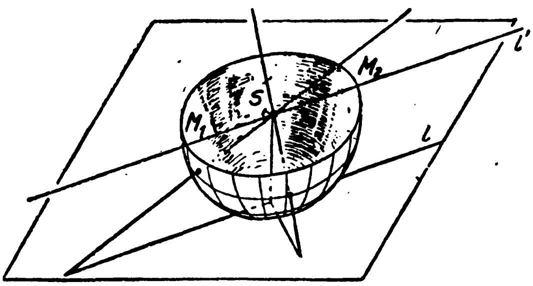
Postup řešení této úlohy je takový:

Označíme znakem $\mathbf{P}_0$ plochu kulovou, znakem $\mathbf{P}_p$ (p je přirozené číslo) kulovou plochu s p uchy, znakem $\mathbf{N}_p$ plochu, která z plochy kulové, z níž je vyříznuto p otvorů, vznikne zalepením těchto otvorů Moebiovými listy. Dostaneme tak nekonečně mnoho ploch

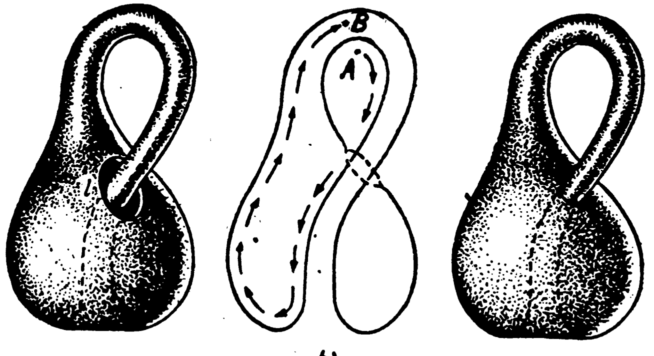
$$\begin{aligned} &\mathbf{P}_0, \mathbf{P}_1, \mathbf{P}_2, \ldots, \mathbf{P}_p, \ldots \\ &\quad \mathbf{N}_1, \mathbf{N}_2, \ldots, \mathbf{N}_p, \ldots \end{aligned} \tag{5}$$

Ukazuje se, že plochy z (5) představují úplnou topologickou klasifikaci uzavřených ploch, tj. jimi je proveden výčet všech topologicky různých typů uzavřených ploch.

Že žádné dvě plochy z horní posloupnosti v (5) nejsou vzájemně homeomorfní, plyne z toho, že mají různé Eulerovy charakteristiky (kulová plocha s p uchy má Eulerovu charakteristiku $2 - 2p$, viz vzorec (3)). Totéž platí o plochách z druhé posloupnosti v (5) (Eulerova charakteristika plochy, vzniklé



Obr. 44.



a) b) c)

Obr. 45.

z plochy kulové vyříznutím p otvorů a jejich zalepením Moebiovými listy, je $2 - p$, viz vzorec (4)). Konečně žádná plocha typu P_p není homeomorfní se žádnou plochou typu N_p, jak plyne ihned z toho, že plochy N_p jsou jednostranné a plochy P_p dvojstranné. Jsou tedy všechny plochy v (5) topologicky různé.

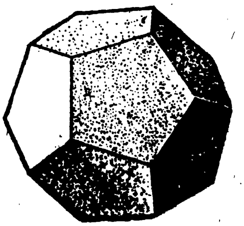
Důkaz, že každá uzavřená plocha je homeomorfní s jednou z ploch v (5), je mnohem obtížnější; nebudeme jej uvádět.

Poznamenejme ještě, že vyřízneme-li v ploše kulové otvory a část z nich zalepíme uchy a část Moebiovými listy, nedostaneme topologicky novou plochu. Nalepování p uch a q Moebiových listů je totiž ekvivalentní s nalepením $2p + q$ Moebiových listů, tj. dá plochu typu N_{2p+q}.

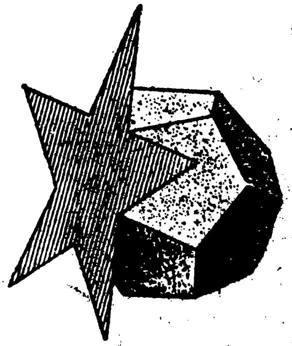
Plochy typu P_p, uvedené v horní posloupnosti v (5), tj. uzavřené dvojstranné plochy, je možno skutečně „zhotovit" v trojrozměrném prostoru, aniž jakkoli samy sebe protínají. U uzavřených jednostranných ploch (typu N_p z druhé posloupnosti v (5)) to možné není. V čtyřrozměrném prostoru lze sestrojit jakoukoli plochu aniž by musela samu sebe protínat.

Příklady.

Obyčejná *euklidovská rovina není uzavřenou plochou.* Uzavřenou plochou se však stane, doplníme-li ji nevlastními body. To provedeme tak, že každé přímce, ležící v euklidovské rovině, přidáme jeden nevlastní bod (bod úběžný, bod nekonečně vzdálený), přičemž týž nevlastní bod náleží také všem přímkám s danou přímkou rovnoběžným; dvěma různoběžkám pak přísluší dva různé nevlastní body. Takto doplněná euklidovská rovina se nazývá *projektivní rovinou.*



Obr. 46.

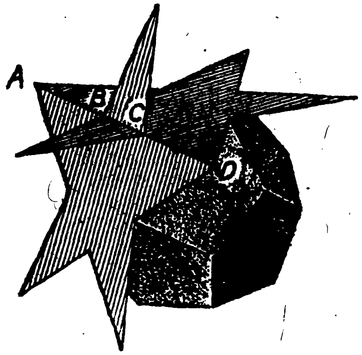


Obr. 47.

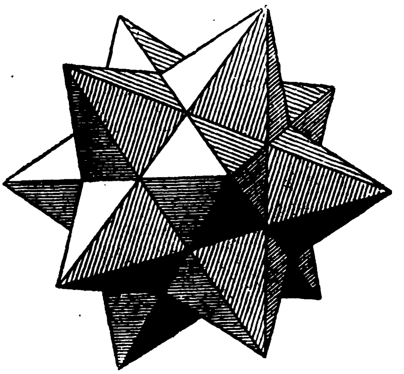
Sestrojme polokulovou plochu tak, aby se dotýkala dané roviny a aby kružnice (hlavní), tvořící kraj polokulové plochy, ležela v rovině s danou rovinou rovnoběžné (obr. 44). Nazveme *otevřenou polokulovou plochou* útvar, který dostaneme z polokulové plochy vynecháním jejího kraje (hlavní kružnice, která plochu omezuje). Středové promítnutí této otevřené polokulové plochy z jejího středu do dané roviny je homeomorfismem mezi danou rovinou a danou otevřenou polokulovou plochou (viz též homeomorfismus, spojený s obr. 7). Nevlastní body zavedeme nyní takto: dotykovým bodem, v němž se polokulová plocha dotýká roviny dané, vedeme přímku l. Středem S polokulové plochy vedeme rovnoběžku l' s přímkou l. Přímky l a l' se „protínají v nekonečnu", takže body M_1 a M_2, v nichž přímka l' protíná krajovou kružnici polokulové plochy, se „promítají" přímkou l' v jeden bod, v nekonečně vzdálený bod přímky l. Není tedy zobrazení polokulové plochy s okrajem na projektivní rovinu vzájemně jednoznačné. Aby se stalo vzájemně jednoznačným, aby se tedy stalo homeomorfismem, je třeba slepit vzájemně každou dvojici diametrálně proti sobě položených bodů na kraji polokulové plochy (např. body M_1 a M_2). Jinými slovy: Projektivní rovina je homeomorfní s polokulovou plochou, zalepenou podél kraje Moebiovým listem. *Je tedy projektivní rovina homeomorfní s plochou typu* $\mathbf{N}_1$, tedy jednostrannou plochou; naproti tomu euklidovská rovina je plocha dvojstranná.

Jiným zajímavým příkladem jednostranné plochy je tzv. Kleinova láhev. V obr. 45a je plocha s krajem l. Pro lepší představu je v obr. 45b její řez. Zalepí-li se otvor l kruhem, vznikne uzavřená plocha sama sebe protínající — tzv. *Kleinova láhev* (obr. 45c). Je to plocha jednostranná. V obr. 45b je vidět, že z bodu A, který leží na „vnější straně" plochy (držadla), můžeme dojít dovnitř (do bodu B na „vnitřní straně" držadla). Jako uzavřená jednostranná plocha je Kleinova láhev homeomorfní s některou z ploch typu $\mathbf{N}_p$. Čtenář nechť si spočítá sám, že Eulerova charakteristika plochy s krajem, vyobrazené v obr. 45a je rovna -1. Zalepením kruhem zvětšuje se Eulerova charakteristika o 1, je tedy *Eulerova charakteristika Kleinovy láhve rovna* 0, tj. Kleinova láhev je homeomorfní s plochou typu $\mathbf{N}_2$.

Probereme na závěr zajímavý příklad dvojstranné plochy. Vezmeme pravidelný dvanáctistěn (obr. 46) a strany jednoho omezujícího pětiúhelníka prodloužíme tak, aby se všechny vzájemně protínaly. Dostaneme pravidelnou pěticípou hvězdu (obr. 47). Stejnou hvězdu utvoříme ze stěny sousední. Obě



Obr. 48.



Obr. 49.

hvězdy budou mít společnou úsečku AD (obr. 48). Dohodneme se však, že obě hvězdy mají společné jen úsečky AB a CD, že tedy k úsečce BC nebudeme přihlížet, jako ke zbytečné, vzniknuvší jen „nevhodným" uložením obou hvězd v prostoru. Vytvoříme nyní stejné hvězdy ze všech stěn dvanáctistěnu (obr. 49). Dostaneme jakousi plochu, která samu sebe protíná („přebytečnými" průsečnicemi budou hrany výchozího dvanáctistěnu). Tato plocha je dvojstranná, jak bychom se přesvědčili např. tak, že bychom všechny hvězdy obarvili touž barvou na straně „vnitřní" (obrácené ke středu plochy), a jinou barvou „zvenčí".

Plocha je tedy uzavřená a dvojstranná, je tedy homeomorfní s plochou typu $\mathbf{P}_p$. Se kterou? Naše plocha má 12 stěn (hvězd). Její hrany jsou prodloužené hrany výchozího dvanáctistěnu (např. AB, CD), je jich tedy dvakrát tolik, co u pravidelného dvanáctistěnu, tedy 60. Konečně vrcholů je 32. Je to 20 vrcholů dvanáctistěnu a všechny „vnější" vrcholy hvězd, jichž je 12. Eulerova charakteristika naší plochy je tedy $32 - 60 + 12 = -16$. Eulerova charakteristika plochy $\mathbf{P}_p$ je $2 - 2p$, odkud pro naši plochu vychází $p = 9$. Naše plocha je tedy homeomorfní s plochou typu $\mathbf{P}_9$, tj. s kulovou plochou s devíti uchy.

(Pokračování)

Přeložil dr. Josef Veselka