Otomar Hájek
Singularity diferenciální rovnice. II

*Pokroky matematiky, fyziky a astronomie*, Vol. 2 (1957), No. 2, 137--143

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137283

# POKROKY
# MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK II • ČÍSLO 2

OTOMAR HÁJEK

## SINGULARITY DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE, II

*Článek je pokračováním stejnojmenného článku, uveřejněného v tomto časopise, sv. I (1956), č. 5/6. Mimo jiné se tu řeší jeden z problémů, v citované první části položených.*

*Tento článek obsahuje:*



*O. H.*

### § 6. Množiny protínající trajektorie

K pojmu množiny protínající trajektorie (§ 3) jsme byli přivedeni z dvou důvodů. Jednak je někdy pohodlné místo řešení studovat právě množiny, které řešeními *nejsou* (na př. isogonály, majoranty, částečně i isokliny). A jednak, obtížnou otázku struktury singulárních bodů v celé rovině „rozkládáme" na jednoduchou otázku sing. bodů na řešení (věta 14), a na složitější otázku singulárních bodů na množině protínající trajektorie (částečně, lemma § 3). Obě tyto myšlenky, negace a skládání ze „souřadnic" jsou velmi jednoduché a často užívané.

V tomto odstavci budeme trochu podrobněji studovat množiny protínající trajektorie. Ukazuje se, že jsou velmi názorné (věta 21), a že mají přibližně ony vlastnosti, které od nich očekáváme (věta 22).

**Lemma.** *Množinu protínající trajektorie lze uspořádat; toto uspořádání je spojité.*

Důkaz. (Význam pojmů ve znění lemmatu bude patrný z důkazu). Nechť $A$ protíná trajektorie. Pro $P$, $Q \in A$ nechť

$$P \leqslant Q \text{ znamená } w_P \leqslant w_Q$$

(jen zde a v následující větě). Pak zřejmě $P \leqslant P, P \leqslant Q \leqslant R \Longrightarrow P \leqslant R, P \leqslant Q \leqslant \leqslant P \Longrightarrow P = Q$ ($A$ protíná trajektorie).

Předpokládejme, že není ani $P \leqslant Q$ ani $Q \leqslant P$. Pak nemůže být $x_P = x_Q$ (z věty 7), nechť na př. $x_P < x_Q$. Nyní $w_P, w_Q$ se nemohou protnout v $\langle x_P, x_Q \rangle$ — jinak ihned sestrojíme řešení spojující $P$, $Q$. Za druhé, každá tupá nerovnost mezi $w_P, w_Q$ v bodě $x_Q$ je zachována v celém $\langle x_Q, +\infty)$, a v bodě $x_P$ je zachována v celém $(-\infty, x_P\rangle$ — věta 7. To je ve sporu s předpokladem, že není ani $w_P \leqslant w_Q$ ani $w_Q \leqslant w_P$ všude. Nastává tedy alespoň jeden ze vztahů $P \leqslant Q$, $Q \leqslant P$. Konečně, nechť $Q \leqslant P_n \leqslant R$, $P_n \to P$ (vše $\in A$). Pak je též $Q \leqslant P \leqslant R$: $w_Q \leqslant w_{P_n} \rightrightarrows f \leqslant w_P$ ($f$ je řešení bodem $P$ — věta 2); není-li $P \leqslant R$, je $w_P \leqslant w_R$, $w_P(x_P) > w_R(x_P)$ (jinak $w_R$ spojuje $P, R$), ač

$$w_R(x_P) < w_P(x_P) = f(x_P) \leftarrow w_{P_n}(x_P) \leqslant w_R(x_P),$$

spor. Tedy $Q \leqslant P \leqslant R$.

**Věta 21.** *Nechť $A$ je uzavřená souvislá množina, která protíná trajektorie. Pak $A$ je jednoduchá spojitá křivka.*

Důkaz. („$\leqq$" z předešlého lemmatu). Volme pevně body $P_1 < P_2$ na $A$. Pak interval $\langle P_1, P_2\rangle$ na $A$ je uzavřený (lemma) a souvislý. Jinak by existoval rozklad $\langle P_1, P_2\rangle = A_1 \cup A_2$ na uzavřené disjunktní neprázdné množiny, lze předpokládat $P_i \in A_i$; pak rozklad

$$A = ((-\infty, P_1) \cup A_1) \cup (A_2 \cup (P_2, +\infty)),$$

(intervaly na $A$) také sestává z uzavřených disjunktních neprázdných množin, spor. Dále, $\langle P_1, P_2\rangle$ je kompaktní. Jinak by v něm existovaly body $Q_n$, $P_i \neq Q_n \to \infty$; když $A_1$ sestává z bodů $Q \in A$, $Q \leqq$ některý $Q_n$, a $A_2$ z ostatních, máme zase rozklad $A = A_1 \cup A_2$ na uzavřené disjunktní neprázdné (zajímavý důkaz), spor.

Celkem: $\langle P_1, P_2\rangle$ je souvislý, kompaktní a separabilní ($\subset E^2$). Užijeme věty 13 v [7], III v tvaru pozn. (*iii'*) na $(P_1, P_2)$. Množinu $A$ pak složíme ze spočetně mnoha intervalů (separabilita); tím nevznikne protínající se křivka (uspořádání).

Poznámky. Když $A$ je souvislá a protíná trajektorie, pak nemusí být částí žádné spojité křivky, takže $\bar{A}$ nemusí protínat trajektorie (nulová pole, $x = \sin y^{-1}$ pro $y \neq 0$, $x = 0$ pro $y = 0$). I za předpokladů věty žádný podoblouk nemusí mít konečnou délku, takže $A$ nemusí mít tečnu téměř všude (nulové pole, $x = f(y)$, $f$ spojitá bez derivace).

Věta 22. *Nechť $C$ je regulární křivka. Nechť body $P_i \in C$ $(P_1 \neq P_2)$ lze spojit řešením. Pak v některém bodě $Q \in C$ mezi $P_1, P_2$ (nebo v některém z $P_i$) má $C$ směr pole.*

Důkaz. Nechť $x = x(t), y = y(t)$ je regulární parametrisace[1]), nechť bodům $P_i$ odpovídají parametry $t_i$, $t_1 < t_2$. Principiálně jsou dvě možnosti. *Buď* existují body $P_n$, $Q_n$ s parametry $a_n$, $b_n$ takové, že

$$t_1 \leqq a_n < b_n \leqq t_2, \quad b_n - a_n \to 0\,,$$

$$P_n, Q_n \text{ lze spojit řešením } f_n.$$

Pak

$$\frac{y(b_n) - y(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{f_n(x(b_n)) - f(x(a_n))}{x(b_n) - x(a_n)} \cdot \frac{x(b_n) - x(a_n)}{b_n - a_n} = f_n'(x(c_n)) \cdot \frac{x(b_n) - x(a_n)}{b_n - a_n},$$

kde

$$c \leftarrow a_n < c_n < b_n \to c,$$

(kdyby stále $x(b_n) - x(a_n) = 0$, bylo by $\dot{y}(c) = \dot{x}(c) = 0$, spor). Podle věty 2 lze vybrat posloupnost $f_n$ a řešení $f$ tak, že $f_n \rightrightarrows f$, $f_n' \rightrightarrows f'$; pak

$$\dot{y}(c) = f'(x(c)) \cdot \dot{x}(c)^{2}), \quad \dot{x}(c) \neq 0,$$

[1]) Požadujeme: derivace $\dot{x}$, $\dot{y}$ existují všude, $\dot{x}^2 + \dot{y}^2 \neq 0$ všude; nežádáme spojitost derivací.

[2]) To je jasné, jsou-li derivace spojité. Jindy:

$$\frac{x(b_n) - x(a_n)}{b_n - a_n} = \frac{x(b_n) - x(c)}{b_n - c} \cdot \frac{b_n - c}{b_n - a_n} + \frac{x(a_n) - x(c)}{a_n - c} \cdot \frac{c - a_n}{b_n - a_n} =$$

$$= \frac{x(b_n) - x(c)}{b_n - c} \cdot \lambda_n + \frac{x(a_n) - x(c)}{a_n - c} \cdot (1 - \lambda_n)$$

a $0 < \lambda_n < 1$; vybereme konvergentní $\lambda_n \to \lambda$; pak limita levé strany je

$$\dot{x}(c) \cdot \lambda + \dot{x}(c) \cdot (1 - \lambda) = \dot{x}(c).$$

Podobně s $\dot{y}(c)$.

$$\frac{\dot{y}(c)}{\dot{x}(c)} = F(x(c), f(x(c))) = F(x(c), y(c)).$$

*Nebo* toto neplatí. Pak existují $Q_i$ s parametry $a_i$ takové, že: $t_1 \leqq a_1 < a_2 \leqq t_2$, $Q_i$ lze spojit řešením $f$, žádnou dvojici bodů s parametry $b_i$ ($t_1 \leqq b_1 < b_2 \leqq t_2$, $b_2 - b_1 < a_2 - a_1$) nelze spojit řešením. To však vede ke sporu. Pro jednoduchost předpokládejme, že parametrem je právě $x$ — souřadnice (jinak je důkaz myšlenkově stejný, ale pracnější). Je tedy na př. $y(x) > f(x)$ v $(a_1, a_2)$. Neplatí-li tvrzení věty, je $y'(c) \neq F(c, y(c))$ v $(a_1, a_2)$, na př. $>$. Tedy $y(x) > g(x) > f(x)$ v okolí $c$ vpravo od $c$, kde $g$ je některé řešení bodem $Q = [c, y(c)]$. Podle předpokladu $g$ neprotíná ani $f$ ani $y$ v $(c, a_2\rangle$, neboť $a_2 - c < a_2 - a_1$, tedy

$$y(x) > g(x) > f(x) \text{ v } (c, a_2\rangle,$$

ač $y(a_2) = f(a_2)$, spor.

Poznámka 1. Výraz „mezi" v tvrzení věty chápeme ve smyslu některé (jinak libovolné) parametrisace. Je-li tedy $C$ uzavřená, dostáváme dokonce dva body, v kterých $C$ má směr pole.

Poznámka 2. Věta 22 zobecňuje větu o střední hodnotě (konstantní pole). Nelze opustit předpoklad o regularitě (nulové pole, křivka s bodem úvratu).

**Důsledek 1.** *Nechť $C$ je po částech regulární křivka, nechť na $C$ je isolovaná množina těch $P$, v nichž má $C$ směr pole. Pak $C$ po částech protíná trajektorie* (a tedy platí lemma § 3 i pro $C$). (Každému $P \in C$ přísluší $Q, R \in C$ takové, že intervaly $\langle Q, P\rangle$, $\langle P, R\rangle$ na $C$ jsou regulární a protínají trajektorie.)

**Důsledek 2.** *Nechť $C$ je regulární, mezi každou dvojicí na $C$ leží body, které buď lze spojit řešením, nebo v nichž $C$ má směr pole. Pak $C$ je částí některého řešení.*

## § 7. Unicita a uniformita

Přirozeně vzniká otázka, jak se odráží existence singulárních bodů na vlastnostech pravé strany. Nejedná se při tom o pracovní kriteria unicity nebo singularity — takovými jsou věty v § 4 — nýbrž o nutné a postačující podmínky.

**Věta 23.** *Nechť v oblasti $G$ nejsou singulární body. Nechť $F_\lambda \to F$*[3]) *pro $\lambda \to +\infty$, nechť $f_P^\lambda$ jsou řešení rovnice $y' = F_\lambda(x, y)$ bodem $P$. Pak*

$$f_P^\lambda(x) \to f_P(x), \quad \frac{d}{dx} f_P^\lambda(x) \to \frac{d}{dx} f_P(x) \tag{1}$$

*téměř stejnoměrně vzhledem k $x$, k $P \in G$.*

Důkaz. Volme libovolné kompaktní $K \subset E^1$, $L \subset G$. Nechť neplatí tvrzení věty. Existují: $\varepsilon > 0$, $x_n \in K$, $P_n \in L$ tak, že

$$|f_{P_n}^n(x_n) - f_{P_n}(x_n)| > \varepsilon \quad \text{pro všechna } n.$$

Lze předpokládat $P_n \to P$. Podle věty 2 lze vybrat $f_{P_n}^n \rightrightarrows f, f_{P_n}$ $f$ v $K$ (unicita). Zejména pro vhodné $n$ je $|f_{P_n}^n - f| < 3^{-1}\varepsilon$, $|f_{P_n} - f| < 3^{-1}\varepsilon$ v $K$; ale pak

[3]) Také $F_\lambda$ spojité v $E^2$.

$$\varepsilon < |f^n_{P_n}(x_n) - f_{P_n}(x_n)| \leqq |f^n_{P_n}(x_n) - f(x_n)| + |f_{P_n}(x_n) - f(x_n)| < \frac{2}{3}\varepsilon,$$

spor. Podobně pro derivace.

**Důsledek.** *Nechť $F_\lambda \rightrightarrows F$*[3]) *pro $\lambda \to +\infty$, nechť $f^\lambda_P$ jsou řešení rovnice $y' = F_\lambda(x, y)$ bodem $P$. Nechť v oblasti $G$ nenastává* (1), *na př. $f^\lambda_P$ nekonvergují. Pak v $G$ jsou singulární body.*

Podmínka je též nutná: za $f^\lambda_P$ volíme střídavě $w_P$, $v_P$.

Zhruba tedy můžeme říci, že unicita je jistou zesílenou uniformitou řešení.

**Věta 24.** (Věta o obálce). *Nechť $A$ je některá množina řešení, nechť $f$ je derivovatelná funkce; nechť dále platí*

(a) *pro každé $x$ existují $f_n \in A$ s $f_n(x), \to f(x), f'_n(x) \to f'(x)$,*

(b) *v každém intervalu $J \subset E^1$ a pro žádné $f_n \in A$ není $f_n \rightrightarrows f$ v $J$. Pak $f$ je singulární řešení.*

Důkaz. Pro $x_0$ určeme $f_n$ podle (a); z nich vyberme $f_n \rightrightarrows g, f'_n \rightrightarrows g'$ ($g$ je řešení; věta 2). Pak $f(x_0), = g(x_0), f'(x_0) = g'(x_0)$; takže $f, g$ jsou řešení bodem $P = [x_0, f(x_0)]$. Podle (b) existují $x$ libovolně blízká k $x_0$ taková, že $f(x) \neq g(x)$; $P$ je tedy singulární.

## § 8. Synthese rovnice

K jednoparametrické soustavě funkcí obvykle konstruujeme diferenciální rovnici „vylučováním parametru". Zejména při konstrukci příkladů však potřebujeme trochu přesnější a obecnější větu, která by mohla být i jiného charakteru než metoda vylučování parametru.

Především je nutno zjistit jaké vlastnosti musí mít daná soustava funkcí, aby existovala rovnice, jejímž řešením by byly tyto funkce. Některé vlastnosti jsou ihned patrné; jiné plynou z věty 2.

Množinu $A$ funkcí se spojitými derivacemi v $E^1$ nazveme *lokálně pre-kompaktní*, když platí toto:

je-li $|f_n - g| < a$ pro $|x| < b$ ($a, b$ konstanty, $f_n, g \in A$), pak lze vybrat podposloupnost $f_{n_k}$ a funkci $f$ tak, že

$$f_{n_k} \rightrightarrows f,\ f'_{n_k} \rightrightarrows f'.$$

Dvě množiny $A, B$ funkcí se spojitými derivacemi v $E^1$ nazveme *tečné*, když platí toto: je-li $A \ni f_n \rightrightarrows f, B \ni g_n \rightrightarrows g, f(x_0) = g(x_0)$ pak také $f'(x_0) = g'(x_0)$, (existují-li). Zřejmé je

**Lemma 1.** *$A, B$ tečné $\Longleftrightarrow$ $A, \bar{B}$ tečné*[4]) $\Longleftrightarrow$ *$\bar{A}, \bar{B}$ tečné $\Longleftrightarrow$ $\bar{A}, \bar{B}$ splňují $f \in A, g \in B, f(x_0) = g(x_0) \Longrightarrow f'(x_0) = g'(x_0)$.*

**Lemma 2.** *Je-li $A$ lok. pre-kompaktní, pak $\bigcup \overline{\{f : f \in A\}} = \bigcup \{f : f \in \bar{A}\}$*[5]).

Důkaz. Patří-li bod P do levé strany rovnice, existují $f_n \in A$, $x_n \in E^1$ s $[x_n, f_n(x_n)] \to P$; z $f_n$ lze vybrat $f_n \rightrightarrows f \in \bar{A}$, takže $f(x_P) = y_P$, $P$ je v pravé straně rovnice. Opačná inkluse podobně.

**Věta 25.** (*Věta o synthese.*) *Nechť $A$ je množina funkcí, $A$ lokálně pre-kompaktní, $A, A$ tečné. Pak existuje diferenciální rovnice*

$$y' = F(x, y)$$

[4]) $\bar{B}$ je množina stejnoměrných limit funkcí z $B$. Podobně dále.

[5]) $f$ je množina $[x, y]$ splňujících $y = f(x)$; $\bigcup \{f : f \in A\}$ je sjednocení všech $f \in A$.

*se spojitou pravou stranou taková, že každá funkce z A je jejím řešením. F je určena jednoznačně právě jen v* $X = \bigcup \{f : f \in \bar{A}\}$.

**Důkaz.** $\bar{A}$ je lokálně kompaktní a tečná k sobě (lemma 1). Pro $P \in X$ volme $f \in \bar{A}$ s $y_P = f(x_P)$ a definujme

$$F(x_P, y_P) = f'(x_P),$$

(to lze: $y_P = g(x_P)$, $g \in \bar{A}$ implikuje $f'(x_P) = g'(x_P)$). Ježto $X$ je uzavřená (lemma 2), lze $F$ spojitě rozšířit na celou $E^2$ — věta Tietzeho (Urysonova; [5], [6]). Zřejmě $F$ nelze jinak definovat v $X$. Je-li nyní $P \notin X = \bar{X}$ je $Y = X \cup (P)$ uzavřená a $P$ je v ní isolovaný, takže $F$ by bylo možné rozšířit na celou $E^2$ a ještě požadovat $F = 0$ nebo $= 1$ v $P$.

Poznámka. Je-li $F$ omezená, je podmínka věty též nutná.

**Důsledek.** *Za předpokladů věty, je-li X hustá a f některá derivovatelná funkce, pak f je řešením rovnice určené soustavou A právě když A, A* $\cup (f)$ *jsou tečné.*

Omezme se pro chvíli na kompaktní uzavřenou oblast $\bar{G} \subset E^2$. Otázka studia singulárních bodů je postavena nekorektně (v známém smyslu); neboť $F$ můžeme stejnoměrně aproximovat v $\bar{G}$ mnohočlenem $U$ dvou proměnných (Weierstrassova věta); a pak příslušné „přibližné" rovnice

$$y' = U(x, y),$$

nemají žádné singulární body $\left(\dfrac{\partial U}{\partial y}\right)$ omezená).

Avšak v jistém smyslu, který nemíním precisovat, je otázka po sing. bodech přece jen korektně postavená. Aproximujeme-li $F$ stejnoměrně shora funkcí $U$[6]), pak maximální řešení $y' = U(x, y)$ aproximují stejnoměrně shora maximální řešení rovnice původní (věta 8). A podle věty 25 je diferenciální rovnice jednoznačně určena svými maximálními řešeními.

## § 9. Problém

V § 5 byl položen problém ⟨ ⟩, zda existují diferenciální rovnice (se spojitou pravou stranou) takové, že množina jejích singulárních bodů je hustá na některém intervalu osy $y$. Věta 25 nám umožňuje konstruktivně řešit problém způsobem tam naznačeným.

(a) Označme $\varphi$ funkci definovanou takto

$$\varphi(x) = x^2 (1 - x)^2 \quad \text{v} \quad \langle 0, 1 \rangle$$
$$\varphi(x) = 0 \quad \text{jinde}$$

Pro každou posloupnost $\mathfrak{z} = (i_0, i_1, \ldots, i_n)$ ($n$ celé $\geqq 0$, $i_k = 0$ nebo $= 1$) definujme

$$f_\mathfrak{z}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{i_k} \left(\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{3k}} \varphi(2^k x)\right) + \frac{(-1)^{i_n}}{2^{3n}} \varphi(2^n x).$$

Již z grafů několika těchto prvních funkcí je patrné, že pravděpodobně splňují předpoklady věty 25, a že tedy definují diferenciální rovnici. Je samozřejmé, že na ose $y$ jsou singulárními všechny diadické body $[o, y]$, $y = \frac{1}{2}, \frac{1}{4}, \frac{3}{4}, \frac{1}{8}, \frac{3}{8}, \frac{5}{8}, \frac{7}{8}, \ldots$. Naším cílem bude toto vše dokázat.

[6]) Existují dokonce takové mnohočleny. Je-li polynom $U$ $\frac{\varepsilon}{2}$ — aproximací $F$, je $\frac{\varepsilon}{2} + U$ $\varepsilon$-aproximací $F$ shora.

(b) Nechť $\{f_{\mathfrak{z}_n}\}$ je některá posloupnost těchto funkcí. Opakuje-li se některá funkce, jsme hotovi. V opačném případě lze volit $i_0$ tak, že nekonečně mnoho $\mathfrak{z}_n$ má první souřadnici $i_0$; lze volit $i_1$ tak, že v posloupnosti *těchto* $\mathfrak{z}_n$ je jich nekonečně mnoho s prvními dvěma souřadnicemi $i_0, i_1$; atd. Vybráním *diagonální* posloupnosti dostáváme nekonečné $\{i_n\}_{n=0}^{\infty}$, $\{\bar{\mathfrak{z}}_n\}_{n\geq 0}$ takové, že

$$\bar{\mathfrak{z}}_n = (i_0, i_1, \dots i_n),$$

(stejné pro všechny $\bar{\mathfrak{z}}_n$, jen roste délka), a že $\{f_{\bar{\mathfrak{z}}_n}\}$ je vybrána z $\{f_{\mathfrak{z}_n}\}$. Nyní $f_{\bar{\mathfrak{z}}_n}$, $\frac{d}{dx} f_{\bar{\mathfrak{z}}_n}$ konvergují stejnoměrně (Bolzano-Cauchy): pro $m > n$ je

$$|f_{\bar{\mathfrak{z}}_m} - f_{\bar{\mathfrak{z}}_n}| = \left| \sum_{n+1}^{m-1} (-1)^{i_k} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{3k}} \varphi(2^k x) \right) + \frac{(-1)^{i_m}}{2^{3n}} \varphi(2^m x) - \frac{(-1)^{i_n}}{2^{3n}} \varphi(2^n x) \right|$$

$$\leqq \sum_{n}^{\infty} \left( \frac{1}{2^k} + \frac{1}{2^{3k}} \cdot \frac{1}{4} \right) < \frac{1}{2^{n-2}},$$

$$|f'_{\bar{\mathfrak{z}}_m} - f'_{\bar{\mathfrak{z}}_n}| = \left| \sum_{n+1}^{m} \frac{(-1)^{i_k}}{2^{3k}} \cdot 2^k \varphi'(2^k x) \right| \leqq \sum_{n+1}^{\infty} \frac{1}{2^{2k}} \cdot \frac{\sqrt{3}}{9} < \frac{1}{2^{2n}}.$$

Tedy, *z každé posloupnosti funkcí $f_{\mathfrak{z}}$ lze vybrat posloupnost stejnoměrně konvergující spolu s prvními derivacemi. Zejména odtud plyne, že každá (obyčejná) limita má spojitou derivaci.*

(c) Ukažme, že $f_{\mathfrak{z}}$ jsou uspořádané podle velikosti. Zřejmě, je-li

$$\mathfrak{z} = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, 0), \quad \mathfrak{z}^* = (i_0, i_1, \dots, i_{n-1}, 1),$$

pak $f_{\mathfrak{z}} > f_{\mathfrak{z}^*}$ v $(0, 2^{-n})$ a $f_{\mathfrak{z}} = f_{\mathfrak{z}^*}$ jinde (nazveme takovou dvojici *konjugovanou*). Zkoumejme ostatní případy. Nechť

$$\mathfrak{z} = (i_0, \dots, i_{r-1}, i_r, \dots, i_n), \quad \mathfrak{w} = (i_0, \dots i_{r-1}, j_r, \dots, j_m)$$

a nechť

$$i_r \neq j_r, \text{ není } r = m = n.$$

Pak

$$|f_{\mathfrak{z}}(x) - f_{\mathfrak{w}}(x)| = \left| \sum_{r}^{n-1} (-1)^{i_k} (2^{-k} + 2^{-3k} \varphi(2^k x)) + (-1)^{i_n} 2^{-3n} \varphi(2^n x) - \right.$$

$$\left. - \sum_{r}^{m-1} (-1)^{j_k} (2^{-k} + 2^{-3k} \varphi(2^k x)) - (-1)^{j_m} 2^{-3m} \varphi(2^m x) \right|$$

$$> 2 (2^{-r} + 2^{-3r} \varphi(2^r x)) - 2 \sum_{r+1}^{\infty} (2^{-k} + 2^{-3k} \varphi(2^k x))$$

$$= 2 (2^{-3r} \varphi(2^r x) - \sum_{r+1}^{\infty} 2^{-3k} \varphi(2^k x)).$$

(Použili jsme $|x_1 + x_2 + \dots + x_n| \geqq |x_1| - (|x_2| + \dots + |x_n| \dots)$. Abychom ukázali $|f_{\mathfrak{z}}(x) - f_{\mathfrak{w}}(x)| > 0$, stačí dokázat $\varphi(t) \geqq \sum^{*} 2^{-3k} \varphi(2^k t)$. To je zřejmé mimo interval $(0, 1)$. Uvnitř intervalu se pak jedná o

$$t^2 (1-t)^2 \geqslant \sum_{\infty}^{*} 2^{-3k} [2^k t (1-t)]^2,$$

$\left(\sum^{*}\right.$ je sčítání přes přirozená $k$ s $2^k t \leqslant 1$ — jinak totiž $\left.\varphi = 0\right)$.

$$1 \geqslant \sum^{*} 2^{-3k} \cdot 2^{2k} \cdot \left[\frac{t(1-2^k t)}{t(1-t)}\right]^2.$$

To je snadné: $\sum^{*} 2^{-k} \left(\frac{1-2^k t}{1-t}\right)^2 \leqslant \sum^{*} 2^{-k} < \sum_{1}^{\infty} 2^{-k} = 1$, neboť pro $2^k t \leqslant 1$ je $\frac{1-2^k \cdot t}{1-t} \leqslant 1$.

**Celkem**: *kromě konjugovaných dvojic, každé dvě $f_{\mathfrak{z}}$, $f_{\mathfrak{w}}$ jsou $>$ nebo $<$ všude.* Zejména jsou uspořádány tak, jako jejich body na ose $y$.

(d) Žádná $f_{\mathfrak{z}}$ neprobíhá uvnitř mezi některou konjugovanou dvojicí [jinak by ji musela protnout, ve sporu s (c)]; k bodu uvnitř mezi konjugovanou dvojicí je tedy nejblíže ze všech $f_{\mathfrak{z}}$ jedna funkce z dvojice. Všimněme si nyní množiny $Q$ všech bodů pásu $-1 \leqslant y \leqslant 1$, které neleží uvnitř mezi žádnou konjugovanou dvojicí. Nechť $\mathfrak{z} = (i_0, \ldots, i_n)$, označme $\mathfrak{w} = (i_0, \ldots, i_n, i_{n+1})$ s $i_{n+1} = 1 - i_n$. Pak

$$|f_{\mathfrak{w}}(x) - f_{\mathfrak{z}}(x)| = |(-1)^{i_n} [2^{-n} + 2^{-3n} \varphi(2^n x)] + (-1)^{i_{n+1}} 2^{-3(n+1)} \varphi(2^{n+1} x) -$$
$$- (-1)^{i_n} 2^{-3n} \varphi(2^n x)| = |(-1)^{i_n} 2^{-n} + (-1)^{1-i_n} 2^{-3(n+1)} \varphi(2^{n+1} x)| =$$
$$= 2^{-n} - 2^{-3(n+1)} \varphi(2^{n+1} x),$$

takže

$$2^{-(n+1)} < |f_{\mathfrak{w}}(x) - f_{\mathfrak{z}}(x)| \leqslant 2^{-n}.$$

Pokrývají-li tedy funkce $n$-té třídy množinu $Q$ s hustotou $2^{-(n-1)}$, pokrývají funkce $(n+1)$-vé třídy $Q$ s hustotou $2^{-n}$ (a $f_0$, $f_1$, nulté třídy, pokrývají $Q$ s hustotou $1$, $\leqslant 2^{-(0-1)} = 2$). Tedy $\bigcup f_{\mathfrak{z}}$ *je hustá v* $Q$.

(e) Dokažme: je-li $f_{\mathfrak{z}_n} \rightrightarrows f$, $f_{\mathfrak{w}_n} \rightrightarrows g$, $0 < f(x_0) = g(x_0) < 1$, $0 < x_0$, pak $f = g$ v $\langle x_0, +\infty)$. Stačí se zabývat případem, že ani $f$ ani $g$ nejsou funkcemi typu $f_{\mathfrak{z}}$; pak můžeme předpokládat, že jsme vybrali posloupnosti $f_{\mathfrak{z}_n}$ resp. $f_{\mathfrak{w}_n}$ tak jako v (b). Určeme $n_0$, $2^{-n_0} \leqslant x$. Pak pro $n > n_0$, $|f_{\mathfrak{z}_n} - f| < \varepsilon$, $|f_{\mathfrak{w}_n} - g| < \varepsilon$ je $|f_{\mathfrak{z}_n}(x_0) - f_{\mathfrak{w}_n}(x_0)| < 2\varepsilon$, takže $|f_{\mathfrak{z}_n} - f_{\mathfrak{w}_n}| < 2\varepsilon$ v $\langle x_0, +\infty)$ (tam jsou obě $f_{\mathfrak{z}_n}, f_{\mathfrak{w}_n}$ konstantní) a tedy i $|f - g| < 4\varepsilon$ v $\langle x_0, +\infty)$, pro každé $\varepsilon > 0$.

Odtud plyne: *když* $f_{\mathfrak{z}_n} \rightrightarrows f$, $f_{\mathfrak{w}_n} \rightrightarrows g$, $0 < f(x_0) = g(x_0) < 1$, $0 < x_0$, *pak* $f'(x_0) = g'(x_0)$ [to platí v $(x_0, +\infty)$, a $f'$, $g'$ jsou spojité podle (b)].

(f) Doplňme $f_{\mathfrak{z}}$ ještě mezi konjugovanými dvojicemi. Na př. mezi $f_0$, $f_1$ definujeme $f_{0_t}(x) = t\varphi(x)$; obecněji, mezi konjugovanými $f_{\mathfrak{z}}$, $f_{\mathfrak{z}^*}$

$$f_{\mathfrak{z}_t}(x) = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^{i_k} [2^{-k} + 2^{-3k} \varphi(2^k x)] + t \cdot 2^{-3n} \varphi(2^n x), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1$$

(takže $f_{\mathfrak{z}^*} \leqslant f_{\mathfrak{z}_t} \leqslant f_{\mathfrak{z}}$, $f'_{\mathfrak{z}^*} \leqslant f_{\mathfrak{z}_t} \leqslant f_{\mathfrak{z}}$).

*Jsou tedy splněny předpoklady věty 25* [(b), (e), (f)]; *pravá strana $F$ je určena jednoznačně v pásu $-1 \leqslant y \leqslant 1$ podle* (d). Singulárními body jsou jen body, v nichž se spojují konjugované dvojice; tedy obě množiny pravých i levých sing. bodů jsou spočetné, *množina pravých sing. bodů leží hustě na intervalu* $< -1 \leqslant y \leqslant 1$ osy $y$.