Václav Doležal

O jedné trigonometrické identitě

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 3, 362--365

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137231

O JEDNÉ TRIGONOMETRICKÉ IDENTITĚ

VÁCLAV DOLEŽAL
(Matematický ústav ČSAV)

Z theoretických fysikálních předpokladů někdy plyne platnost některé matematické poučky, jejíž matematický důkaz nebývá triviální, ačkoliv pro její správnost zcela jasně mluví fysikální fakta. Přísně vzato, není takto získaná poučka zcela logicky zdůvodněna a nelze ji považovat za větu v matematickém slova smyslu, pokud ovšem ji nedokážeme čistě matematickou cestou.

O jednom takovém případě zde pojednáme. Při vyšetřování přechodového stavu jistého řetězce lineárních elektrických čtyřpólů dospělo se výše uvedeným způsobem k zajímavému tvrzení, které praví:

Buď n přirozené číslo. Pak

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{\sin \frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)}} = \begin{cases} n & \textit{pro n sudé}, \\ n+1 & \textit{pro n liché}. \end{cases} \tag{1}$$

Ukážeme, že toto tvrzení, které okamžitě vyplynulo z fysikální podstaty věci, vskutku platí. Podáme zde elementární, avšak ne zcela jednoduchý jeho důkaz.

Buď tedy n libovolné přirozené číslo. Jak známo, platí identita

$$\cos(2n+1)\varphi = \cos^{2n+1}\varphi - \binom{2n+1}{2}\cos^{2n-1}\varphi\sin^2\varphi + $$
$$+ \binom{2n+1}{4}\cos^{2n-3}\varphi\sin^4\varphi - \ldots + (-1)^n\binom{2n+1}{2n}\cdot\cos\varphi\sin^{2n}\varphi, \tag{2}$$

(která okamžitě plyne z Eulerovy věty).

Položíme-li sem za $\sin^2\varphi = 1 - \cos^2\varphi$, můžeme rovnost (2) psát ve tvaru

$$\cos(2n+1)\varphi = \alpha_1\cos\varphi + \alpha_3\cos^3\varphi + \ldots + \alpha_{2n+1}\cos^{2n+1}\varphi, \tag{3}$$

kde α_k jsou reálná čísla, závislá na n. Porovnáním rovností (2) a (3) nalezneme ihned

$$\alpha_1 = (-1)^n\binom{2n+1}{2n} = (-1)^n(2n+1),$$

$$\alpha_{2n+1} = 1 + \binom{2n+1}{2} + \binom{2n+1}{4} + \ldots + \binom{2n+1}{2n}.$$

Ježto však platí

$$2^{2n+1} = 1 + \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} + \ldots + \binom{2n+1}{2n+1},$$

$$0 = 1 - \binom{2n+1}{1} + \binom{2n+1}{2} - \ldots - \binom{2n+1}{2n+1},$$

dostaneme ihned sečtením $\alpha_{2n+1} = 2^{2n}$.

Levá strana rovnosti (3) nabude hodnoty 1 tehdy, když

$$(2n+1)\varphi = 2\pi r \quad (r \text{ — celé}).$$

Označme pro krátkost

$$\varphi_r = \frac{2\pi r}{2n+1}, \quad c_r = \cos\varphi_r,$$

pro $r = 0, 1, 2, \dots 2n$.

Lehko vidíme, že čísla c_r jsou kořeny mnohočlenu

$$P(x) = -1 + \alpha_1 x + \alpha_3 x^3 + \dots + \alpha_{2n+1} x^{2n+1}. \tag{4}$$

Tvrdím, že čísla $c_0, c_1, c_2, \dots c_{2n}$ tvoří soustavu všech kořenů mnohočlenu (4). Je totiž zřejmé, že čísla c_r pro $r = 0, 1, 2, \dots 2n$ nejsou všechna různá, neboť platí $c_r = c_{2n-r+1}$ pro $r = 1, 2, \dots 2n$. Naproti tomu však čísla c_r pro $r = 0, 1, 2, \dots n$ jsou všechna různá. Vskutku, pro tato r jest $0 \leq \varphi_r = \dfrac{2\pi r}{2n+1} < \pi$, a ježto $\cos\varphi$ je v $\langle 0, \pi \rangle$ klesající funkcí, je $c_i \neq c_j$ pro každé $i \neq j$.

Odtud vyplývá, že naše tvrzení bude dokázáno, dokážeme-li, že čísla c_r pro $r = 1, 2, \dots n$ jsou dvojnásobnými kořeny mnohočlenu (4). Avšak derivováním identity (3) dostaneme vztah

$$-(2n+1)\sin(2n+1)\varphi = -\alpha_1 \sin\varphi - 3\alpha_3\cos^2\varphi\sin\varphi - \dots$$
$$-(2n+1)\alpha_{2n+1}\cos^{2n}\varphi\sin\varphi. \tag{5}$$

Položíme-li sem za $\varphi = \varphi_r$ pro $r = 1, 2, \dots n$, máme

$$0 = -\alpha_1\sin\varphi_r - 3\alpha_3\cos^2\varphi_r\sin\varphi_r - \dots - (2n+1)a_{2n+1}\cos^{2n}\varphi_r\sin\varphi_r.$$

Ježto však $\sin\varphi_r \neq 0$, plyne krácením

$$\alpha_1 + 3\alpha_3 c_r^2 + \dots + (2n+1)\alpha_{2n+1} c_r^{2n} = 0, \quad \text{čili } P'(c_r) = 0,$$

což bylo dokázat.

Můžeme tedy ihned psát vztahy:

$$\prod_{r=0}^{2n} c_r = \frac{1}{\alpha_{2n+1}} = 2^{-2n}, \tag{6}$$

$$\sum_{r=0}^{2n} c_0 c_1 \dots c_{r-1} c_{r+1} \dots c_{2n} = \frac{\alpha_1}{\alpha_{2n+1}}, \quad (c_{-1} = 1). \tag{7}$$

Odtud dělením máme

$$\sum_{r=0}^{2n} \frac{1}{c_r} = \alpha_1 = (-1)^n (2n+1). \tag{8}$$

Ježto platí $c_{2n-r+1} = c_r$ a $c_0 = 1$, lze rovnost (8) upravit na tvar

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{c_r} = \frac{1}{2}[(-1)^n (2n+1) - 1]; \tag{9}$$

z (8) pak plyne

$$\left|\prod_{r=1}^{n} c_r\right| = 2^{-n}. \tag{10}$$

A) Buď n sudé. Pak pravá strana rovnosti (9) je rovna n. Levou stranu (9) rozložíme a upravíme

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{c_r} = \sum_{r=1}^{n/2} \frac{1}{\cos \frac{2\pi r}{2n+1}} + \sum_{r=\frac{n}{2}+1}^{n} \frac{1}{\cos \frac{2\pi r}{2n+1}} =$$

$$= \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{\cos \frac{2\pi\left(\frac{n}{2} - k + 1\right)}{2n+1}} + \sum_{k=1}^{n/2} \frac{1}{\cos \frac{2\pi\left(\frac{n}{2} + k\right)}{2n+1}}. \tag{11}$$

Avšak platí

$$\cos \frac{2\pi\left(\frac{n}{2} - k + 1\right)}{2n+1} = \sin \frac{\pi(4k-3)}{2(2n+1)}, \tag{12}$$

$$\cos \frac{2\pi\left(\frac{n}{2} + k\right)}{2n+1} = -\sin \frac{\pi(4k-1)}{2(2n+1)}. \tag{13}$$

Zavedeme-li tyto vztahy do (11), máme okamžitě

$$\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{\sin \frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)}} = n.$$

Tím je naše „fysikálně odvozené“ tvrzení pro sudé n dokázáno.

Zavedeme-li (12) a (13) do (10) a uvážíme-li, že $\sin \frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)} > 0$ pro $p = 1, 2, \ldots n$, dostaneme vedlejší výsledek

$$\prod_{p=1}^{n} \sin \frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)} = 2^{-n}. \tag{14}$$

B) Buď n liché. Analogicky jako prve pišme

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{c_r} = \sum_{r=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \ldots + \sum_{r=\left[\frac{n}{2}\right]+1}^{n} \ldots =$$

$$= \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{\cos \frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] - k + 1\right)}{2n+1}} + \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \frac{1}{\cos \frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] + k\right)}{2n+1}}. \tag{15}$$

Ježto platí $2\left[\frac{n}{2}\right] = n - 1$, možno psát

$$\cos \frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] - k + 1\right)}{2n+1} = \sin \frac{4k-1}{2(2n+1)}\pi,$$

$$\cos \frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] + k\right)}{2n+1} = -\sin \frac{4k-3}{2(2n+1)}\pi.$$

Zavedením těchto vztahů do (15) dostaneme

$$\sum_{r=1}^{n} \frac{1}{c_r} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]} \frac{1}{\sin \frac{4k-1}{2(2n+1)}\pi} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1} \frac{1}{\sin \frac{4k-3}{2(2n+1)}\pi} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{n} \frac{(-1)^{p+1}}{\sin \frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)}}.$$

Pro pravou stranu (9) nalezneme snadno hodnotu $-n-1$, čímž je rovnost (1) dokázána i pro n liché.

Stejným způsobem lze nahlédnout, že rovnost (14) platí beze změny i pro lichá n.

PŘÍSPĚVEK KE GEOMETRII KŘIVEK SPÁDOVÝCH

BOŘIVOJ KEPR

Úkolem tohoto článku je ukázat jednu charakteristickou vlastnost spádových křivek. Jak známo, křivka spádová je křivka, která svírá s nějakým pevným směrem konstantní úhel (říkáme, že křivka svírá s nějakým směrem daný úhel, svírá-li s tímto směrem tento úhel tečna křivky v každém jejím bodě). Příkladem křivky spádové je třeba obyčejná šroubovice, o jejímž použití ve strojní praxi není sporu, dále křivka spádová na ploše topografické slouží za osu komunikace a podobně. Mají tedy křivky spádové technický význam. Je všeobecně známo, že všechno podstatné v theorii křivek je obsaženo ve vzorcích Frenetových. V tomto článku se pak toto tvrzení aplikuje, jak již bylo řečeno, na jistou vlastnost spádových křivek. Dříve však, než zmíněnou vlastnost uvedeme, vyslovíme (bez důkazu) známou větu z diferenciální geometrie křivek, charakterisující křivky spádové, jako větu pomocnou, již budeme potřebovat.

Věta 1: *Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby křivka (pro niž je $k_2 \neq 0$) byla křivkou spádovou, jest splnění rovnice*

$$\frac{k_1}{k_2} = C \qquad (1)$$

ve všech bodech křivky.