Pokroky matematiky, fyziky a astronomie

Bořivoj Kepr

Příspěvek ke geometrii křivek spádových

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 2 (1957), No. 3, 365--367

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137212

Ježto platí $2\left[\frac{n}{2}\right] = n - 1$, možno psát

$$\cos\frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] - k + 1\right)}{2n+1} = \sin\frac{4k-1}{2(2n+1)}\pi,$$

$$\cos\frac{2\pi\left(\left[\frac{n}{2}\right] + k\right)}{2n+1} = -\sin\frac{4k-3}{2(2n+1)}\pi.$$

Zavedením těchto vztahů do (15) dostaneme

$$\sum_{r=1}^{n}\frac{1}{c_r} = \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{1}{\sin\frac{4k-1}{2(2n+1)}\pi} - \sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]+1}\frac{1}{\sin\frac{4k-3}{2(2n+1)}\pi} =$$

$$= -\sum_{p=1}^{n}\frac{(-1)^{p+1}}{\sin\frac{\pi(2p-1)}{2(2n+1)}}.$$

Pro pravou stranu (9) nalezneme snadno hodnotu $-n-1$, čímž je rovnost (1) dokázána i pro n liché.

Stejným způsobem lze nahlédnout, že rovnost (14) platí beze změny i pro lichá n.

PŘÍSPĚVEK KE GEOMETRII KŘIVEK SPÁDOVÝCH

BOŘIVOJ KEPR

Úkolem tohoto článku je ukázat jednu charakteristickou vlastnost spádových křivek. Jak známo, křivka spádová je křivka, která svírá s nějakým pevným směrem konstantní úhel (říkáme, že křivka svírá s nějakým směrem daný úhel, svírá-li s tímto směrem tento úhel tečna křivky v každém jejím bodě). Příkladem křivky spádové je třeba obyčejná šroubovice, o jejímž použití ve strojní praxi není sporu, dále křivka spádová na ploše topografické slouží za osu komunikace a podobně. Mají tedy křivky spádové technický význam. Je všeobecně známo, že všechno podstatné v theorii křivek je obsaženo ve vzorcích Frenetových. V tomto článku se pak toto tvrzení aplikuje, jak již bylo řečeno, na jistou vlastnost spádových křivek. Dříve však, než zmíněnou vlastnost uvedeme, vyslovíme (bez důkazu) známou větu z diferenciální geometrie křivek, charakterisující křivky spádové, jako větu pomocnou, již budeme potřebovat.

Věta 1: *Nutnou a postačující podmínkou pro to, aby křivka (pro niž je $k_2 \neq 0$) byla křivkou spádovou, jest splnění rovnice*

$$\frac{k_1}{k_2} = C \tag{1}$$

ve všech bodech křivky.

V rovnici (1) znamená k_1 první, k_2 druhou křivost křivky; C je reálná konstanta. Uveďme ještě některá označení, jichž budeme v dalším používat. Křivku budeme uvažovat v parametrických rovnicích

$$x = x(s)\,, \quad y = y(s)\,, \quad z = z(s)\,, \tag{2a}$$

kde s je oblouk křivky a x, y, z pravoúhlé souřadnice bodu křivky. Rovnice (2a) budeme psát v obvyklém symbolickém vyjádření vektorového počtu

$$\mathsf{r} = \mathsf{r}(s)\,, \tag{2b}$$

kde r je průvodičem běžného bodu křivky. V tomto označení mají Frenetovy formule tvar

$$\begin{aligned} \mathsf{t}' &= k_1\mathsf{n}\,, \\ \mathsf{n}' &= -k_1\mathsf{t} + k_2\mathsf{b}\,, \\ \mathsf{b}' &= -k_2\mathsf{n}\,, \end{aligned} \tag{3}$$

kde t, resp. n, resp. b je jednotkový vektor tečny, resp. hlavní normály, resp. binormály křivky (2b) a kde t', n' a b' jsou derivace těchto vektorů podle parametru s. Nyní již můžeme uvést větu, charakterisující křivky, jinou formou, než jak to činí věta 1.

Věta 2: *Nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka byla křivkou spádovou, je*

$$[\mathsf{r}'', \mathsf{r}''', \mathsf{r}^{\mathrm{IV}}] = 0^{*}) \tag{4}$$

pro všechny body křivky.

Důkaz provedeme tím způsobem, že prokážeme ekvivalentnost mezi větou 1 a větou 2. Postupným derivováním rovnice $\mathsf{r} = \mathsf{r}(s)$ a použitím vztahů (3) získáme snadno po kratším výpočtu:

$$\begin{aligned} \mathsf{r}'' &= k_1\mathsf{n}\,, \\ \mathsf{r}''' &= -k_1\mathsf{t} + k_1'\mathsf{n} + k_1k_2\,\mathsf{b}, \\ \mathsf{r}^{\mathrm{IV}} &= -3\,k_1k_1'\,\mathsf{t} - (k_1k_2^2 + k_1^3 - k_1'')\,\mathsf{n} + [(k_1k_2)' + k_1'k_2]\,\mathsf{b}\,. \end{aligned} \tag{5}$$

Dosazením výrazů (5) do determinantu (4) získáme úpravou, při níž používáme známých vlastností determinantů, postupně

$$\begin{aligned} [\mathsf{r}'', \mathsf{r}''', \mathsf{r}^{\mathrm{IV}}] &= [k_1\mathsf{n} - k_1^2\,\mathsf{t} + k_1'\,\mathsf{n} + k_1k_2\,\mathsf{b} - 3\,k_1k_1'\,\mathsf{t} - \\ &\quad - (k_1k_2^2 + k_1^3 - k_1'')\,\mathsf{n} + (k_1k_2)'\,\mathsf{b} + k_1'k_2\,\mathsf{b}] = \\ &= -k_1^3\,[(k_1k_2)' + k_1'k_2]\cdot[\mathsf{n}, \mathsf{t}, \mathsf{b}] - 3\,k_1^3k_1'k_2\,[\mathsf{n}, \mathsf{b}, \mathsf{t}]\,. \end{aligned}$$

Protože $[\mathsf{t}, \mathsf{n}, \mathsf{b}] = 1$, dostaneme konečně

$$[\mathsf{r}'', \mathsf{r}''', \mathsf{r}^{\mathrm{IV}}] = k_1^3\,[(k_1k_2)' + k_1'k_2] - 3\,k_1^3k_2k_1' = 0\,. \tag{6}$$

Vztah (6) je splněn určitě pro $k_1 = 0$ ve všech bodech křivky, což je nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka byla přímkou. Vylučme tento triviální případ křivky spádové z našich dalších úvah, t. j. předpokládejme $k_1 \neq 0$ pro všechny body křivky. Výraz (6) můžeme pak v důsledku tohoto předpokladu dále postupně upravovat

$$(k_1k_2)' + k_1'k_2 - 3\,k_2k_1' = (k_1k_2)' - 2\,k_1'k_2 = k_1'k_2 + k_1k_2' - 2\,k_1'k_2\,,$$

t. j. konečně

$$[\mathbf{r}'', \mathbf{r}''', \mathbf{r}^{IV}] \doteq k_1 k_2' - k_1' k_2 = 0 \tag{7}$$

Vztah (7) je splněn určitě pro $k_2 = 0$ ve všech bodech křivky, což je nutná a postačující podmínka pro to, aby křivka byla křivkou rovinnou. Vylučme tento triviální případ křivky spádové z našich dalších úvah, t. j. předpokládejme $k_2 \neq 0$ pro všechny body křivky. Výraz (7) můžeme pak v důsledku tohoto předpokladu upravit dále na

$$\frac{k_1' k_2 - k_1 k_2'}{k_2^2} = 0\,. \tag{8}$$

Integrací výrazu (8) dostaneme však právě vzorec (1), jehož platnost ve všech bodech zkoumané křivky je podle pomocné věty 1 nutnou a postačující podmínkou pro to, aby křivka byla křivkou spádovou. Tím je celé tvrzení dokázáno.

THERMOELEKTRICKÝ GENERÁTOR

V poslední době bylo v SSSR započato se seriovou výrobou thermoelektrických generátorů typu TKG-10 o výkonu 10—12 W, určených pro napájení malých kolchozních radiových uzlů typu KRV-2. Jako topného článku se v thermoelektrických generátorech používá normálních petrolejových lamp.

Součástí generátorů jsou speciální thermočlánky s poměrně dlouhou životností. Na obr. 1a je schematický náčrt celkového uspořádání generátorů. Na hořáku petrolejové lampy je umístěn osmihranný hliníkový teplomet, opatřený svislými radiátory, jimiž procházejí horké plyny z lampy. Pro zvýšení tahu je nad teplometem malý plechový komínek. Na bočních stěnách teplometu jsou umístěny sekce baterie thermočlánků tak, aby nahřívané spoje přiléhaly k povrchu teplometu a ochlazované spoje byly na vnější straně. U těchto stykových míst jsou hliníková žebra, sloužící k zvýšení intensity ochlazování.

Na obr. 1b je část baterie thermočlánků, t. j. několik seriově spojených thermočlánků. Každý thermočlánek (viz obr. 1c) má dvě elektrody — kladnou uhlíkovou *I* a zápornou *II*.

Při rozdílu teplot mezi spájenými místy řádu 300^0 C každý thermočlánek vyvíjí emsu asi 55 mV. Pracovní napětí thermočlánku při zatěžovacím proudu 1A je rovno 30—35 mV. Účinnost proměny tepelné energie v elektrickou je asi 3,5%. Životnost thermočlánku závisí na postupném zvyšování přechodného odporu ve spájeném místě a je dostatečně dlouhá — asi 4000 hodin.

Při normálním provozu thermoelektrického generátoru je teplota spájených míst thermočlánků rovna 400—420^0 C, teplota ochlazovaných stykových míst 90—100^0 C. Thermoelektrický generátor má dvě samostatné baterie thermoelektrických článků, jednu pro napájení žhavicích obvodů, druhou pro napájení anodových obvodů vibračního měniče radiového uzlu.

*) Symbol na levé straně rovnice (4) značí tířádkový determinant ze souřadnic vektorů $\mathbf{r}''$, $\mathbf{r}'''$ a $\mathbf{r}^{IV}$. Uvedené vektory představují druhou, třetí a čtvrtou derivaci průvodiče $\mathbf{r}$ podle parametru s.