

Stanislav Kubík

Přibližné řešení nelineární diferenciální rovnice typu

$$f(x)\frac{d^2x}{dt^2} + g(x)\frac{dx}{dt} + h(x) = \Phi(t)$$

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 3, 234--241

Persistent URL: <http://dml.cz/dmlcz/137136>

Terms of use:

© Jednota českých matematiků a fyziků, 1956

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.



This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* <http://project.dml.cz>

PŘÍBLIŽNÉ ŘEŠENÍ NELINEÁRNÍ DIFERENCIÁLNÍ ROVNICE TYPU

$$f(x) \frac{d^2x}{dt^2} + g(x) \frac{dx}{dt} + h(x) = \Phi(t).$$

Nelineární diferenciální rovnice jsou stále jednou z velmi obtížných disciplin moderní matematiky. Obecné řešení je známo jen pro některé zvláštní typy těchto rovnic. Obtížnost vzrůstá s růstem řádu. Dnešní theoretická fyzika a zejména některé její obory, jako theoretická elektrotechnika, se však při zkoumání svých problémů stále častěji setkávají s nelineárními diferenciálními rovnicemi. Takové problémy vyvstávají především při řešení přechodových stavů v elektrických obvodech s nelineárními parametry. Děje, které jsou příslušnými nelineárními diferenciálními rovnicemi popisovány, nevedou obyčejně na typy rovnic, které by se daly převést na typy řešitelné a jež by umožňovaly analytické řešení bez velkých obtíží.

Obtížnost řešení nelineárních diferenciálních rovnic spočívá zejména v tom, že zde neplatí princip superposice řešení. Jde-li o případ vynucených kmitů, tedy o nelineární rovnici s pravou stranou, je nutno rovnici řešit zároveň i s příslušející jí pravou stranou.

Nelineární charakteristiky řešených obvodů se získávají obvykle experimentální cestou a bývají dány grafem. Obvykle není možno vyjádřit tyto závislosti analyticky. Tato skutečnost je jednou z okolností, jež mluví ve prospěch řešení nelineárních diferenciálních rovnic grafickými metodami, kterých existuje celá řada a jichž se zejména v technické praxi hojně používá, i když jsou dnes zatlačovány diferenciálními analytátory a různými analogony.

Jednou z velmi užívaných grafických metod řešení nelineárních diferenciálních rovnic druhého řádu je metoda fázové roviny (podrobněji viz o této metodě na příklad v článku Z. d. Kotka, *Nelineární servomechanismy*, Sborník prací o automatisaci, 1955). Nevýhodou všech grafických metod je, že jsou jen přibližné a že výsledky platí vždy jen pro jeden soubor počátečních podmínek. To znamená řešit pro každý počáteční stav celou rovnici vždy znovu. Platí to samozřejmě i pro metodu fázové roviny. Na druhé straně má tato metoda velkou výhodu v tom, že umožňuje řešit rovnice, které jinak je velmi obtížné řešit (pokud vůbec je to možné), a že umožňuje stále kontrolu již pouhým fyzikálním názorem. Této metody se u nás používalo dosud jen k řešení nelineárních diferenciálních rovnic homogenních (volné kmity). Ukážeme, že tato metoda se hodí také k řešení rovnic nehomogenních, jejichž pravá strana je funkcí nezávisle proměnné. Tuto funkci stačí zadat jen grafem.

Budiž dána nehomogenní nelineární diferenciální rovnice druhého řádu

$$f(x) \frac{d^2x}{dt^2} + g(x) \frac{dx}{dt} + h(x) = \Phi(t), \quad (1)$$

$f(x)$, $g(x)$, $h(x)$ jsou nelineární funkce argumentu x , dané graficky nebo analyticky, a takové, aby v uvažovaném intervalu proměnné x byly jednoznačné a aby v tomto intervalu měly nespojitosti nejvýše prvního druhu. Funkce $\Phi(t)$ budiž dána zase graficky nebo analyticky a necht' v uvažovaném oboru proměnné t splňuje výše uvedené podmínky pro funkce $f(x)$, $g(x)$, $h(x)$.

Poněvadž jde o grafickou metodu, zavedeme příslušné moduly vztahy

$$\begin{aligned}\xi &= \alpha x, \quad \alpha = \text{konst.} \\ \zeta &= \beta t, \quad \beta = \text{konst.}\end{aligned}\tag{2}$$

Z rovnic (2) plyne

$$d\xi = \alpha dx, \quad d\zeta = \beta dt, \quad \frac{dx}{dt} = \frac{\beta}{\alpha} \frac{d\xi}{d\zeta},\tag{3}$$

$$\frac{d^2x}{dt^2} = \frac{d}{dt} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{d\xi}{d\zeta} \right) = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{\beta}{\alpha} \frac{d\xi}{d\zeta} \right) \frac{d\zeta}{dt} = \frac{\beta^2}{\alpha} \frac{d^2\xi}{d\zeta^2}.\tag{4}$$

Pomocí (2), (3) a (4) přepíšeme (1) na tvar

$$\frac{\beta^2}{\alpha} f \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) \frac{d^2\xi}{d\zeta^2} + \frac{\beta}{\alpha} g \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} + h \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) = \Phi \left(\frac{\zeta}{\beta} \right).\tag{5}$$

Rovnici (5) převedeme do fázové roviny vztahy

$$\gamma \frac{d\xi}{d\zeta} = \eta, \quad \gamma = \text{konst.}\tag{6}$$

Pak

$$\frac{d^2\xi}{d\zeta^2} = \frac{d}{d\zeta} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right) = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{d\xi}{d\zeta} \right) \frac{d\xi}{d\zeta} = \frac{d}{d\xi} \left(\frac{\eta}{\gamma} \right) \frac{\eta}{\gamma} = \frac{1}{\gamma^2} \frac{d\eta}{d\xi} \eta.\tag{7}$$

Dosadíme (6) a (7) do (5) a dostaneme rovnici (1), přepsanou do fázové roviny $(\xi, \eta) \Rightarrow$ rovina $\left(\alpha, x, \frac{\alpha\gamma}{\beta} \frac{dx}{dt} \right)$, ve které je $\zeta = \beta t$ parametrem

$$\frac{\beta^2}{\alpha\gamma^2} f \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) \frac{d\eta}{d\xi} \eta + \frac{\beta}{\alpha\gamma} g \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) \eta + h \left(\frac{\xi}{\alpha} \right) = \Phi \left(\frac{\zeta}{\beta} \right).$$

Po úpravě dostaneme

$$f_1(\xi) \frac{d\eta}{d\xi} \eta + g_1(\xi) \eta + h_1(\xi) = \Phi_1(\zeta).\tag{8}$$

Řešením této rovnice ve fázové rovině dostaneme průběh přechodového i ustáleného stavu fyzikálního jevu, popisovaného rovnicí (1). Fázová trajektorie odpovídá přechodovému stavu a její limitní cykl stavu ustálenému (je-li vstupní funkce $\Phi(t)$ funkcí periodickou).

Přepíšeme rovnici (8) na tvar

$$\frac{d\eta}{d\xi} = \eta' = \frac{-\eta g_1(\xi) - h_1(\xi) + \Phi_1(\zeta)}{\eta f_1(\xi)} = \frac{F}{\eta},\tag{9}$$

kde

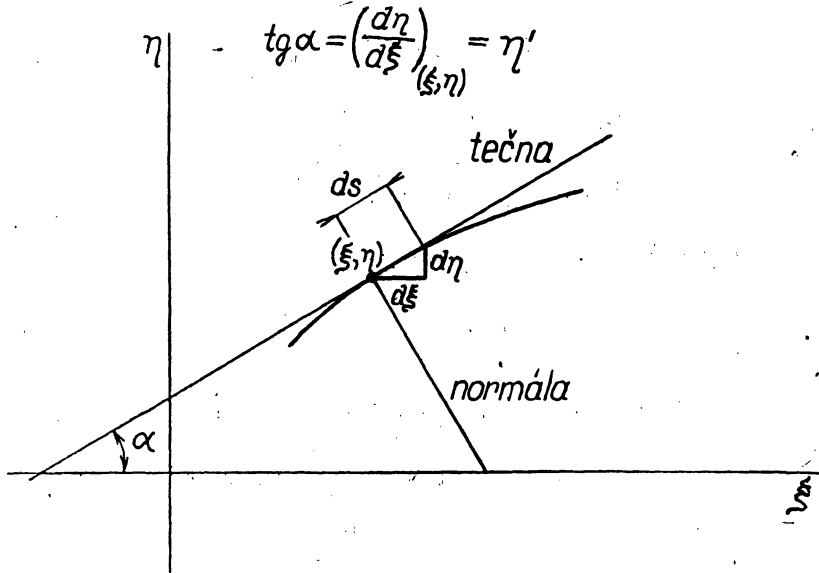
$$F = \frac{-\eta g_1(\xi) - h_1(\xi) + \Phi_1(\zeta)}{f_1(\xi)}.$$

V okolí bodu fázové trajektorie, která je jedním z partikulárních integrálů rovnice (9), nahradíme trajektorii elementem tečny (obr. 1). Element tečny nahrazuje diferencíál oblouku

$$ds = \sqrt{d\xi^2 + d\eta^2} = d\xi \sqrt{1 + \eta'^2}.\tag{10}$$

Nahrazením elementů oblouku fázové trajektorie elementy tečen sestrojíme integrální křivku ve fázové rovině vždy pro jeden soubor počátečních podmínek.

Pomocí výše uvedených vztahů odvodíme výraz pro vzájemný vztah mezi diferenciálem oblouku fázové trajektorie a diferenciálem nezávisle proměnné $d\tau$, resp. [v rovnici (9)] diferenciálem parametru $d\xi$.



Obr. 1.

V okolí bodu (ξ, η) (obr. 2) nahradíme diferenciál oblouku fázové trajektorie elementem tečny v tomto bodě a sestrojíme v tomto bodě normálu n . Platí

$$\frac{ds}{n} = \operatorname{tg}(d\varphi).$$

Pro malé úhly (v praktických případech pro $10^\circ - 12^\circ$) je $\operatorname{tg}(d\varphi) = d\varphi$; odtud

$$ds = n d\varphi.$$

Délka normály (viz obr. 2) je

$$n = \sqrt{X^2 + \eta^2},$$

kde X je subnormála fázové trajektorie v bodě (ξ, η) . Dále je

$$\frac{X}{\eta} = \operatorname{tg} \alpha = \frac{d\eta}{d\xi} = \eta', \quad X = \eta \eta'.$$

Porovnáním s (9) dostaneme

$$X = F.$$

Délka normály n je tedy

$$n = \sqrt{X^2 + \eta^2} = \sqrt{F^2 + \eta^2} = \sqrt{(\eta \eta')^2 + \eta^2} = \eta \sqrt{1 + \eta'^2},$$

$$ds = n d\varphi = \eta \sqrt{1 + \eta'^2} \cdot d\varphi.$$

(11)

Srovnáním (10) a (11) dostaneme

$$d\xi \sqrt{1 + \eta^2} = \eta \sqrt{1 + \eta^2} d\varphi, \quad d\varphi = \frac{d\xi}{\eta}. \quad (12)$$

Dosadíme-li za η z (6) a (2), dostaneme

$$d\varphi = \frac{d\xi}{\gamma \frac{d\xi}{d\zeta}} = \frac{d\zeta}{\gamma} = \frac{\beta}{\gamma} d\tau. \quad (13)$$

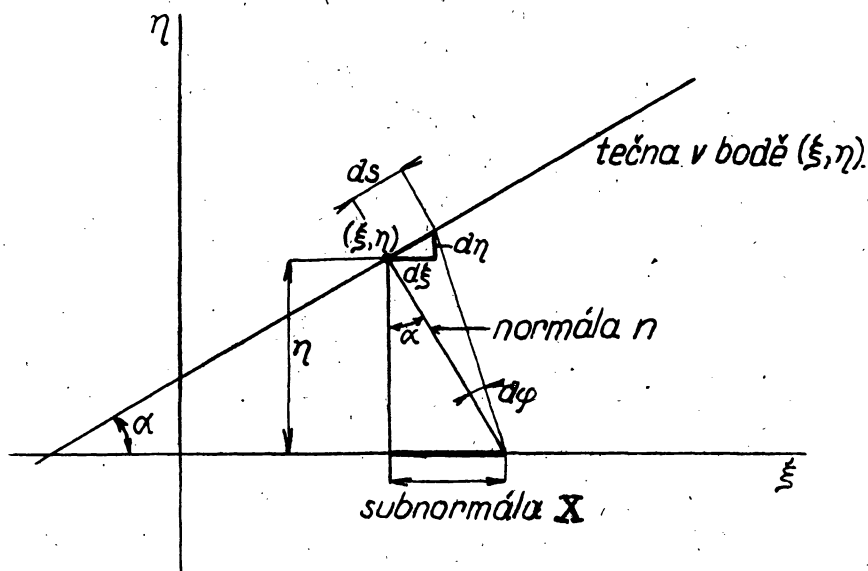
Výraz (13) tedy udává vztah mezi diferenciálem úhlu oblouku fázové trajektorie a jemu odpovídajícím diferenciálem času funkce $\Phi(\tau)$, resp. diferenciálem $d\zeta$ funkce $\Phi_1(\zeta)$.

Postup při řešení praktického příkladu:

Do fázové roviny (ξ, η) zaneseme nelineární charakteristiky $f_1(\xi)$, $g_1(\xi)$, $h_1(\xi)$, nacházející se v rovnici (8), jako funkce argumentu ξ (obr. 3). V souřadnicové soustavě $[\zeta, \Phi_1(\zeta)]$ zakreslíme graf funkce $\Phi_1(\zeta)$ jako funkci parametru ζ (obr. 4). Z výrazu (13) stanovíme vztah mezi úsekem $d\zeta$ a velikostí $d\varphi$. Velikost úseku $d\zeta$ je dána volbou velikosti $d\varphi$. Tím ve skutečnosti nahradíme funkci $\Phi_1(\zeta)$ schodovitou funkcí. Stanovením počátečních podmínek získáme výchozí bod fázové trajektorie o souřadnicích (ξ_0, η_0) (viz obr. 3) a také počáteční hodnotu parametrické funkce (vstupní funkce v systému) v bodě ζ_0 . Zavedením modulů jsou všechna měřítka sladěna. Podle vztahu (9) sestrojíme v daném počátečním bodě tečnu, jejíž směrnici vztah (9) udává. Sestrojíme grafický podíl

$$\left[\frac{-\eta g_1(\xi) - h_1(\xi) + \Phi_1(\xi)}{f_1(\xi)} \right]_{(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} =$$

$$= \left(\frac{F}{\eta} \right)_{(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)} = \left(\frac{X}{\eta} \right)_{(\xi_0, \eta_0, \zeta_0)}$$



Obr. 2.

(viz obr. 3). Velikost F je nutno stanovit numericky, graficky, po případě počítačím strojem (jde o jednoduché početní operace). Znaménkem F a η je dána v tom kterém kvadrantu směrnice tečny, a podle toho vynášíme F na jednu nebo druhou stranu od paty pořadnice η na ose ξ . Délku úseku tečny, který nahrazuje úsek fázové trajektorie, stanovíme rychle podle obr. 5 pro různé délky normály n . Tím získáme další bod fázové trajektorie, kde konstrukci výše popsanou opakujeme. Příslušné hodnoty $\Phi_1(\zeta)$ stanovíme z grafu z obr. 4, když pro každý element fázové trajektorie postoupíme o úsek $d\zeta$, stanovený z rovnice (13). Elementy fázové trajektorie nejsou samozřejmě stejně dlouhé, neboť jsou funkcí velikosti normály v příslušném bodě. Zmínky zaslouží ještě body, ve kterých je $\eta = 0$, to jest body, ve kterých fázová trajektorie protíná osu ξ :

$$\lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{d\eta}{d\xi} = \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{-\eta g_1(\xi) - h_1(\xi) + \Phi_1(\zeta)}{\eta f_1(\xi)} = \infty,$$

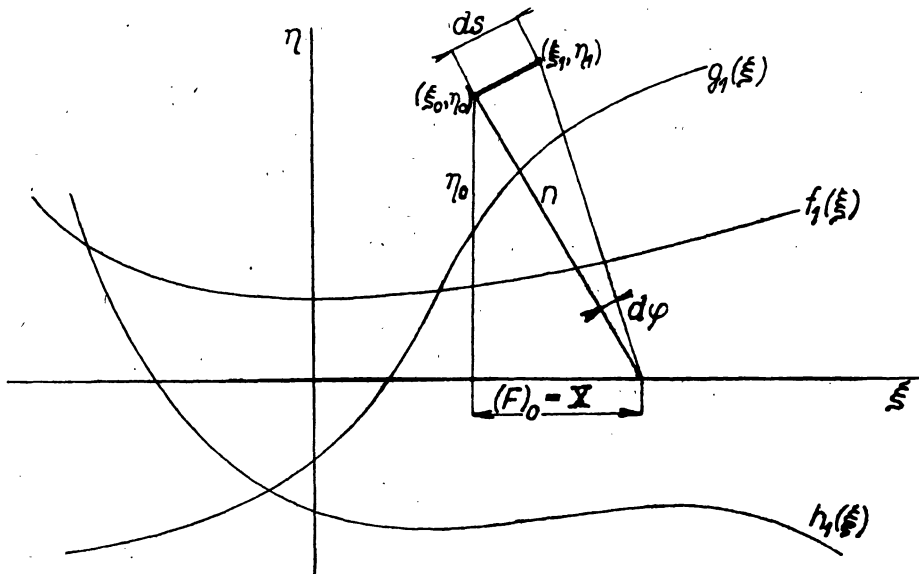
což značí (za předpokladu, že $F \neq 0$), že tečna v těchto bodech je kolmá k ose ξ , to jest fázová trajektorie protíná osu ξ v těchto bodech kolmo.

Jde ještě o délku normály n podle vztahu (11). Pišme

$$f_1(\xi) = f_1, g_1(\xi) = g_1, h_1(\xi) = h_1, \Phi_1(\zeta) = \Phi_1.$$

Pak

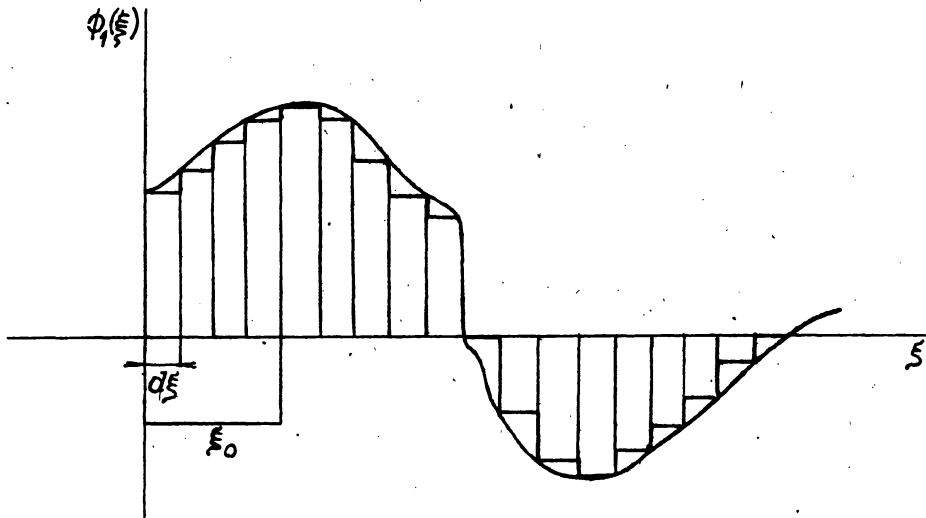
$$\begin{aligned} n &= \sqrt{F^2 + \eta^2} = \sqrt{\frac{(-\eta g_1 - h_1 + \Phi_1)^2 + \eta^2 f_1^2}{f_1^2}} = \\ &= \frac{1}{f_1} \sqrt{g_1^2 \eta^2 + h_1^2 + \Phi_1^2 + 2g_1 h_1 \eta - 2g_1 \Phi_1 \eta - 2h_1 \Phi_1 + f_1^2 \eta^2}, \\ \lim_{\eta \rightarrow 0} n &= \lim_{\eta \rightarrow 0} \frac{1}{f_1} \sqrt{g_1^2 \eta^2 + h_1^2 + \Phi_1^2 + 2g_1 h_1 \eta - 2g_1 \Phi_1 \eta - 2h_1 \Phi_1 + f_1^2 \eta^2} = \\ &= \frac{1}{f_1} \sqrt{\Phi_1^2 - 2h_1 \Phi_1 + h_1^2} = \frac{\Phi_1 - h_1}{f_1}. \end{aligned} \quad (14)$$



Obr. 3.

Z toho vyplývá, že i pro případ, kdy $\eta = 0$, můžeme z výrazu (9) stanovit délku normály n , a tím určit délku elementu tečny. Druhý případ, který by mohl působit obtíže, to jest $f_1(\xi) = 0$, nemá fyzikálního obsahu.

Tak sestrojíme fázové trajektorie, odpovídající přechodovým stavům pro různé počáteční podmínky. Tyto trajektorie vplynou v určitých bodech do limitního cyklu (existuje jen tehdy, je-li vstupní funkce $\Phi(t)$ periodická).



Obr. 4. (Čti všude ζ místo ξ .)

Časový průběh veličin x a $\frac{dx}{dt}$ v příslušných měřících zjistíme z fázové trajektorie tak, že v odpovídajících bodech 1, 2, 3, ... fázové trajektorie odečteme souřadnice x a $\frac{dx}{dt}$. Tyto souřadnice vyneseme do grafů, v nichž jako nezávisle proměnná je čas t . Na časovou osu nanese me úseky o velikosti dt podle (13). Body, na časové ose takto získané, označí me 1', 2', 3', ... V bodě 1' vyneseme jako pořadnice souřadnice x a $\frac{dx}{dt}$ bodu fázové roviny, označeného 1. V bodě 2', který je vzdálen od bodu 1' o dt , vyneseme souřadnice bodu 2 fázové roviny atd. Tak získáme časové průběhy veličin x a $\frac{dx}{dt}$. Názorně je věc vidět v *obrazech 6 a 7*.

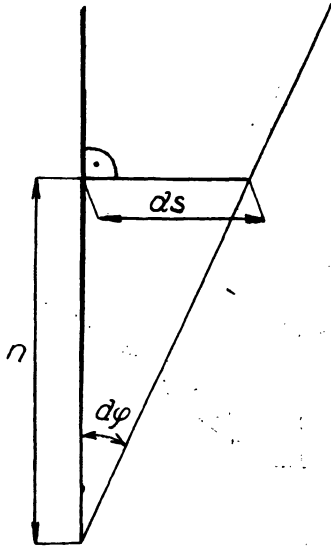
Nyní několik poznámek k přesnosti této metody.

Partikulární integrál diferenciální rovnice (fázovou trajektorii) aproximujeme lomenou čarou. Směr elementů v bodech trajektorie známe vždy až když známe bod elementu. Aproximace spočívá v tom, že přírůstku h_0 argumentu ξ_0 odpovídá přírůstek hodnoty integrálu $a_0 = \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) h_0 \right] (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$, neboli pro argument $\xi_1 = \xi_0 + h_0$ bereme za hodnotu integrálu $\eta_1 = \eta_0 + \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) h_0 \right] (\xi_0, \eta_0, \zeta_0)$. Podobně klademe přírůstky v bodě η_1 přibližně rovny $a_1 = \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) h_1 \right] (\xi_1, \eta_1, \zeta_1)$, takže pro argument $\eta_2 = \eta_1 + h_1$

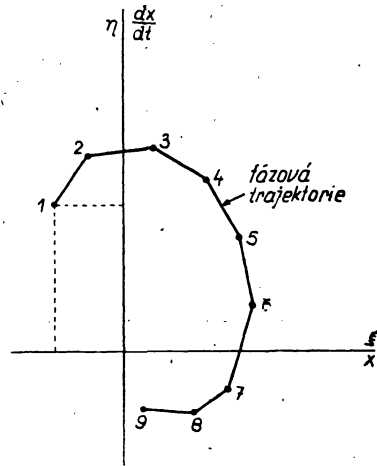
aproximujeme integrál hodnotami $\eta_2 = \eta_1 + a_1 = \eta_1 + \left[\left(\frac{d\eta}{d\xi} \right) h_1 \right]_{(\xi_1, \eta_1, \xi_1)}$ atd.

Abychom odhadli přesnost této metody, rozviňme v řadu integrál $\eta = \eta(\xi)$, který pro $\xi = \xi_0$ nabývá hodnot η_0 . Hodnota parametrické funkce je pro úsek v okolí bodu ξ_0

konstantní. Zaveďme operátor $D = \chi \left(\frac{d}{d\eta} \right)_0$, kde $\frac{d\eta}{d\xi} = \eta' = \frac{F}{\eta} = \chi(\xi, \eta)$,



Obr. 5.



Obr. 6.

$$\eta(\xi_0) = \eta_0,$$

$$\eta'(\xi_0) = \chi(\xi_0, \eta_0) = \chi,$$

$$\eta''(\xi_0) = \eta' \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 = \chi \left(\frac{\partial \chi}{\partial \eta} \right)_0 = D(\chi),$$

$$\eta'''(\xi_0) = D[D(\chi)] = D^2(\chi),$$

$$\eta^{IV}(\xi_0) = D[D^2(\chi)],$$

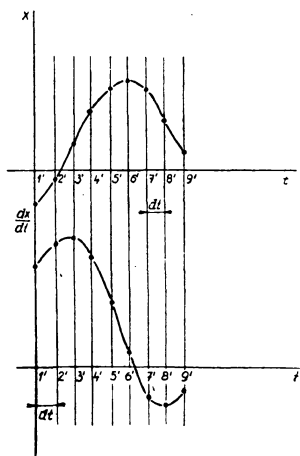
atd. Potom hledaný rozvoj je

$$\eta = \eta_0 + (\xi - \xi_0) \chi + \frac{(\xi - \xi_0)^2}{2} D(\chi) + \frac{(\xi - \xi_0)^3}{3!} D^2(\chi) + \dots + \frac{(\xi - \xi_0)^4}{4!} D^3(\chi) + \dots$$

Pro argument $\xi_1 - \xi_0 = h_0$ je tedy přesná hodnota integrálu $\eta_1 = \eta_0 + h_0 \chi + \frac{1}{2} h_0^2 D(\chi) + \frac{1}{6} h_0^3 D^2(\chi) + \frac{1}{24} h_0^4 D^3(\chi) + \dots$ Zbytek naší aproximace je

$$z = \frac{1}{2} h_0^2 D(\chi) + \dots = \frac{1}{2} h_0^2 \chi \left(\frac{d\chi}{d\eta} \right)_0 + \dots,$$

vynecháme-li členy řádu vyššího než druhého. Je tedy zbytek této metody řádu h_0^2 . Je třeba jen upozornit na to, že přírůstky h_i argumentu ξ nejsou u této metody stejné. Je však možno stanovit maximální h_m pomocí výše uvedených vztahů tak, aby pro všechna $h_i \leq h_m$ byl zbytek ještě v mezích požadované přesnosti.



Obr. 7.

Závěrem třeba zdůraznit, že tento způsob řešení dává především výsledky kvalitativní, které fysika a zvláště pak technika zajímají. Kvantitativní výsledky závisí na pečlivosti, s jakou se provádí řešení, a jejich chyba je dána zbytkem této metody. V technické praxi jsou chyby, které působí tato metoda, zanedbatelné, a výsledky touto metodou získané velmi dobře odpovídají výsledkům, dosaženým experimentálně. Tímto způsobem je možno řešit elektrické obvody, které vedou na diferenciální rovnice druhého řádu a jejichž parametry jsou funkce proudu, toku a pod., magnetické nelineární obvody, mechanické nelineární obvody, úlohy z nelineárních servomechanismů atd. Na vstup těchto obvodů je možno přivádět funkce libovolného časového průběhu. Tímto způsobem

lze na příklad řešit elektrický obvod, skládající se ze seriově řazeného nelineárního ohmického odporu (variátoru), přesycené tlumivky a kondensátoru po případě také nelineárního, nebo induktivně vázaný obvod bez rozptylové indukčnosti, na jehož primární straně je nelineární odpor, jeho vazbová indukčnost je také nelineární, v sekundáru je v serii kapacita a nelineární ohmický odpor a pod. Podobné úlohy se vyskytují v servomechanismech i v mechanice. Je tedy možno říci, že pro techniky má uvedená metoda značný význam k stanovení přechodových i ustálených průběhů vynucených kmitů v nelineárních obvodech. Jak se v poslední době ukázalo, je možno principu této metody použít i pro řešení nelineárních nehomogenních diferenciálních rovnic vyšších řádů.

Literatura

- Andronov - Chajkin, *Theory of Oscillations*, New Jersey 1949 (překlad z ruštiny).
 J. J. Stoker, *Nelineární je kolebanja v mechanických i elektrických systémech*, Moskva 1952 (překlad z angličtiny).
 S. Kubík, *Řešení nelineárního obvodu napájeného střídavým napětím*, Slaboproudý obzor, 1956, č. 7.