Karl Schröter
Dosah a hranice axiomatické metody

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 3, 346--355

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137118

kladů, že jsme tím dialektiku nevyčerpali. Chtěli jsme však zdůraznit, jak správnou se ukázala Leninova myšlenka, že právě zde je podstata dialektiky. Chtěli jsme také obrátit pozornost na nerozlučnost konkrétních vědeckých poznatků a dialektické metody. Jistě tu není třeba zvlášť formulovaného závěru. Tvořivé rozvíjení dialektiky ve směrech, které ukázal Lenin, ve směrech daných novými vědeckými fakty a ovšem také na podkladě politické a společenské praxe, pečlivá aplikace dialektiky v řešení vědeckých problémů — tyto úkoly jsou před sovětskými vědci všech oborů.

Systematické propracování dialektiky, dialektické logiky jako filosofické vědy je nejdůležitějším úkolem našich filosofů. Marxistická filosofie má obecný význam; mezi všemi jejími stránkami má však dialektická metoda zvláštní místo. Dialektika je duší marxismu, zejména proto, že i samy filosofické problémy je třeba zkoumat dialekticky. Dialektika, zahrnující ve svých zákonech vývoj všeho existujícího, vytváří předpoklady pro vlastní rozvoj. Kdyby ztrnula, přestala by být dialektikou. Její vývoj se však neděje spontánně, nýbrž ve vzájemném působení předmětu a metody, konkrétního poznatku dialektiky samé. Jedno bez druhého je nemyslitelné. Naše filosofická metoda, naše ideologické zbraně se ostří na žulovém základu objektivních vědeckých faktů.

Přeložili ing. František Fabian a dr. Josef Veselka

DOSAH A HRANICE AXIOMATICKÉ METODY[1])

KARL SCHRÖTER (Berlín)

V posledních 150ti letech dostává matematika neustále abstraktnější ráz. Ukazuje se to zejména na častějším používání tzv. axiomatických metod. Musíme přitom rozlišovat dva způsoby jejich užití. Jeden z nich je zcela bez problémů; jde totiž přesně vzato pouze o explicitní definice některých pojmů. Příkladem pro toto používání axiomatické metody je definice pojmu grupy. Množina tvoří vzhledem k jisté operaci grupu jak známo právě tehdy, je-li operace v množině jednoznačně definována, je-li dále v množině oboustranně jednoznačně definována příslušná inversní operace a konečně je-li základní operace asociativní. Říkáme proto často, že těmito třemi vlastnostmi je pojem grupy axiomaticky vymezen. Z uvedené formulace přímo plyne, že při tomto axiomatickém vymezení jde skutečně jen o obvyklou definici pojmu grupy. Takto vymezený pojem grupy je ovšem ve srovnání s dřívějším způsobem tvoření pojmů abstraktnější. Tento pojem totiž může zahrnovat rozmanité množiny a nejrůznější operace. V matematice, tak jak se vyvinula do začátku 19. století, nebylo takové tvoření pojmů obvyklé. Až do této doby byly obecně zkoumány jen speciální obory předmětů, jako např. určité obory čísel nebo geometrické objekty a jejich vztahy resp. operace mezi nimi.

Právě charakterisovaný způsob použití axiomatické metody je zcela bez problémů, nelze však totéž říci o jiném způsobu použití této metody. Jak známo v mnoha přednáškách o vyšší matematice se vychází z tzv. Peanovy axioma-

[1]) Karl Schröter, *Die Tragweite und die Grenzen der axiomatischen Methode*, Deutsche Zeitschrift für Philosophie, roč. 5 (1957), č. 4. Přednáška přednesená dne 2. 11. 1955 v Radě matematicko-přírodovědecké fakulty Humboldtovy university v Berlíně.

tiky přirozených čísel, nebo často dokonce z odpovídající axiomatiky pro reálná čísla. V této souvislosti nebývají přirozená resp. reálná čísla definována a jsou o nich jen formulovány jisté věty. Peanův systém axiomů zní např. takto:

1. Nula je přirozené číslo.
2. Ke každému přirozenému číslu existuje právě jeden následovník.
3. Nula není následovníkem žádného přirozeného čísla.
4. Každé přirozené číslo je následovníkem nejvýše jednoho přirozeného čísla.
5. Jestliže nula je prvkem jisté množiny a tato množina s každým svým prvkem obsahuje také jeho následovníka, pak obsahuje všechna přirozená čísla.

Je jasné, že Peanův systém axiomů má docela jiný charakter než výše uvedený systém axiomů pro grupu. V Peanově systému axiomů nemůžeme zřejmě mluvit o tom, že pojmy množina přirozených čísel, číslo nula a vztah následovníka, které axiomatika obsahuje, by jí byly v nějakém smyslu definovány. Rozhodně nelze mluvit o explicitní definici. Zda lze mluvit o definici těchto pojmů v nějakém jiném smyslu je při nejmenším problematické. K této otázce se ještě vrátíme. Všechny další úvahy o axiomatické metodě se vztahují na systémy axiomů obdobné Peanovu systému pro přirozená čísla.

Axiomatická metoda kterou zde vyšetřujeme není „vymožeností“ 19. nebo 20. století. Je mnohem starší. V základních rysech ji najdeme již v Eukleidových *Základech*. Při budování své geometrie vychází Eukleides z tzv. definic, postulátů a axiomů. Definicemi příslušné geometrické pojmy názorně objasňuje. Eukleidovy postuláty odpovídají axiomům v moderním slova smyslu a konečně Eukleidovy axiomy jsou, moderně řečeno, axiomy logiky, pokud je Eukleides formuluje. Eukleides z těchto postulátů známým způsobem čistě deduktivně vyvozuje další poučky o geometrických objektech stejně, jako při moderním axiomatickém vyšetřování.

Především si musíme ujasnit, že Eukleidova geometrie je z tohoto hlediska produktem dlouhého vývoje. Matematika existovala již dlouho před Eukleidem. První počátky matematiky se zabývají pojmem čísla tak, jak se vyvíjel dlouhým procesem abstrakcí z reálných vztahů materiálních předmětů. Tento vývojový proces můžeme ještě dnes sledovat u tzv. primitivních národů nebo u dětí. Vskutku — moderně řečeno — v pojmu čísla jde o vztahy mohutností množin předmětů vnějšího světa resp. o čítací procesy, které se s těmito předměty provádějí. Druhým pilířem matematiky byla geometrie. Také geometrické pojmy, pojem bodu, přímky a roviny, byly získány abstrakcí z reálných vztahů materiálních předmětů. Geometrie, jak známo, vznikla nejdříve v oblasti Nilu na základě zcela konkrétních materiálních potřeb. Ročně se opakující záplavy Nilu vedly bezprostředně k problému, jak po nich znovu rozměřit ornou půdu. Při řešení tohoto úkolu byly stanovovány první geometrické zákonitosti. Zvláště to platí pro Pythagorovu poučku, která byla objevena určitě empiricky při vyměřování trojúhelníků s délkami stran např. 3, 4 a 5. Napneme-li uzavřené lano, na kterém jsou ve vzdálenostech 3, 4, 5 uvázány uzly, ukáže se, že při vrcholu, který je tvořen stranami o délkách 3 a 4, je úhel pravý. Úmyslně uvádíme tento velmi jednoduchý příklad, aby bylo zřejmé, že základní pojmy a poučky celé matematiky vznikly z reálných vztahů vnějšího světa. Až bylo nahromaděno velké množství takových poznatků, vedl další vývoj k jejich systematisaci, jak to vidíme ještě dnes při vzniku moderních matematických disciplin. Také dnes shromažďujeme na začátku vývoje matematické teorie jednotlivé výsledky, které po určité době vyústí v systematickou stavbu. Eukleidovy *Základy* byly takovým systematickým podáním geometrie. Měly pak v pozdější době velmi silný vliv. V důsledku toho byl jejich význam neobyčejně přeceněn. Jak silný vliv měly Eukleidovy *Základy* ještě v moderní době ukazuje např. fakt, že ještě dnes je vyučování geometrii v ultrakonservativní Anglii budováno převážně na Eukleidových *Základech*.

Horší než toto přecenění axiomatické metody, jež se nejprve projevilo u Eukleida, jsou ovšem filosoficky chybné interpretace této Eukleidovy axiomatiky, které se zvlášť výrazně projevily v německém filosofickém idealismu a v učebních soustavách, na něm založených. V mnoha filosofických soustavách je axiom charakterisován jako věta, která nevyžaduje důkazu a kterou dokázat ani nelze. Tato formulace je ovšem v naprostém souladu s Kantovou teorií poznání. Podle Kanta jsou totiž Eukleidovy geometrické axiomy syntetickými soudy a priori. Tyto soudy se podle Kantovy teorie poznání prý nezískávají abstrakcí z reálných vztahů; Kant, jak známo, tvrdí, že syntetické poznání se získává tzv. čistým nazíráním. Kantova interpretace a všechny interpretace axiomatické metody z ní vycházející jsou úplně chybné. V dalším tento závěr odůvodníme podrobněji.

Již nyní můžeme poukázat na to, že zvláště vyšetřování neeukleidovských geometrií, které jsou v úzkém vztahu s proslulým pátým postulátem Eukleidovým, s tzv. axiomem o rovnoběžkách, vyvrací zcela určitě Kantův názor, že u Eukleidových axiomů jde o syntetické soudy a priory. Vůbec nelze říci, že Eukleidův pátý postulát by mohl být takovým syntetickým úsudkem a priori. Právě vznik neeukleidovské geometrie dokazuje, že existují nejrůznější geometrie, kde např. Eukleidův pátý postulát vůbec neplatí. Ač idealistické posice Kantovy v této vyhraněné formě byly vyvráceny, dělaly se ve filosofii opět a opět pokusy axiomatickou metodu interpretovat ve smyslu idealistické teorie poznání. Poslední takový zvláště výrazný pokus najdeme v positivistické filosofii, jak byla ke konci minulého století založena Machem a jak byla rozvinuta neopositivistickou školou „Vídeňského kruhu" ve 20. letech tohoto století. Podle tohoto positivistického názoru jde u axiomatické metody o tzv. implicitní definice. Je tak prý možno pomocí axiomatické metody přesně vymezit obor předmětů určitými vlastnostmi a vztahy. Uvidíme ihned, že to jistě není možné. Žel i matematici podporovali tyto falešné filosofické názory. Zvláště charakteristickým je v tom smyslu Hilbertův úvod k jeho slavnému pojednání „Základy geometrie", jež vyšlo po prvé v r. 1899 a které se stalo základem pro moderní bádání v této oblasti. Hilbert zahajuje svůj výklad, jak známo, takto: „Definice: Uvažujme tři různé systémy předmětů: předměty prvního systému nazveme body a označme je A, B, C, předměty druhého systému nazveme přímky a označme a, b, c a předměty třetího systému nazveme roviny a označme α, β, γ; body nazýváme také prvky geometrie na přímce, body a přímky nazýváme elementy rovinné geometrie a konečně body, přímky a roviny nazýváme elementy prostorové geometrie.

Myslíme si, že body, přímky a roviny jsou v jistých vzájemných vztazích a označíme tyto vztahy slovy: „leží", „mezi", „rovnoběžný", „kongruentní", „spojitý". Přesně a úplně vymezíme tyto vztahy axiomy geometrie."

Tento Hilbertův úvod má zcela jasné positivistické zabarvení. Je však třeba poukázat na to, že další vývody Hilbertovy naprosto nezávisí na této filosoficky chybné interpretaci. Hilbertova vyšetřování základů geometrie měly, jak známo, mimořádný význam pro další rozvoj geometrie. Kritické poznámky, které jsem uvedl, neberme proto jako lacinou kritiku Hilbertovy chybné formulace. Rozdíl mezi významným matematikem Hilbertem a filosofem „Vídeňského kruhu" je tak zřejmý, že se o tom jistě nemusím dál šířit.

O tom, že axiomatickou metodou lze obor předmětů implicitně určit, nemůže tedy být ani řeč. Všimněme si např. výše uvedeného Peanova systému axiomů. Jako základní pojmy vystupují zde: množina přirozených čísel, číslo nula a vztah následovníka. Pokud tyto pojmy nebyly již dříve vytvořeny a pokud známe jen Peanovy věty, určitě nejsou jimi tyto pojmy jednoznačně určeny. Nahradíme-li totiž v Peanově systému axiomů uvedené pojmy postupně množinou **M**, některým elementem a této množiny a binární relací $\mathfrak{R}$, dostaneme poněkud abstraktní formulaci Peanova systému axiomů:

1. a je elementem množiny **M**;
2. ke každému prvku množiny **M** existuje právě jeden, který je k němu v relaci $\mathfrak{R}$;
3. a není k žádnému prvku z **M** v relaci $\mathfrak{R}$;
4. ke každému prvku z **M** existuje v **M** nejvýše jeden, který je s ním v relaci $\mathfrak{R}$;
5. obsahuje-li nějaká množina předně element a, dále obsahuje-li s každým elementem také element, který je s ním v relaci $\mathfrak{R}$, obsahuje všechny elementy množiny **M**.

Tyto věty platí zřejmě pro velmi mnoho vzájemně různých oborů předmětů. Můžeme **M** a $\mathfrak{R}$ „interpretovat" velmi mnoha způsoby a vždy dostáneme správná tvrzení. Můžeme např. zvolit za **M** množinu všech sudých čísel různých od nuly, za prvek a sudé číslo 2 a za $\mathfrak{R}$ považovat takovou binární relaci, která přiřazuje prvku $2n$ prvek $2n + 2$, kde n je libovolné přirozené číslo různé od nuly. Při této interpretaci budou zřejmě všechny věty výše uvedeného systému axiomů splněny a přesto nikdo nemůže popřít, že přirozená čísla jsou docela něco jiného, než od nuly různá sudá čísla, která tvoří pravou část množiny přirozených čísel.

Mezi těmito oběma modely uvedeného systému axiomů existuje nicméně velmi podstatný vztah. Oba, a jak lze snadno ukázat, všechny modely uvedeného systému axiomů jsou v matematickém smyslu isomorfní, tj. existuje vzájemně jednoznačné zobrazení příslušných dvou množin zachovávající relaci $\mathfrak{R}$.

Systém axiomů, jehož libovolné dva modely jsou isomorfní, nazýváme *kategorickým*. Uvedený systém je tedy kategorický. Je dále také *monotransformabilní*. Rozumíme tím, že isomorfie každých dvou modelů může být vyjádřena právě jedním vzájemně jednoznačným zobrazením (existuje právě jeden tzv. *korelátor isomorfie*). I tato vlastnost monotransformability má velký význam. Je třeba však znovu upozornit na to, že zřejmě isomorfní modely mohou být obecně různé.

Z uvedených vývodů plyne, že není možné axiomaticky jednoznačně vymezit obor předmětů. Takové vymezení je možné, jak říkáme, pouze až na isomorfismus. Zdá se tedy, jakoby axiomatická metoda v přísném slova smyslu ztroskotala. To však není zcela správné. Chtěl bych nyní spíše ukázat, v jakém smyslu přece lze užít axiomatické metody, jaké se přitom vynořují problémy, jejichž velký význam pro vědu nelze popřít.

Správné použití axiomatické metody zahrnuje několik kroků. Dříve než může být použito axiomatické metody musí být již vymezen obor předmětů, vlastností a vztahů, který má být vyšetřován. Přitom neexistuje žádná jiná metoda, než odvodit prvotní (základní) matematické pojmy abstrakcí z reálných vztahů materiálních objektů. O procesu abstrakce, jak jej má být v tomto případě použito, můžeme dnes vyslovit velmi přesné závěry. Podrobný rozbor na tomto místě by nás však vedl příliš daleko. Chci upozornit jen na to, že základem při všech abstrakcích tohoto druhu je tzv. vztah ekvivalence a že abstrakce vede přes tento vztah ekvivalence k tzv. třídám abstrakcí. Uvádím to proto, aby nemohl vzniknout dojem, že zde jen obecně a nejasně filosofujeme o abstrakci z reálných vztahů hmotných objektů. Není tomu tak. Pro tento první krok, který musíme udělat vlastně ještě před použitím axiomatické metody, je především důležité, že předem musí být vymezeno co se má vlastně axiomatisovat. Jen tak získává použití axiomatické metody své odůvodnění.

Při použití axiomatické metody musí být dále přesně vymezen pojem výroku o předmětech vyšetřovaného oboru. Jak má být chápán pojem výroku v jisté teorii lze dnes také velmi přesně říci. Opět by nás však zavedlo velmi daleko, kdybychom chtěli třeba jen na příkladě ukázat, jak má být pojem výroku vytvořen. Aby však matematické základy, na kterých stojí tento pojem, byly jasné, chci výslovně upozornit na to, že pojem výroku v dané teorii, která má být axiomatisována, lze popsat pomocí teorie volných (*freie*) pologrup s alespoň dvěma generátory. Právě na této poznámce lze ověřit, že zde opět nejde o nejasné filosofování o výrocích, ale že při rozumně použité axiomatické metodě lze vymezit pojem výroku tak přesně, jak je to obvyklé při tvoření všech ostatních matematických pojmů.

Takto charakterisované výroky jsou tedy prvky jisté volné pologrupy s alespoň dvěma generátory. Tento popis tedy neříká zatím nic o oboru předmětů, vlastností a relací teorie, která má být axiomatisována. Interpretace těchto výroků je třetím krokem axiomatisace. I tato interpretace může být dnes provedena s přesností, která je obvyklá v jiných matematických úvahách. Jde přitom o ohodnocovací teorii pro jisté prvky volné pologrupy, ve které jsou výroky tvořeny. Při ohodnocení se používá pojmu pravdivostní hodnoty. Pojem pravdivostní hodnoty se zase vyvinul abstrakcí z pravdivých a nepravdivých výroků, kterých všichni v každodenním životě používáme. Výroky rozpadají se tedy právě do dvou tříd bez společných prvků, a to na třídu pravdivých výroků a na třídu nepravdivých výroků. Obě tyto třídy výroků s odpovídajícími vlastnostmi jsou právě obě pravdivostní hodnoty. Tak lze výroky interpretovat. Z této interpretace plyne, že pojem pravdivého výroku jisté matematické teorie je bezvadně precisován.

V axiomatické metodě jde nyní v podstatě o to, takto charakterisované pravdivé výroky a přirozeně jen tyto výroky jisté matematické teorie odvodit z jistého přehledného systému axiomů. Přitom musíme udělat čtvrtý krok — vymezit pojem odvoditelnosti. Ani formulace pojmu odvoditelnosti nebo dokazatelnosti nečiní dnes žádných obtíží.

Dostáváme se tak konečně k pátému a poslednímu kroku při stavbě axiomatického systému. Na axiomatickém systému musíme požadovat, aby všechny pravdivé a přirozeně jen pravdivé výroky axiomatisované teorie bylo možno na základě vytvořeného pojmu dokazatelnosti odvodit. Přitom musíme na systém axiomů přirozeně klást jisté omezující požadavky. Kdybychom tak neučinili, mohli bychom např. považovat za systém axiomů právě množinu všech pravdivých výroků. To by však zřejmě nebylo žádné řešení problému. Je třeba spíše požadovat, aby systém axiomů byl v jistém smyslu přehledný.

Původně se mělo za to, že je třeba požadovat, aby systém axiomů byl konečný. Toto omezení je však příliš silné. Jednoduchým důsledkem toho by bylo, že mnoho teorií by nebylo lze axiomatisovat. Toto omezení je také skutečně obsahově příliš ostré. U přehledného systému budeme moci jen žádat, abychom o předem daném výroku mohli rozhodnout, zda patří nebo nepatří k systému axiomů.

V tomto obecném smyslu a jen v tomto smyslu mluvíme dnes o systému axiomů. Systém axiomů není tedy množina výroků, které v Kantově smyslu nevyžadují důkazu a jsou nedokazatelné. Systém axiomů je charakterisován tím, že z něj je možno všechna pravdivá tvrzení a jen tato tvrzení příslušné teorie dokázat. Na systému axiomů dále požadujeme jen to, aby byl přehledný, tj. aby bylo možno rozhodnout, zda předložený výrok patří nebo nepatří k systému axiomů.

Vznikla nyní otázka, zda vůbec matematické teorie mohou být axiomatisovány v tomto precisovaném smyslu. Ukazuje se, že existují teorie, které lze axiomatisovat. Lze snadno konstruovat ad hoc velmi mnoho teorií, které jsou axiomatisovatelné. Existují však i významné matematické teorie, které nejsou v tomto smyslu axiomatisovatelné. Nejdůležitějším příkladem dnes je elementární aritmetika reálných čísel. Je proto mimořádně důležitá, neboť pomocí analytické geometrie může být elementární geometrie převedena na elementární aritmetiku reálných čísel. Odtud pak plyne, že také např. elementární prostorová Eukleidova geometrie by mohla být ve výše uvedeném smyslu axiomatisována. V obou případech máme dokonce, neuvažujeme-li axiomy spojitosti, konečný systém axiomů. Ukazuje se totiž, že např. Hilbertův, tj. v podstatě o axiomy vymezující relaci „ležeti mezi" rozšířený Eukleidův systém, je-li bezvadně formulován, je úplným systémem axiomů pro elementární eukleidovskou prostorovou geometrii.

Mimo axiomatisovatelných teorií existují však i matematické teorie, které nejsou axiomatisovatelné. Jde zde o známý výsledek Gödelův o neúplnosti *Principia Mathematica* a příbuzných systémů. K těm matematickým teoriím, jejichž neúplnost byla dokázána Gödelem, patří např. i aritmetika přirozených čísel, pokud zahrnuje nejen relaci následníka, ale i sčítání a násobení. Je snad třeba ještě poukázat na to, že rozšíření na sčítání a násobení má rozhodující význam, neboť původní Peanův systém axiomů, zahrnující pouze relaci následovníka je vskutku úplný, jakmile se omezíme jen na výroky, vytvořené těmito pojmy. Gödelův výsledek znamená, že neexistuje rozhodnutelná množina výroků, ze kterých by bylo možno odvodit všechna pravdivá tvrzení tzv. elementární teorie čísel, pokud sem zahrneme sčítání a násobení. Je to velmi dalekosáhlý výsledek a zdá se podle toho, jakoby cíl axiomatické metody zásadně nebyl dosažitelný. V dalším ukážeme, že tomu zcela tak není.

Než přejdu k těmto úvahám, chci ještě poukázat na některé vědecké a teoretické důsledky. Máme-li vyřešen problém axiomatisace pro jednu teorii, plynou z toho dva důsledky: teorie je tak říkáme obsahově bezesporná a obsahově úplná. Z toho, že je obsahově bezesporná plyne, že každé dokazatelné tvrzení je pravdivé a obsahová úplnost znamená, že také obráceně každé pravdivé tvrzení je dokazatelné. Obě tyto vlastnosti jsou charakteristickými pro systém axiomů. Místo obsahové bezespornosti resp. úplnosti se často používá formálních pojmů. Mluví se pak obyčejně o klasické bezespornosti, resp. klasické úplnosti. Teorii nazýváme klasicky bezespornou, jestliže v ní nemůžeme dokázat spor, tj. jestliže neexistuje výrok, který by bylo možno dokázat současně s jeho negací. Tato klasická bezespornost plyne tedy bezprostředně z obsahové bezespornosti. Je-li teorie obsahově bezespornou, pak nemůže být žádné tvrzení současně s jeho negací dokazatelné, neboť by muselo existovat objektivně pravdivé tvrzení, jehož negace by byla rovněž pravdivá. I pro precisovaný pojem pravdivosti platí však, že neexistuje výrok, který by byl současně s jeho negací pravdivý.

Klasická úplnost znamená, že každý výrok je dokazatelný nebo vyvratitelný v tom smyslu, že jeho negace je dokazatelná. Také klasická úplnost plyne bezprostředně z obsahové úplnosti, protože každý výrok je pravdivý nebo nepravdivý v tom smyslu, že jeho negace je pravdivá.

Při srovnání obsahové bezespornosti a úplnosti s klasickou bezesporností a úplností se opět jasně potvrzuje materialistický charakter matematiky. Obsahově tvořené pojmy jsou totiž primární a formálně tvořené pojmy jsou sekundární povahy. Často nejsou v literatuře tyto otázky správně vykládány. Aby souvislost byla úplně jasná, chtěl bych ještě poukázat na některé okolnosti: Z klasické bezespornosti např. v obecném případě vůbec neplyne obsahová bezespornost. Volme teorii, která je právě v klasickém smyslu neúplná, jako je tomu např. u aritmetiky přirozených čísel a předpokládejme dále, že je dokázána klasická bezespornost aritmetiky přirozených čísel, pak tím naprosto ještě není dokázána její obsahová bezespornost. Je možné, že i když žádný výrok aritmetiky přirozených čísel není dokazatelný současně s jeho negací, přesto mohou být dokazatelné nesprávné výroky, např. ty, které právě ve výše uvedeném smyslu nejsou uvnitř daného systému axiomů rozhodnutelné. V tomto případě by mohl být odpovídající nepravdivý výrok dokazatelný a příslušný pravdivý výrok nedokazatelný. Právě v tomto srovnání se ukazuje, že obsahově utvořené pojmy jsou rozhodující.

Není pochyb o tom, že ukáže-li se jistá teorie obsahově spornou, pak ji zavrhneme i tehdy, jestliže bychom mohli dokázat, že je klasicky bezesporná, tj. že žádný výrok neplatí současně s jeho negací.

Jak jsme již dříve ukázali, zdá se podle Gödelových výsledků, že skutečný cíl axiomatické metody není, alespoň pro poněkud významnou matematickou teorii, dosažitelný. V důsledku toho jsou a přirozeně opět z filosofického hlediska, vyvozovány z Gödelových výsledků agnostické závěry. Těmto idealistickým tendencím musíme čelit. Tyto závěry v žádném případě nejsou věcně podloženy. Lze to ukázat i takto: Jestliže Gödel dokázal, že obvyklým způsobem o tzv. induktivní definici sčítání a násobení rozšířený Peanův systém axiomů nestačí k tomu, aby mohly být odvozeny všechny pravdivé výroky tzv. elementární teorie čísel, pak tím naprosto není řečeno, že by některé výroky byly absolutně nerozhodnutelné. Výroky, o kterých se tvrdí, že jsou pravdivé avšak nedokazatelné, jsou prokazatelně pravdivé. Vždyť v Gödelově důkazu bylo efektivně ukázáno, že zmíněné výroky jsou výroky pravdivými. Důkaz jen není proveden prostředky systému axiomů, který byl shora uvažován. Používá se přitom dalších důkazových metod a dalších pojmů. Již z toho, že podle Gödela nerozhodnutelné výroky jsou rozhodnuty v tom smyslu, že jsou jako pravdivé prokázány, plyne, že agnostické závěry z Gödelových výsledků jsou zcela chybné.

Chtěl bych ještě poněkud zpřesnit, čím je podmíněna neúplnost např. aritmetiky přirozených čísel. V úvahách o základních otázkách matematiky, jak byly prováděny koncem minulého a začátkem tohoto století, se Cantorem vybudovaná obecná teorie množin ukázala základem, na kterém může být celá matematika vybudována. Jak známo, došlo v obecné teorii množin při neomezeném používání pojmu množiny k antinomiím. Na základě toho byl proces tvoření množin omezen. Nejdůležitější omezení se opírá o tzv. teorii typů. Podstatu věci můžeme snadno objasnit. Vycházíme nejprve z jistého oboru předmětů. Jsou pak přípustná tvoření množin, při kterých předměty daného oboru jsou shrnovány do množin tzv. prvního typu. V dalším lze pak z množin prvního typu tvořit opětným shrnutím množiny druhého typu, tzv. systémy množin. Takto lze pokračovat. Dostaneme se tak k množinám třetího typu. Při tomto způsobu tvoření množin připouštíme zprvu jen množiny konečných typů.

Právě omezením na množiny konečného typu vzniká neúplnost, na což sám Gödel již poukázal. Omezení tvoření množin na množiny konečného typu není oprávněno. Nelze zakázat a je zcela účelné utvořit např. množinu všech množin konečného typu. Vytvoření obecné teorie množin s takovými množinami transfinitních typů je zcela možné. Je však třeba, abychom se vyhnuli antinomiím, omezit se vždy na množiny, jejichž typ je menší než jisté ordinální číslo. Pro každé takové ordinální číslo můžeme vytvořit příslušný kalkul typů množin, jejichž typ je menší než toto ordinální číslo.

Lze pak ukázat, že celá teorie daného kalkulu typů jistého ordinálního čísla, a tedy i obvyklý kalkul množin konečných typů, ve kterém může být dnešní matematika vyjádřena, může být formalisován v kalkulu typů dostatečně velkého ordinálního čísla. Z toho plyne, že např. všechny výroky jistého kalkulu typů jsou rozhodnutelné prostředky kalkulu typů, ve kterém teorie daného kalkulu typů je formalisovatelná.

Tento výsledek má značný význam. Umožní nám porozumět, na čem jsou založeny Gödelovy věty o neúplnosti. Problémy, souvisící s provedením zde naznačených úvah, jsou velmi obtížné. Vyžadují mnoha pomocných prostředků z teorie ordinálních čísel a zejména z teorie spočetných ordinálních čísel. Naznačený program není dosud proveden, neboť výše uvedené úvahy se zdají být zcela novými. Doufám však, že se mi podaří tyto úvahy v dohledné době, samozřejmě v odborném matematickém tisku, přesně provést.

V jistém smyslu je tento výsledek podobně základního významu, jako slavné Gödelovy věty o neúplnosti. Ukazuje totiž, že v podstatě každý rozumně postavený matematický problém se stane rozhodnutelným, tj. že příslušný výrok nebo jeho negace je dokazatelná, jestliže tvoření pojmů není uměle omezeno. Uvažujeme-li transfinitní tvoření pojmů, popř. i pro nespočetné mohutnosti, stane se vskutku každý pravdivý výrok dokazatelným.

I když tak cíle axiomatické metody je v jistém smyslu dosaženo, chtěl bych na závěr říci několik slov o problému kategoricity axiomatického systému, z něhož plynou některé výhrady vůči dosažitelnosti vytčeného cíle. Jak jsem již výše uvedl, je Peanův systém axiomů kategroický a monotransformabilní. Vzniká otázka, zda např. existuje pro celou obecnou teorii množin, která je základem celé matematiky, kategorický a snad dokonce i monotransformabilní systém axiomů. Je to zcela jiná otázka než ta, kterou jsme se dosud zabývali, totiž otázka, zda každý pravdivý výrok je v jistém systému obecné teorie množin dokazatelný, připustíme-li množiny transfinitních typů. Dodnes neexistuje kategorický a tím méně kategorický a monotransformabilní systém axiomů obecné teorie množin. Je tomu tak i tehdy, připustíme-li tvoření množin transfinitních typů.

Je vůbec nejisté, zda je možno sestrojit kategorický, nebo dokonce kategorický a monotransformabilní systém axiomů obecné teorie množin. K tomu bych chtěl ještě něci říci. Existuje obecná věta, která tvrdí, že každý monotransformabilní systém axiomů je vzhledem k pojmům úplný. Systém axiomů nazýváme vzhledem k pojmům úplný právě tehdy, jestliže pojmy každého kategorického systému, zahrnujícího výchozí systém, jsou v tomto výchozím systému definovatelné. Tato věta má dalekosáhlé důsledky. Předpokládejme např., že se třeba podařilo vytvořit systém axiomů, který je dokonce pouze kategorický, pro jistou oblast fysiky, např. pro mechaniku. Pak v tomto systému by musel být zcela určitě obsažen systém axiomů pro geometrii. Mohli bychom se nyní pokusit tento kategorický axiomatický systém geometrie učinit také ještě monotransformabilním. To by pravděpodobně bylo snadné; ve všech dosud uvažovaných případech se totiž snadno podařilo kategorický systém axiomů učinit i monotransformabilním vymezením jistých pojmů, zatímco sestrojit kategorický systém sám je daleko obtížnější.

Kdyby se to však pro geometrii podařilo, pak ve smyslu výše uvedené věty by musel být systém geometrie vzhledem k pojmům úplný. Kdyby tedy existoval kategorický systém axiomů pro mechaniku, dostali bychom také kategorický a pravděpodobně bez velké námahy dokonce kategorický a monotransformabilní systém axiomů pro geometrii. Z toho by však plynulo, že základní pojmy mechaniky by bylo možno redukovat na pojmy geometrie. Kdo tedy pokládá za nemožné redukovat základní pojmy mechaniky na geometrické pojmy, musí také vyloučit možnost sestrojení kategorického a monotransformabilního systému axiomů již pro geometrii. V jistém smyslu splývají tendence redukovat mechanické pojmy na geometrické s tendencemi obecné teorie relativity, jak to vidíme při budování obecné teorie pole. Program této teorie pole můžeme totiž interpretovat jako program redukovat pojmy mechaniky explicitně a definitoricky na geometrické vztahy.

Jestliže však jsme toho názoru, že je možné, aby se zdařil pokus odvodit pojmy mechaniky z geometrie, pak se můžeme důvodně pokusit, jak se také zčásti již stalo, definovat geometrické pojmy pomocí pojmů obecné teorie množin. Stalo by se tak posledním rozhodujícím problémem postavení kategorického a monotransformabilního axiomatického systému teorie množin. Na základě vývodů, které jsme uvedli o množinách transfinitních typů můžeme předpokládat, že je velmi nejisté, zda je možné řešit tento problém jen pro část teorie množin, která pracuje jen s množinami ohraničených typů. Takový jednotný systém axiomů pro celou teorii množin, ve které připustíme množiny všech typů, není jistě možno vytvořit. Může se nanejvýš podařit jistou část obecné teorie množin, ve které typy přípustných množin jsou omezené, vystihnout v takovém systému, který se nám podaří učinit kategorickým a monotransformabilním.

Na závěr těchto vývodů uvedu závěry, ve kterých se pokusím shrnout obecná hlediska, která se na základě dosavadních úvah nabízejí. Jde o tyto závěry:

1. Prvotní matematické pojmy jsou získávány abstrakcí z reálných vztahů.
2. Není možné axiomaticky charakterisovat obor předmětů s příslušnými vlastnostmi a vztahy. Axiomatická metoda vede v nejlepším případě k charakteristice až na isomorfismus.
3. Není možné jedním, jednou provždy daným, systémem axiomů obsáhnout všechny pojmy a výroky celé matematiky. Toto je možné jen trans-

finitní posloupností vědeckých systémů pojmově a co do důkazových metod stále obšírnějších.

4. Obsahové tvoření matematických pojmů je primární a jejich formální tvoření je sekundární.

5. Z možnosti vytvoření kategorického a monotransformabilního systému axiomů pro celou matematiku by plynula definovatelnost fysikálních pojmů.

To jsou podstatné obecné výsledky, které plynou z této přednášky. Je možné těchto pět základních thesí shrnout do dvou hlavních závěrů:

1. Matematika má materialistický charakter. Je v zásadě přírodní vědou. Liší se kvalitativně od fysiky, právě tak, jak se liší navzájem ostatní přírodní vědy.

2. Neexistuje jednou pro vždy pevný systém axiomů pro celou matematiku. Problémy matematiky a jejich řešení plynou v vývojového procesu utváření vždy obsažnějších vědeckých systémů, při čemž posloupnost těchto systémů musí být transfinitně pokračována.

Přeložil Jiří Gregor