P. S. Alexandrov

O pojmu prostoru v topologii

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 1 (1956), No. 2, 133--144

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137090

POKROKY
MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK I • ČÍSLO 2

P. S. ALEXANDROV

O POJMU PROSTORU V TOPOLOGII

Tento příspěvek byl přednesen na schůzi Maďarské akademie věd na počest 150. výročí narození J a n o s e B o l y a i e *ve dnech 14.—18. 12. 1952. Byl publikován pod názvem* О понятии пространства в топологии *v »Acta Math. Acad. Sci. Hungaricae«, sv. V, Supplementum, 1954, str. 43—60.*

Překladatel.

Jedním ze základních důsledků vzniku neeuklidovské geometrie bylo poznání toho, že systém euklidovské geometrie není jediným možným geometrickým systémem. Tak vznikla otázka studia rozličných soustav geometrických útvarů, vyhovujících různým soustavám axiomů. Různé soustavy geometrických útvarů („variety" nebo „abstraktní prostory") jsou předmětem studia různých geometrických disciplin (různých „geometrií").

V tomto příspěvku se budeme zabývat těmi axiomaticky zavedenými geometrickými vztahy, které se nazývají topologické, a jejichž studiem se zabývá topologie.

První, kdo se pokoušeli vybudovat axiomaticky topologické pojmy limity a spojitosti, byli francouzský matematik Maurice F r é c h e t a vynikající maďarský matematik Frigyes R i e s z, a to přibližně současně kolem r. 1906. Fréchet ve své disertaci[1]) zavedl mezi jiným pojmy metrického prostoru, kompaktnosti a úplnosti, které se staly trvalou součástí matematiky; kromě toho se zde Fréchet častěji pokouší dospět p ř í m o k pojmu topologického prostoru, bez užití pojmu vzdálenosti, t. j., zavést axiomaticky základní topologické pojmy [hromadný bod množiny[2]), spojitost zobrazení]. Avšak v tomto směru Fréchetův pokus nebyl úspěšný; mezi mnohými navrženými variantami definice topologického prostoru ani jedna nebyla zdařilá. Na druhé straně přibližně současně formuluje F. R i e s z[3]) axiomy topologického prostoru tím, že axiomatisuje pojem hromadného bodu; přicházejí tak ke třídě topologických prostorů, které pod názvem T_1-prostory jsou běžné v současné topologii.

Tedy první, kdo zavedl pojem t o p o l o g i c k é h o prostoru, byl F. R i e s z. Zajímavé je, že Riesz podal přímou axiomatiku topologického prostoru, t. j. užitím jen topologicky invariantních pojmů (v našem případě vztahů mezi

[1]) M. F r é c h e t, *Thèse, Sur quelques points du calcul fonctionnel,* Rend. Circ. Mat. di Palermo, sv. 22, 1906, str. 15. (*Pozn. překl.*)

[2]) Na této stránce užívá Alexandrov běžnějšího názvu *predělnaja točka* (hromadný bod) místo správnějšího *točka prikosnovenija* (bod uzávěru). (*Pozn. překl.*)

[3]) F. R i e s z, *Stetigkeitsbegriff und abstrakte Mengenlehre,* Atti del IV Congr. Int. dei Mat., sv. II, Roma 1909. (*Pozn. překl.*)

množinou a množinou jejích hromadných bodů), a bez použití jakéhokoli pomocného aparátu (jako na př. úplné soustavy okolí). Právě na tomto posledním pojmu byla založena axiomatika topologických prostorů Hausdorffem r. 1914 v jeho známé knize o theorii množin.[4]) Hausdorffovými axiomy je definována třída prostorů, které se nyní nazývají hausdorffovskými nebo T_2-prostory. Tvoří třídu užší než je třída Rieszových T_1-prostorů; liší se silnějším t. zv. Hausdorffovým axiomem oddělitelnosti.

V dnešní době se již ustálila klasifikace topologických prostorů podle axiomů oddělitelnosti. Pojem topologického prostoru v širším smyslu[5]) nepředpokládá žádný axiom oddělitelnosti: topologickým prostorem rozumíme množinu jakýchkoli prvků (které nazveme body tohoto prostoru), kde jsou dále vybrány některé podmnožiny (které nazveme otevřenými množinami daného prostoru); přitom žádáme, aby byly splněny tyto axiomy topologického prostoru: *Sjednocení libovolného systému a průnik konečného systému otevřených množin jsou otevřené; celý prostor a prázdná množina jsou otevřené množiny.*

Uzavřenou množinu pak definujeme jako komplement otevřené. Pak zřejmě uzavřené množiny vyhovují této podmínce: Průnik libovolného systému a sjednocení konečného systému uzavřených množin jsou uzavřené; celý prostor a prázdná množina jsou uzavřené množiny. Odtud plyne, že průnik všech uzavřených množin prostoru R, které obsahují danou množinu M, je zároveň nejmenší uzavřenou množinou $\overline{M}$, která obsahuje množinu M; $\overline{M}$ nazveme uzávěrem množiny M, body z $\overline{M}$ nazveme body uzávěru množiny M.

Operace tvoření uzávěru, která tedy každé množině M přiřazuje její uzávěr $\overline{M}$, vyhovuje těmto podmínkám: (1) $\overline{M_1 \cup M_2} = \overline{M}_1 \cup \overline{M}_2$, (2) $M \subset \overline{M}$, (3) $\overline{\overline{M}} = \overline{M}$, (4) $\overline{\emptyset} = \emptyset$ ($\emptyset$ je prázdná množina).

Bylo by možné definovat topologické prostory jako takové množiny R, v kterých každé podmnožině M je přiřazen její uzávěr $\overline{M}$ tak, aby byly splněny podmínky (1) — (4); uzavřené množiny by se pak definovaly jako množiny, které se rovnají svému uzávěru, a otevřené množiny jako jejich komplementy. Takto definované topologické prostory jsou právě ony, které jsme již definovali použitím otevřených množin. Tímto způsobem zavedl pojem topologického prostoru Kuratowski (1922)[6]), který je tedy autorem definice nejobecnějších topologických prostorů dnes studovaných.[7])

Postupné zužování třídy topologických prostorů se provádí zaváděním stále silnějších axiomů oddělitelnosti. Nazvěme okolím množiny (nebo bodu) libovolnou otevřenou množinu obsahující danou množinu (daný bod). Řada axiomů oddělitelnosti se nyní formuluje takto:

Axiom T_0 (Kolmogorov). Alespoň jeden z libovolných dvou různých bodů prostoru má okolí, které neobsahuje druhý bod.[8]) .

[4]) F. Hausdorff, *Mengenlehre* (jen první vydání r. 1914). (*Pozn. překl.*)

[5]) Název: T-prostor. (*Pozn. překl.*)

[6]) K. Kuratowski, *Sur l'opération $\bar{A}$ de l'Analysis Situs*, Fund. Math., 35, 1922, str. 182—199. (*Pozn. překl.*)

[7]) Studium obecnějších prostorů (na př. E. H. Moore, K. Koutský jako představitele dvou směrů) je spíše zkoumání pomocného aparátu nebo rozborem axiomů. (*Pozn. překl.*)

[8]) Prof. Čech snad první poukázal na to, že ke každému T-prostoru R existuje T_0-prostor S takový, že $R = S$ právě když R je T_0, a že topologie prostoru R se redukuje na topologii prostoru S. (E. Čech, *On bicompact spaces*, Ann. of Math., 38, 1937, 823.) (*Pozn. překl.*)

Axiom T_1 (Riesz). Každý z libovolných dvou různých bodů prostoru má okolí, které neobsahuje druhý bod.

Axiom T_2 (Hausdorff). Libovolné dva různé body prostoru mají disjunktní okolí.[9])

Axiom T_3. Každá uzavřená množina a v ní neležící bod mají disjunktní okolí.[10])

Axiom T_4. Libovolné dvě disjunktní uzavřené množiny mají disjunktní okolí.[11])

Rieszův axiom T_1 je ekvivalentní s požadavkem, aby jednobodové množiny byly uzavřené; proto z oddělitelnosti (okolími) uzavřených množin neplyne ještě oddělitelnost bodů. Abychom příliš nekomplikovali celou klasifikaci, nazveme T_1-prostory, neboli Rieszovými prostory, ty prostory, které splňují axiom T_1; prostory, které kromě T_1 splňují ještě axiomy T_3 nebo T_4, nazveme T_3-prostory, resp. T_4-prostory. T_3-prostory se také nazývají regulární, T_4-prostory normální.

Vedle oddělitelnosti okolími, která byla základem právě uvedené klasifikace, existuje ještě jiný druh oddělitelnosti, t. zv. funkcionální oddělitelnost. Řekneme, že dvě uzavřené množiny F_0 a F_1 v T_1-prostoru R jsou funkcionálně oddělitelné, existuje-li spojitá reálná funkce f[12]), definovaná na R a taková, že pro $x \in F_0$ je $f(x) = 0$, pro $x \in F_1$ je $f(x) = 1$ a pro všechna $x \in R$ je $0 \leqslant f(x) \leqslant 1$.

P. S. Uryson dokázal důležitou větu (Urysonovo lemma)[13]) o tom, že v *normálním prostoru disjunktní uzavřené množiny jsou funkcionálně oddělitelné*. Protože zřejmě každé dvě funkcionálně oddělené množiny jsou také oddělitelné okolími, plyne z Urysonova lemmatu toto: požadavek funkcionální oddělitelnosti každé dvojice disjunktních uzavřených množin je ekvivalentní obyčejné oddělitelnosti okolími. Žádáme-li však jen, aby každý bod T_1-prostor byl funkcionálně oddělitelný od každé uzavřené množiny jej neobsahující, dostáváme novou třídu prostorů, která se stala velmi důležitou; je užší než třída regulárních, a širší než třída normálních prostorů. Tyto prostory definoval v r. 1925 A. N. Tichonov[14]) pod názvem úplně regulární prostory. Nazýváme je také T_ϱ-prostory nebo tichonovské prostory. Význam tichonovských prostorů je zřejmý v souvislosti s theorií bikompaktních prostorů, kterou se budeme zabývat dále; souvisí to s faktem, že úplná regularita prostoru je, na rozdíl od normálnosti, vlastnost

---

[9]) Systém množin je disjunktní, když jeho různé množiny mají prázdný průnik. (*Pozn. překl.*)

[10]) L. Vietoris, *Stetige Mengen*, Monatshft. f. Math. u. Phys., 31, 1921, str. 173. (*Pozn. překl.*)

[11]) H. Tietze, *Beiträge zur allgemeinen Topologie*, Math. Ann., 88, 1923, str. 301. Dále:

Axiom T_5. Každá dvojice množin X, Y taková, že $(X \cap \overline{Y}) \cup (\overline{X} \cap Y) = \emptyset$ má disjunktní okolí. (Prostory dědičně normální — Alexandroff, Hopf, *Topologie I.*) Další klasifikace (prostory dokonale normální, parakompaktní) se neprovádí pomocí oddělitelnosti. (*Pozn. překl.*)

[12]) Zobrazení f topologického prostoru X do topologického prostoru Y nazveme spojitým, když množina vzorů („úplný zpětný obraz") každé otevřené množiny je otevřená; reálná spojitá funkce na X je spojité zobrazení tohoto prostoru do číselné osy.

[13]) T. zv. Urysonovo velké lemma — *Über die Mächtigkeit der zusammenhängenden Mengen*, Math. Ann., 94, 1925. (*Pozn. překl.*)

[14]) A. N. Tichonov, *Über ein Metrisationssatz von P. Urysohn*, Math. Ann., 95, 1925, str. 139. (*Pozn. překl.*)

t. zv. **dědičná** (t. j., splňuje-li ji daný prostor, splňuje ji také každá jeho podmnožina).[15])

Další zužování pojmu topologického prostoru postupuje dvěma úplně různými směry: první spočívá v požadavku, aby v prostoru existovala spočetná base[16]). Podle fundamentální věty P. S. Urysona *existence spočetné base je nutnou a postačující podmínkou pro to, aby normální prostor byl homeomorfní s podmnožinou Hilbertova prostoru.*[17])

Jestliže kromě spočetné base a normality požadujeme ještě konečnou dimensi[18]), dostáváme nutnou a postačující podmínku pro to, aby topologický prostor byl homeomorfní s podmnožinou euklidovského prostoru *téže* dimense.[19])

Dospíváme tak k řešení prvního základního problému obecné theorie topologických prostorů — otázky „logického sestupu" od nejobecnějších útvarů, totiž topologických prostorů v širším smyslu, k bodovým množinám Hilbertova a euklidovských prostorů: *podmínky normality* (dokonce regularity[20])) *a existence spočetné base úplně charakterisují s* topologického hlediska *podmnožiny Hilbertova prostoru; regularita, spočetná base a konečná dimense charakterisují podmnožiny euklidovských prostorů.*

S otázkou topologické charakterisace „elementárních" bodových množin (t. j. podmnožin Hilbertova a euklidovských prostorů) těsně souvisí druhý základní problém theorie topologických prostorů, **problém metrisace**, čím rozumíme nalezení nutných a postačujících podmínek pro to, aby topologický prostor byl homeomorfní s metrickým prostorem. Protože každý metrický prostor je normální, a protože Hilbertův prostor je metrický, lze právě uvedenou Urysonovu větu formulovat takto:[21]) *Nutná a postačující podmínka pro to, aby prostor se spočetnou basí byl metrisovatelný jest, aby byl normální.*

Obecný problém metrisace (bez předpokladu spočetnosti base) nebyl po třicet let vyřešen, přes mnohé pokusy různých autorů. Ovšem nejednou bylo udáno

---

[15]) Každá podmnožina M topologického prostoru R je sama topologickým prostorem, definujeme-li množiny otevřené v M jako ty, která jsou průnikem M s některou otevřenou množinou prostoru R.

[16]) **Basí** topologického prostoru R nazveme každý systém B otevřených množin, který splňuje toto: každá otevřená množina v R je sjednocením některých množin ze systému B.

[17]) Dva topologické prostory jsou **homeomorfní**, když existuje zobrazení f jednoho na druhý takové, že f i inversní f^{-1} jsou spojité; f pak nazveme **homeomorfií** nebo **topologickým** zobrazením. **Hilbertův prostor** H sestává ze všech posloupností $x = \{\xi_n\}_1^\infty$ takových, že $\Sigma_1^\infty |\xi_n|^2$ konverguje, a s metrikou $\sqrt{\Sigma_1^\infty |\xi_n - \eta_n|^2}$. Prostor P s funkcí („metrikou") ϱ nazveme **metrickým**, když (1) pro $x, y \in P$ je $\varrho(x, y)$ konečné reálné číslo, (2) $\varrho(x, y) = 0$ právě když $x = y$, (3) $\varrho(x, y) + \varrho(z, y) \geqq \varrho(x, z)$. Metrický prostor topologisujeme na př. tím, že za basi prohlásíme systém všech konečných průniků množin $V(x, \varepsilon)$ (kde $x \in P$, $\varepsilon > 0$), při čemž $V(x, \varepsilon)$ sestává ze všech $y \in P$ s $\varrho(x, y) < \varepsilon$. *(Pozn. překl.)*

[18]) Theorie dimense není předmětem tohoto příspěvku; připomenu jen induktivní definici dimense. Prázdná množina nechť má dimensi -1; nechť jsou již definovány prostory dimense $\leqq n - 1$. Řekneme, že topologický prostor R má dimensi n, existuje-li v něm base, jejíž elementy mají hranice dimense $\leqq n - 1$, a zároveň neexistuje base, jejíž elementy by měly hranice dimense $\leqq n - 2$. Hranicí otevřené množiny G přitom rozumíme množinu $\overline{G} - G$.

[19]) Euklidovský prostor dimense n, E^n, sestává ze všech posloupností $x = \{\xi_k\}_1^n$ s metrikou $\varrho(x, y) = \sqrt{\Sigma_1^n |\xi_k - \eta_k|^2}$. *(Pozn. překl.)*

[20]) Jak dokázal Tichonov (l. c.), regulární prostor se spočetnou basí je normální.

[21]) T. zv. **Urysonova metrisační věta** (*Über die Metrisationsprobleme*, Math. Ann., 94, 1925, str. 309. *(Pozn. překl.)*

řešení formální (první z nich P. S. Alexandrovem a P. S. Urysonem v r. 1923),[22]) avšak žádné z nich nemohlo být považováno za zdařilé a konečné, protože předložené podmínky byly těžkopádné a umělé. Ke konečnému a ve všech směrech vyhovujícímu výsledku dospěl v r. 1950 mladý sovětský matematik J. M. Smirnov.[23])

Nazvěme libovolný systém podmnožin daného topologického prostoru **lokálně konečným**, jestliže každý bod prostoru má okolí protínající nejvýše konečný počet množin daného systému. Smirnovovu větu lze nyní formulovat takto: *K tomu, aby topologický prostor byl metrisovatelný, je nutné a stačí, aby byl regulární a aby některá jeho base byla sjednocením spočetně mnoha lokálně konečných systémů otevřených množin.* Speciálním případem této skvělé věty je metrisační věta Urysonova: Protože spočetná base je zřejmě spočetným sjednocením systémů, z nichž každý sestává právě z jedné množiny, *nutnou a postačující podmínkou metrisovatelnosti prostoru se spočetnou basí je jeho regularita.*

Nutnost Smirnovovy metrisační podmínky plyne ihned z toho, že každý metrický prostor je **parakompaktní** (jak dokázal **Stone**),[24]) což znamená, že do každého pokrytí metrického prostoru lze vepsat lokálně konečné pokrytí.[25]) Postačitelnost podmínky se dokazuje způsobem, který je sám o sobě zajímavý. J. M. Smirnov dokazuje totiž, že každý topologický prostor R váhy τ,[26]) vyhovující uvedeným podmínkám, je homeomorfní s podmnožinou zobecněného Hilbertova prostoru H^τ váhy τ.[27]) Hledané topologické zobrazení prostoru R do prostoru H^τ se sestrojuje takto: Především se dokáže, že ze Smirnovových metrisačních podmínek plyne nejen regularita, ale dokonce normalita, a že každá uzavřená množina je průnikem spočetného systému otevřených množin,[28]) a tedy je množinou všech nulových bodů některé reálné spojité funkce na R.

Volme nyní v R některou basi γ, která je spočetným sjednocením lokálně konečných systémů $\gamma_n = \{\Gamma_{n\alpha}\}$ otevřených množin $\Gamma_{n\alpha}$. Označme Θ množinu všech dvojic $\theta = (n, \alpha)$, které jsou indexy elementů $\Gamma_{n\alpha}$ base γ. Podle předpokladu ke každé $\Gamma_{n\alpha}$ existuje spojitá funkce $p_{n\alpha}$ taková, že pro všechna $x \in R$ je $0 \leq p_{n\alpha}(x) \leq 1$, a jejíž nulové body jsou právě všechny body množiny $R - \Gamma_{n\alpha}$. Protože systém γ_n je lokálně konečný, pro dané n a $x \in R$ je jen konečně mnoho hodnot $p_{n\alpha}(x)$ různých od nuly. Tedy řada $1 + \Sigma_\alpha p^2_{n\alpha}(x)$ má smysl pro každé

---

[22]) *Une condition nécessaire et suffisante pour qu'une classe (L) soit une classe (D)*, Comptes Rendus, 177, 1923, str. 1274. (*Pozn. překl.*)

[23]) V seznamu literatury na konci článku [4].

[24]) M. H. **Stone**, Bull. Am. Math. Soc., 54, 1948, str. 977. (*Pozn. překl.*)

[25]) **Pokrytím** rozumíme v dalším systém otevřených množin, jehož sjednocení je celý prostor. Řekneme, že pokrytí β je **vepsáno** do pokrytí α, jestliže každá množina z β je obsažena v některé množině z α.

[26]) **Vahou** topologického prostoru nazýváme nejmenší kardinální číslo τ takové, že v daném prostoru existuje base mohutnosti τ. Tedy na př. prostory se spočetnou basí jsou prostory váhy $\aleph_0$.

[27]) Zobecněný Hilbertův prostor H^τ váhy τ se konstruuje takto: Jeho body jsou funkce $\xi(\theta)$ definované na libovolné množině Θ mohutnosti τ, které ještě vyhovují těmto podmínkám: (1) hodnoty funkce $\xi(\theta)$ jsou reálná čísla, která však jsou nenulová jen pro spočetně mnoho hodnot proměnné θ; (2) řada $\Sigma_{\theta\in\Theta}(\xi[\theta])^2$ konverguje. Tak jako v obyčejném Hilbertově prostoru řada $\Sigma_{\theta\in\Theta}(\xi[\theta] - \eta[\theta])^2$ konverguje pro každou dvojici bodů ξ, η; nezáporné číslo $\sqrt{\Sigma_{\theta\in\Theta}(\xi[\theta] - \eta[\theta])^2}$ nazveme vzdáleností bodů ξ, η; snadno se dokáže, že takto definovaná vzdálenost vyhovuje všem axiomům metrického prostoru.

[28]) T. j., prostor je **dokonale normální**; následuje jedna věta N. **Vedenisova** (*Sur les fonctions continues dans les espaces topologiques*, Fund. Math., 27, 1936, str. 234. (*Pozn. překl.*)

$x \in R$ a je kladnou spojitou funkcí na R. Pak i funkce $q_{n\alpha}(x) = \dfrac{p_{n\alpha}(x)}{\sqrt{1 + \Sigma_\alpha p_{n\alpha}^2(x)}}$ jsou definovány a spojité na R, při čemž $\Sigma_\alpha q_{n\alpha}^2(x) < 1$, $\Sigma_\alpha (q_{n\alpha}(x) - q_{n\alpha}(y)^2) < 2$. Položme nyní $\xi_{n\alpha}(x) = 2^{-n} q_{n\alpha}(x)$. Je-li x libovolný bod prostoru R a probíhá-li $\theta = (n, \alpha)$ množinu Θ, je zřejmé, že $\xi_{n\alpha}(x)$ je bod prostoru H^τ, který označíme $f(x)$. Lze nyní dokázat, že takto sestrojené zobrazení f prostorů R do H^τ je topologické; to je právě Smirnovova věta. Poznamenejme ještě, že lze snadno sestrojit příklad hausdorffovského neregulárního prostoru s basí, která je spočetným sjednocením lokálně konečných systémů.

Z množství prací posledních několika let, pojednávajících o otázkách abstraktní topologie (jak se někdy nazývá theorie topologických prostorů,[29]) většina nějakým způsobem souvisí s pojmem bikompaktního prostoru. Jak je známo, topologický prostor nazýváme bikompaktním, je-li v něm splněna t. zv. věta Borelova-Lebesgueova, podle které každý systém otevřených množin, který pokrývá celý prostor, obsahuje konečný podsystém, který také pokrývá celý prostor („z každého pokrytí lze vybrat konečné pokrytí"). Bikompaktní prostory lze také definovat jako prostory, v nichž každý (případně nespočetný) dobře uspořádaný klesající systém neprázdných uzavřených množin má neprázdný průnik; a také jako prostory, v nichž každá nekonečná množina má alespoň jeden bod „totální kondensace". Přitom bodem totální kondensace nekonečné množiny M rozumíme bod, jehož každé okolí má průnik s M téže mohutnosti jako má M.

Mezi bikompaktními prostory nejzajímavější a nejdůležitější jsou bikompaktní hausdorffovské prostory, nazývané prostě bikompakty.

Všechny bikompakty jsou normální, a mohou být charakterisovány jako normální prostory uzavřené v každém normálním nadprostoru; jsou dokonce uzavřené v každém hausdorffovském nadprostoru,[30]) a naopak regulární H-uzavřený prostor (nebo jen uzavřený v každém regulárním nadprostoru) je bikompakt. Hausdorffovský H-uzavřený prostor nemusí být bikompaktní. Požadujeme-li však, aby nejen sám hausdorffovský prostor R, ale také každá jeho uzavřená podmnožina byly H-uzavřené, pak R je opět bikompakt.[31])

Základy theorie bikompaktních prostorů byly položeny P. S. Alexandrovem a P. S. Urysonem v práci „O kompaktních topologických prostorech" před třiceti lety.[32]) Další rozvinutí této theorie nalézáme především v pracích A. N. Tichonova, který v nich zavedl svoji známou definici topologického součinu libovolného počtu topologických prostorů[33]) a dokázal důležitou větu o tom, že součin libovolného počtu bikompaktů je opět bikompakt. Tichonov mezi jiným začal zkoumat svoje „kvádry", t. j. bikompakty, které jsou topologickým

[29]) U nás je běžnější „množinová topologie". (*Pozn. překl.*)

[30]) Prostor uzavřený v každém hausdorffovském nadprostoru nazýváme H-uzavřený. (*Pozn. překl.*)

[31]) Tuto obtížnou větu, formulovanou jako hypotésu P. S. Alexandrovem a P. S. Urysonem, první dokázal M. H. Stone; jednodušší, ale stále ještě velmi složitý důkaz byl potom podán S. V. Fominem.
(S. V. Fomin, *Extensions of topological spaces*, Ann. of Math., 44, 1943, str. 471. *Pozn. překl.*)

[32]) *Mémoire sur les espaces topologiques compacts*, Ver. Kon. Akad. v. Weténs., 1. sekce, sv. XIV, 192, str. 1. (*Pozn. překl.*)

[33]) Jsou-li pro $\alpha \in A$ R_α topologické prostory, pak jejich topologický (tichonovský) součin $\mathrm{P}_\alpha R_\alpha$ je topologický prostor, jehož body jsou zobrazení $\xi(\alpha)$, kde $\alpha \in A$, $\xi(\alpha) \in R_\alpha$, a base sestává z množin $G = (G_{\alpha_1}, \dots, G_{\alpha_n})$, kde $\xi \in G$ právě když $\xi(\alpha_k) \in G_{\alpha_k}$ a G_{α_k} jsou otevřené v R_{α_k}. (*Pozn. překl.*).

součinem soustavy libovolné dané mohutnosti uzavřených intervalů. Dokázal, že tyto kvádry jsou universální v tomto smyslu: *Každý úplně regulární prostor libovolné váhy τ je homeomorfní s podmnožinou tichonovského kvádru téže váhy*, t. j., s podmnožinou tichonovského součinu τ exemplářů intervalu $\langle 0,1 \rangle$.

Uvědomíme-li si, že bikompakty jsou normální, a že úplná regularita je dědičná vlastnost, odvodíme snadno z právě vyslovené Tichonovovy věty „o vložení" další důležitý výsledek: *Každý úplně regulární prostor, a právě jen úplně regulární prostory jsou homeomorfní s podmnožinami bikompaktů.*

Tichonovova věta o vložení je zobecněním Urysonovy věty o vložení (úplně) regulárního prostoru se spočetnou basí do Hilbertova kvádru[34]) — tento kvádr je tichonovským kvádrem váhy $\aleph_0$. *Urysonova věta, její zobecnění Tichonovem, a Smirnovova metrisační věta ukazují, jak neoddělitelně jsou spjaty nekonečně rozměrné koordinátní prostory a tedy i reálná čísla s oblastí abstraktní topologie, zdánlivě úplně nezávislou na pojmu reálného čísla*; společným základem je skvělý výsledek Urysonův, který jsme nazvali Urysonovým lemmatem.

Pojem topologického násobení ve smyslu Tichonovově vedl ke studiu dalších důležitých prostorů, sestrojovaných jako topologické součiny. Z nich připomeneme prostory D^τ — diskontinua váhy τ — t. j. součiny exemplářů prostoru sestávajícího z dvou isolovaných bodů (*„obyčejný dublet"*), a prostory F^τ, které jsou součiny τ exemplářů prostoru nazvaného s o u v i s l ý d u b l e t[35]). Tím se rozumí jediný souvislý T_0-prostor sestávající z dvou bodů: jeden z nich tvoří jedinou netriviální otevřenou množinu (a tedy druhý tvoří jedinou netriviální uzavřenou množinu). Prostory D^τ a F^τ jsou universální v tomto smyslu: Každý T_0-prostor váhy τ je homeomorfní s některou podmnožinou prostoru F^τ, a tudíž[36]) je prostým spojitým obrazem některé podmnožiny prostoru D^τ; každý bikompakt váhy τ je spojitým obrazem některé uzavřené podmnožiny prostoru D^τ.

Jak je známo, každý kompakt (t. j. bikompakt spočetné váhy) je spojitým obrazem Cantorova diskontinua $\mathsf{D}^{\aleph_0}$; pro $\tau > \aleph_0$ však nejsou všechny bikompakty váhy τ spojitými obrazy celého prostoru D^τ; ty bikompakty, které jsou spojitými obrazy diskontinuí D^τ, se nazývají d y a d i c k é b i k o m p a k t y; zřejmě tvoří nejmenší třídu prostorů, která obsahuje obyčejný dublet a která je uzavřena při operaci spojitého zobrazení a topologického součinu. Tato třída si zasluhuje zvláštního zkoumání; dyadické bikompakty mají mnoho důležitých vlastností, z nichž některé určil N. A. Š a n i n.[37]) Na příklad každá uspořádaná množina, která je dyadickým bikompaktem ve své přirozené topologii, je podobná intervalu číselné osy[38]); dyadický bikompakt není sjednocením dobře uspořádaného rostoucího systému svých řídkých podmnožin, atd.

Uvažujeme-li dostatečně obecné topologické prostory (a to T_0-prostory), pak i konečné množiny mohou mít netriviální topologii, jak je patrno z uvedeného příkladu souvislého dubletu. Konečné T_0-prostory, a obecněji T_0-prostory,

[34]) Hilbertův kvádr (*fundamentalnyj paralelepiped*, fundamentalquader) je podprostorem Hilbertova prostoru H a sestává ze všech $x = \{\xi_n\}_1^\infty$ s $|\xi_n| \leqq n^{-1}$. (*Pozn. překl.*)

[35]) V originálu *„prostoje dvojetočije" a „svjaznoje dvojetočije"*. Bod p prostoru R je isolovaný, je-li množina (p) otevřená. Prostor je souvislý, není-li sjednocením dvou disjunktních neprázdných uzavřených podmnožin. (*Pozn. překl.*)

[36]) Zřejmě prostor F^τ je prostým spojitým obrazem prostoru D^τ.

[37]) N. A. Š a n i n, *O diadičeskich bikompaktach*, DAN, 53, 1946, str. 785. (*Pozn. překl.*)

[38]) Přirozená topologie uspořádané množiny je určena basí, která sestává z intervalů. Dvě uspořádané množiny jsou p o d o b n é, existuje-li zobrazení jedné na druhou, které zachovává uspořádání (t. j., z $x < y$ plyne $f(x) < f(y)$). (*Pozn. překl.*)

v nichž nejen sjednocení, ale i průnik libovolného systému otevřených množin je otevřený, se nazývají diskretní prostory. Speciálním případem diskretního prostoru jsou simpliciální komplexy.[39]

Bikompakty jsou zajímavé mimo jiné tím, že všechny bikompakty a právě jen bikompakty mohou být sestrojeny jistým limitním procesem, při kterém výchozími jsou diskretní prostory (nebo dokonce simpliciální komplexy). Tato skutečnost má velký principiální význam, protože byla podkladem pro přenesení základních pojmů a method kombinatorické topologie komplexů na bikompakty, a především na kompakty.

Tento limitní proces jsem definoval v letech 1925—1929, nejdříve pro kompakty;[40] později byl zobecněn A. G. Kurošem na obecné bikompakty[41]. Pojem t. zv. projekčního spektra, který je podstatou tohoto aproximačního procesu, byl pak dále rozvíjen Freudenthalem, Steenrodem, Lefshetzem a mnohými jinými matematiky; tento rozšířený pojem se pak stal často užívaným nástrojem nejen topologie, ale i theorie topologických grup a jejich aplikací.[42]

Vezměme t. zv. usměrněný systém[43] topologických prostorů X_α, a nechť platí: když $\beta > \alpha$, pak existuje spojité zobrazení $\overline{\omega}_\alpha^\beta$ prostorů X_β do X_α, které nazveme projekcí a které vyhovuje této podmínce transitivnosti: pro $\gamma > \beta > \alpha$ je $\overline{\omega}_\alpha^\gamma = \overline{\omega}_\alpha^\beta \, \overline{\omega}_\beta^\gamma$.

Usměrněný systém prostorů X_α spolu s jejich projekcemi $\overline{\omega}_\alpha^\beta$ nazveme projekčním spektrem a označíme $\{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$.

Množinu bodů $x_\alpha \in X_\alpha$, po jednom z každé X_α[44] a vyhovující podmínce: když $\beta > \alpha$, pak $\overline{\omega}_\alpha^\beta \, x_\beta = x_\alpha$, nazveme nití spektra. Nyní množina všech nití je topologickým prostorem: vezměme v jednom X_α některou otevřenou množinu Γ_α a označme O_{Γ_α} množinu všech nití „procházejících Γ_α", t. j. množinu všech nití $\xi = \{x_\alpha\}$, kde $x_\alpha \in \Gamma_\alpha$. Nechť průniky konečných systémů množin O_{Γ_α} jsou basí prostoru všech nití daného spektra. Tento prostor nití nazveme limitou spektra a označíme $\lim \{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$.

Je mnoho speciálních případů a variant tohoto pojmu. Jeden z důležitějších speciálních případů nastane, předpokládáme-li, že všechny prostory X_α jsou bikompakty. Pak, jak se snadno dokáže, limitní prostor $\lim \{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$ je uzavřený v topologickém součinu prostorů X_α a je tedy sám bikompaktem.

Zvlášť důležitý je případ, kdy všechny X_α jsou bikompaktními topologickými grupami, a projekce $\overline{\omega}_\alpha^\beta$ jsou spojitými homomorfismy. Pak též limitní prostor je grupou se součinem po souřadnicích: jsou-li $\xi = \{x_\alpha\}$, $\eta = \{y_\alpha\}$ dvě nitě, pak $\xi\eta = \{x_\alpha y_\alpha\}$. Tohoto způsobu konstrukce nových grup pomocí daných grup X_α se často používá, na př. při definici různých analogií grup Bettiho. Má však

---

[39]) Simpliciální komplex (jakožto topologický prostor) je systém některých konečných podmnožin dané množiny (a všech jejich neprázdných podmnožin) s přirozeným částečným uspořádáním a přirozenou topologií — viz [45]). (*Pozn. překl.*)

[40]) *Simpliziale Approximationen in der allgemeinen Topologie*, Math. Ann., 96, 1927, str. 489. (*Pozn. překl.*)

[41]) *Kombinatorischer Aufbau der bikompakten topologischen Räume*, Comp. Math., 2, 1935, 471. (*Pozn. překl.*)

[42]) Topologická grupa je množinou, která je zároveň grupou a topologickým prostorem, a kde ještě zobrazení $F : F(x, y) = x\, y^{-1}$ je spojité. (*Pozn. překl.*)

[43]) Usměrněnou množinou (*napravlennoje množestvo*) rozumíme částečně uspořádanou množinu, v níž ke každé dvojici prvků existuje třetí, větší než oba prvky dané.

[44]) Bez újmy na obecnost lze předpokládat, že systém prostorů X_α je disjunktní.

i jiné aplikace. Nechť na příklad α probíhá množinu všech přirozených čísel, a nechť každý X_α je prostor sestávající z 2^n isolovaných bodů, a to právě ze všech pořadí $(i_1, \ldots, i_n)$, kde každé i_k je buď 0 nebo 1. Projekci pak definujeme takto: $\overline{\omega}_n^{n+1}(i_1, \ldots, i_{n+1}) = (i_1, \ldots, i_n)$. Pak limitní prostor je Cantorovo diskontinuum.

V druhém případě nechť je znovu $\alpha = 1, 2, 3, \ldots$. Nechť prostor X_α je kružnice $|z| = 1$ v komplexní rovině. Volme pevně posloupnost celých čísel $m_\alpha \geq 2$. Pro každé α definujme projekci jako zobrazení $X_{\alpha+1}$ na X_α určené vztahem $z_\alpha = z^{m_\alpha}_{\alpha+1}$. Pak limitní prostor je nejobecnější solenoid — jednorozměrné kontinuum v trojrozměrném prostoru, které je průnikem posloupnosti do sebe vložených toroidálních těles C_α (homeomorfních uzávěrů vnitřku obyčejného anuloidu), z nichž vždy $C_{\alpha+1}$ leží uvnitř C_α a obíhá ho m_α - krát.

Druhý krajní případ projekčního spektra dostaneme, předpokládáme-li, že všechny X_α jsou konečné diskretní T_0-prostory. Pak také limitní prostor $\lim \{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$ je T_0-prostorem — v tomto případě jej nazveme totální limitou spektra. Avšak zde jsou zajímavé ještě jiné limitní konstrukce, a to t. zv. dolní a horní limity. Omezíme se na definici dolní limity. Řekneme, že nit $\xi = \{x_\alpha\}$ obepíná nit $\xi' = \{x'_\alpha\}$, když pro každé α je $x'_\alpha \in \overline{(x_\alpha)}$.[45]) Nit nazveme minimální, jestliže neobepíná žádnou nit kromě sebe. Podmnožinu totální limity daného spektra, sestávající ze všech minimálních nití, nazveme dolní limitou spektra. Dolní limita projekčního spektra je také bikompaktní. Je také hausdorffovská, jakmile spektrum splňuje tuto podmínku oddělitelnosti:

(H). Ke každé dvojici minimálních nití $\xi' = \{x'_\alpha\}$ a $\xi'' = \{x''_\alpha\}$ existuje α takové, že žádný bod v X_α nemá uzávěr obsahující současně x'_α i x''_α.

Tedy dolní limita spektra vyhovujícího podmínce (H) je bikompakt.

Lze také dokázat obrácené tvrzení: každý bikompakt je dolní limitou jistého spektra vyhovujícího uvedené podmínce (H).

Toto spektrum se sestrojuje takto: Vezměme libovolný konečný disjunktní systém α otevřených množin $\Gamma_{\alpha 1}, \Gamma_{\alpha 2}, \ldots, \Gamma_{\alpha s}$ v prostoru R, jehož sjednocení je husté v R. Body diskretního prostoru X_α nechť jsou všechny výrazy $(\alpha; i_1, \ldots, i_r)$, kde $\overline{\Gamma}_{\alpha i_1} \cap \overline{\Gamma}_{\alpha i_2} \cap \ldots \cap \overline{\Gamma}_{\alpha i_r} \neq \emptyset$).[46])

Prostor X_α topologisujeme tím, že množinu X_α částečně uspořádáme: $(\alpha; j_1, \ldots, j_q) \leq (\alpha; i_1, \ldots, i_p)$ právě když každé číslo z $i_1, \ldots, i_p$ je některým z $j_1, \ldots, j_q$.

Dále položme $\beta > \alpha$, právě když systém $\beta = \{\Gamma_{\beta 1}, \ldots, \Gamma_{\beta t}\}$ je vepsaný do systému $\alpha = \{\Gamma_{\alpha 1}, \ldots, \Gamma_{\alpha s}\}$, t. j., když každá $\Gamma_{\beta j}$ je obsažena v některém (a pak zřejmě jediném) $\Gamma_{\alpha i}$.[47])

Projekce definujeme takto: ke každému $\Gamma_{\beta j}$ existuje jediná nadmnožina $\Gamma_{\alpha i}$, čímž máme $\overline{\omega}_\alpha^\beta(\beta; j) = (\alpha; i)$; pak dále $\overline{\omega}_\alpha^\beta(\beta; j_1, \ldots, j_q) = (\alpha; \overline{\omega}_\alpha^\beta(\beta; j_1), \ldots, \overline{\omega}_\alpha^\beta(\beta; j_q))$ (opakující se prvky vpravo počítáme jednou).[46])

Touto definicí je zakončena konstrukce spektra $\{X_\alpha, \overline{\omega}_\alpha^\beta\}$; nazývá se spektrem daného prostoru R (dosud jsme nepoužili bikompaktnosti); je-li ještě prostor R bikompaktem, pak dolní limita spektra je homeomorfní s prostorem R.

---

[45]) Studium konečných diskretních prostorů je v podstatě ekvivalentní studiu konečných částečně uspořádaných množin: stačí položit $x'_\alpha \leq x_\alpha$, kdykoli bod x'_α prostoru X_α patří do uzávěru bodu x_α téhož prostoru.

[46]) Zde nepředpokládáme $i_k \neq i_n$ pro $k \neq n$. Po identifikaci „$\leq$ et $\geq$" (viz dále) ovšem $(\alpha; i_1, \ldots, i_r)$ závisí jen na množině $(i_l, \ldots, i_r)$ a nikoli na jejich pořadí nebo opakování. (*Pozn. překl.*)

[47]) Pak je zřejmé, že sjednocení všech $\Gamma_{\beta j}$ obsažených v daném $\Gamma_{\alpha i}$ je hustá v této $\Gamma_{\alpha i}$.

Mezi různými problémy theorie bikompaktních prostorů posledních 10—15 let se nejvíce zkoumaly otázky, týkající se bikompaktních rozšíření topologických prostorů, přesněji řečeno, úplně regulárních prostorů.

Ze základní Tichonovovy věty o vnoření úplně regulárního prostoru R do bikompaktu (a to do tichonovského kvádru téže váhy jako R) plyne: Každý úplně regulární prostor R má bikompaktní obal bR, t. j. bikompakt, v kterém daný prostor R je hustý — má-li prostor R váhu τ, stačí ho vnořit do tichonovského kvádru váhy τ a utvořit jeho uzávěr v tomto kvádru.

V téže souvislosti vzniká otázka po nalezení všech bikompaktních obalů daného úplně regulárního prostoru; tato otázka je předmětem obsažné a zajímavé theorie. Především, bikompaktní obaly daného úplně regulárního prostoru R jsou přirozeným způsobem částečně uspořádány: obal $b_2 R$ je za obalem $b_1 R$, existuje-li spojité zobrazení prostorů $b_2 R$ na $b_1 R$, identické na R. Lze pak dokázat, že takto částečně uspořádaná množina všech bikompaktních obalů daného prostoru R má největší prvek — bikompaktní obal αR, který lze spojitě zobrazit na každý jiný bikompaktní obal tak, že body z R jsou invariantní. Tento maximální (nebo Čechův) obal αR je jednoznačně určen svou maximálností. Lze ho sestrojit takto: Systém γ otevřených množin Γ prostoru R nazveme vhodný, když ke každé množině Γ v γ existuje v γ podřízená množina Γ', t. j. úplně regulárně vložená v Γ (tím se rozumí, že Γ' a R-Γ jsou funkcionálně oddělitelné v R). Centrovaný[48]) vhodný systém otevřených množin prostoru R, který není obsažen v žádném větším centrovaném systému, nazveme konec prostoru R.

Je zřejmé, že systém všech okolí libovolného bodu prostoru R je koncem. Identifikujeme-li každý bod s koncem, sestávajícím ze všech jeho okolí, můžeme považovat prostor R za část množiny αR všech konců tohoto prostoru. Množinu konců topologisujeme: nechť Γ je libovolná otevřená množina v R; označme O_Γ množinu všech konců, jejichž jedním elementem je Γ. Nechť pak průniky konečných systémů množin O_Γ tvoří basi prostoru αR. Lze nyní dokázat, že vložení R do αR je topologické vnoření, a že při tom R se stává hustou podmnožinou v αR. αR je tedy bikompaktním obalem prostoru R, a lze ukázat, že je maximální.[49])

Zesílíme-li podmínku podřízenosti, t. j. považujeme-li za podřízené množině Γ nikoli všechny do ní regulárně vložené množiny, nýbrž jen některé z nich, a to tak, aby byly přitom splněny některé přirozené podmínky, jinak řečeno, volíme-li vhodně předpis podřízenosti, dostaneme uvedeným způsobem kromě maximálního obalu dokonce i libovolný předem daný bikompaktní obal prostoru R.

Poznamenejme nakonec, že dolní limita spektra normálního prostoru R je právě maximálním bikompaktním obalem αR prostoru R.

Dnes se pracuje na theorii bikompaktních obalů daného úplně regulárního prostoru s úplně jiného hlediska, totiž s hlediska stejnoměrné topologie. Je známa Weilova definice stejnoměrných prostorů („prostorů se stejnoměrnou strukturou“ [7]). Podle mého názoru není tato definice vyčerpávající a úplně vhodná, již proto, že podstatně využívá speciálního aparátu, analogického soustavě okolí

---

[48]) Systém množin je centrovaný, když každý konečný podsystém má neprázdný průnik.

[49]) αR prvně sestrojil E. Čech v r. 1937; uvedenou konstrukci, podstatně se lišící od konstrukce Čechovy, jsem provedl v r. 1939.[50])

[50]) E. Čech, l. c.; P. S. Alexandrov, *O bikompaktnych razširenijach topologičeskich prostranstv*, Mat. sb., sv. 5, 47, 1939, str. 403. Je nutné poznamenat, že prof. Čech nekonstruoval beta-obal, nýbrž jen zjistil různé důležité vlastnosti již dříve známého tichonovského bikompaktního obalu. (*Pozn. překl.*)

(basi) topologického prostoru. Tento nedostatek nemá definice t. zv. proximitního prostoru, předložená V. A. Jefremovičem,[51]) která je založena na pojmu blízkosti dvou množin (právě tak, jako je topologie založena na pojmu blízkosti bodu a množiny: „bod je blízko k množině, patří-li do jejího uzávěru"). *Množina P libovolných prvků* (nazvaných body prostoru) *je proximitním prostorem, je-li definován vztah blízkosti mezi jeho podmnožinami,* t. j., je-li určeno, zda libovolné dvě podmnožiny jsou nebo nejsou *blízké* (nejsou-li, říkáme, že jsou vzdálené); požadujeme dále, aby byly splněny tyto podmínky, „axiomy proximity" (podle V. A. Jefremoviče):

1. *Je-li množina A blízko k množině B, je také B blízko k A.*
2. *Sjednocení množin A_1 a A_2 je blízko k B, právě když alespoň jedna z A_1, A_2 je blízko k B.*
3. *Dva body jsou blízké, právě když jsou totožné.*
4. *Prostor P je vzdálený od prázdné množiny.*
5. *Každé dvě vzdálené množiny A, B jsou obsaženy v disjunktních množinách U, V takových, že A, $P—U$ jsou vzdálené a B, $P—V$ jsou vzdálené.*

Poznámka: Množinu $U \supset A$ takovou, že A, $P—U$ jsou vzdálené, nazveme proximitním okolím množiny A.

Již V. A. Jefremovič ukázal, že každý proximitní prostor má přirozenou topologii (bod p blízký k množině A se prohlásí za bod uzávěru A), a že proximitní prostor s touto topologií je úplně regulární. Naopak, v úplně regulárním topologickém prostoru lze obecně definovat různé proximity tak, aby bylo vyhověno podmínkám 1—5. [52]) Je tedy přirozené začít studium proximitních prostorů touto otázkou: Je dán úplně regulární prostor R; jest určit všechny proximity „na něm" (t. j., všechny proximitní prostory P sestávající z bodů R, které ve své přirozené topologii se shodují s R).

Je přirozené nazvat stejnoměrně spojitým každé zobrazení proximitních prostorů X do Y, které zobrazuje každou dvojici blízkých množin v X na dvojici blízkých množin v Y. Je zřejmé, že tato zobrazení jsou spojitá v přirozených topologiích proximitních prostorů X a Y. Speciálním případem proximitních prostorů jsou metrické prostory (dvě množiny jsou blízké, mají-li nulovou vzdálenost) a také topologické grupy.[53]) Při tom, jak poznamenal V. A. Jefremovič, obvyklá stejnoměrná spojitost je totožná se stejnoměrnou spojitostí ve smyslu zachování blízkosti.

Každý prostor se stejnoměrnou strukturou ve smyslu A. Weila má také jednoznačně určenou proximitu, ale daný proximitní prostor obecně může mít více stejnoměrných struktur. Vzájemný vztah pojmů úplně regulární prostor, proximitní prostor, prostor se stejnoměrnou strukturou lze snad vyjádřit jako postupné štěpení prvního pojmu v druhý a druhého v třetí.

Nejzajímavější a nejvíce rozvinutou otázkou je otázka vzájemných vztahů mezi topologickými prostory a proximitními prostory. Zde je situace jasná díky této větě J. M. Smirnova [5]: *Proximity na daném úplně regulárním prostoru R jsou ve vzájemně jednoznačném vztahu s bikompaktními obaly prostoru R: každému bikompaktnímu obalu bR odpovídá jednoznačně určená proximita P_b na R, při níž dvě množiny jsou blízké, právě když se protínají jejich uzávěry v bR; přitom tímto způsobem dostaneme všechny proximity na R, a různým obalům odpovídají různé*

[51]) V originále *prostranstvo blizosti.* (*Pozn. překl.*)

[52]) Jeden způsob zavedení proximity do úplně regulárního topologického prostoru spočívá v tom, že funkcionálně oddělitelné množiny prohlásíme za vzdálené.

[53]) Podmnožiny A, B topologické grupy jsou blízké, když $1 \in \overline{AB^{-1}}$). (*Pozn. překl.*)

proximity. Je přirozené říci, že proximitní prostor $P_{b''}$ je za proximitním prostorem $P_{b'}$ (oba na témž topologickém prostoru R), jestliže identické zobrazení $P_{b''}$ na $P_{b'}$ je stejnoměrně spojité. Lze nyní dokázat, že toto částečné uspořádání přesně odpovídá částečnému uspořádání bikompaktních obalů: proximitní prostor $P_{b''}$ je za $P_{b'}$, právě když bikompaktní obal $b''R$ určující $P_{b''}$ je za bikompaktním obalem $b'R$ (ve smyslu uvedeném dříve) určujícím $P_{b'}$.

Mezi jiným J. M. Smirnov řeší otázku, kdy má daný úplně regulární prostor R jediný bikompaktní obal, nebo (což je tedy totéž), kdy připouští jedinou proximitu. Ukazuje se, že triviální postačující podmínka — bikompaktnost R — není nijak nutná.[54]) Nutná a postačující podmínka pro to, aby prostor R měl jediný bikompaktní obal, je, aby v R neexistovala dvojice funkcionálně oddělitelných nebikompaktních uzavřených množin: na příklad, prostor všech ordinálních čísel $< \omega_1$ (v přirozené pořádkové topologii) není bikompaktní, ale připouští jediný bikompaktní obal a tedy i jedinou proximitu.

Velký principiální význam Smirnovova vzájemně jednoznačného vztahu mezi bikompaktními obaly a proximitami na daném úplně regulárním prostoru R spočívá v tak provedené úplné redukci pojmu proximity na starší pojem bikompaktního obalu. Tato redukce ovšem neřeší speciální problematiku, spjatou s proximitními prostory (připomeňme jako příklad Jefremovičův důkaz toho, že euklidovská a hyperbolická rovina představují dva různé proximitní prostory na téže „topologické rovině").

Ze základní Smirnovovy věty plyne také, že proximitní prostor uzavřený v každém proximitním nadprostoru je nutně bikompaktní. Tím je ukázáno, že problém definování úplných proximitních prostorů nelze řešit v analogii s podobnou otázkou v metrických prostorech, ale že je třeba užít jiného postupu. Smirnov vyřešil také tento problém, ale nemůžeme se zde tím zabývat. Uveďme jen zajímavý výsledek o úplných (v obvyklém smyslu) metrických prostorech: *Nutná a postačující podmínka pro to, aby metrický prostor R byl úplný, jest, aby v tom jeho bikompaktním obalu, který určuje přirozenou proximitu daného metrického prostoru, právě jen body samého R měly spočetný charakter.*[55])

Nezbývá mi čas, abych popsal Smirnovovy věty o vztazích mezi proximitními prostory a prostory se stejnoměrnou strukturou ve smyslu Weilově, a mohu jen odkázat zájemce na původní články.

Končím tento nutně krátký přehled; doufám, že dává představu o současném stavu nejzajímavějších směrů bádání v theorii topologických prostorů; z nich, domnívám se, dalšího rozvoje nejvíce zasluhují výsledky týkající se proximitních prostorů.

Přeložil O. Hájek

Literatura

[1] P. S. Alexandrov, *O ponjatii prostranstva v topologii*, UMN, sv. 2, č. 1, 1947, str. 5.

[2] V. A. Jefremovič, *Infinitěsimalnyje prostranstva*, DAN SSSR, sv. 76, 1951, str. 241.

[3] V. A. Jefremovič, *Geometrija blizosti I*, Mat. sb., sv. 31, 1952, str. 189.

[4] J. M. Smirnov, *O metrizacii topologičeskich prostranstv*, UMN, sv. 6, č. 6, 1951, str. 100.

[5] J. M. Smirnov, *Otobraženija sistěm otkrytych množestv*, Mat. sb., sv. 31, 1952, str. 152.

[6] J. M. Smirnov, *O prostranstvach blizosti*, DAN SSSR, sv. 84, 1952, str. 895.

[7] N. Bourbaki, *Actualités scientifiques et industrielles*, sv. 858, 1942.

[54]) Unicita definice proximity na bikompaktu byla zjištěna již dříve V. A. Jefremovičem.

[55]) Bod p má spočetný charakter, existuje-li spočetný systém jeho okolí, takový, že v každém okolí bodu p je obsaženo některé okolí tohoto systému. (*Pozn. překl.*)