Karel Bláha; Josef Machek

Lineární programování

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 1, 28--41

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/137074`

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ

KAREL BLÁHA, *Výzk. ústav techn. ekonomický chemického průmyslu,* Praha
JOSEF MACHEK, *matematicko-fysikální fakulta KU*

Tento článek má 2 části; v prvé z nich je stručně vyložena nejdůležitější metoda lineárního programování a v druhé je předvedeno její užití na několika příkladech, skutečně řešených v praxi (převzatých z praxe VÚTE CHP).

1.1 Úvod

Lineárním programováním se rozumí řešení úlohy maximalisace nebo minimalisace lineární funkce n proměnných za vedlejších podmínek, vyjádřených soustavou m ($m < n$) lineárních rovnic a požadavkem, aby řešení bylo nezáporné. Problém lineárního programování tedy je: z nekonečného množství možných řešení systému m lineárních rovnic o n neznámých ($m < n$) vyhledat to řešení (resp. ta řešení, je-li jich více), které má všechny složky nezáporné, $x_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, a při kterém lineární funkce n-proměnných, $f(x_1, \ldots$ $\ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i c_i$, nabývá podle povahy úlohy buď své maximální nebo minimální hodnoty na množině všech nezáporných řešení.

Takové úlohy se vyskytují při řešení mnohých ekonomických a technologických otázek, jestliže jde o nalezení optimální varianty z mnoha možných variant. V druhé části práce se seznámíme na příklad s úlohou, spočívající v nalezení takového výrobního programu pro podélnou řezačku papírenského stroje, který kromě toho, že plní plánované požadavky odběratelů, zaručuje též minimální technologicky nutný odpad. Budeme se také zabývat otázkou nalezení nejlevnějšího schematu rozvozu nějakého produktu z m zdrojů s omezenou kapacitou do n míst určení. K osvětlení možností použití lineárního programování k nalezení optimálního technologického postupu použijeme příkladu z výroby umělých vláken, kde budeme maximalisovat pevnost za platnosti určitých omezujících technologických podmínek.

V takových a podobných úlohách, zahrnujících volbu optimálního výrobního plánu, optimálního sortimentu, tvoření nejlacinějších směsí při splnění specifikovaných požadavků, optimální rozmístění pracovních sil apod. je metoda lineárního programování velmi vhodným nástrojem. Všechny tyto úlohy, pokud nejsou rozsáhlé, lze řešit pouhou logickou úvahou. Metoda lineárního programování je však velmi prospěšná v těch případech, kdy variant, jež je třeba posoudit, je velké množství, takže optimální variantu nelze pouhou úvahou nalézt. Metoda umožňuje soustavné vyšetření všech možností, které mohou přinést zlepšení a zjištění, zda nalezené řešení je optimální.

V posledních několika málo letech věnují střediska průmyslového výzkumu v ČSR metodám lineárního programování velkou pozornost a v některých se již zdařily velmi efektivní aplikace. Z vlastní zkušenosti můžeme ř.ci, že aplikace na nalezení nejlevnějš ho schematu rozvozu (dopravní problém) přinesly již statisícové a mohou přinést milionové částky úspor a i ostatní aplikace, které jsme prováděli, se ukázaly efektivní. Pro tento praktický význam lineárního programování a také pro zajímavost jeho metody, využívající teorie vektorových prostorů, předkládáme tento článek.

V následujících oddílech 1.2 a 1.3 je krátce vyložen teoretický základ dosud nejobecnější metody lineárního programování, tzv. simplexové metody, a její úprava pro jeden zvláštní případ, tzv. dopravní problém. Protože tato část je jen přípravou pro část II, jednající o aplikacích, není teorie úplná. Výklad je založen hlavně na [1]. Nerozebírá se také vztah lineárního programování k jiným oborům (např. k teorii her).

V části II jsou metody, vyložené v oddílech 1.2 a 1.3, aplikovány na tři úlohy. Jedna z nich je pro tento článek upravena, aby měla přijatelnější rozsah, podstata je však nezměněna. Zařazení těchto úloh má několikerý význam: 1. Je na nich předvedeno, jak se na základě praktických požadavků sestavují rovnice pro simplexovou metodu, jak se převádějí nerovnosti na rovnice apod.; 2. úlohy dávají představu o povaze problémů, jež lze simplexovou metodou řešit, a ilustrují význam lineárního programování; 3. výpočetní techniku simplexové metody je třeba přizpůsobit prostředkům, jež jsou dostupné — v uvedených úlohách je předvedena i organisace výpočtů.

1.2 Simplexová metoda lineárního programování

Je dána soustava m lineárních rovnic o n neznámých $x_1, x_2, \ldots, x_n$, $(m < n)$:

$$\sum_{j=1}^{n} a_{ij} x_j = b_i\,, \quad i = 1, 2, \ldots, m\,. \tag{1}$$

Dále je dána lineární funkce $f(x_1. x_2, \ldots, x_n)$ n proměnných

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i\,. \tag{2}$$

Soustava (1) má samozřejmě nekonečně mnoho řešení. Úloha lineárního programování zní: najít řešení $x_1 \ldots, x_n$ soustavy (1), pro které funkce $f(x_1, \ldots, x_n)$ nabývá svého maxima (resp. minima, podle povahy problému) vzhledem k množině všech *nezáporných* řešení, a které má vlastnost $x_i \geqq 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$. Řešení, pro které by některé x_i bylo záporné, nemá totiž pro úlohy řešené metodami lineárního programování smyslu; x_i mají význam množství, rozsahu činnosti apod. Dále budeme mluvit jen o úloze *maximalisace*; bude-li úkolem minimalisovat $f(x_1 \ldots, x_n)$, budeme uvažovat funkci $-f(x_1, \ldots, x_n)$ a tím převedeme úlohu na úlohu maximalisace.

Jako vždy při práci s lineárními rovnicemi, bude i zde výhodné užít maticového značení. Budeme značit sloupcové matice (tj. skupiny reálných čísel, uspořádaných do sloupce) tučnými písmeny malé latinské abecedy, jejich prvky odpovídajícími normálními písmeny. Sloupce koeficientů soustavy (1) označíme tedy $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$,

$$\boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} a_{1i} \\ a_{2i} \\ \vdots \\ a_{mi} \end{pmatrix}, \qquad \boldsymbol{b} = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix},$$

sloupec proměnných $x_1, \ldots, x_n$ označíme písmenem $\boldsymbol{x}$. Počet prvků ve sloupci vyznačovat nebudeme; slupce $\boldsymbol{a}_i$, $\boldsymbol{b}$ mají vždy m prvků, sloupec $\boldsymbol{x}$ má n prvků.

Násobení sloupce číslem znamená jako vždy násobení všech prvků, součet několika sloupců je sloupec, jehož prvky jsou prvky odpovídajících sloupců, tedy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^{n} x_i a_{1i} \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{2i} \\ \dots\dots \\ \sum_{i=1}^{n} x_i a_{mi} \end{pmatrix}.$$

Rovnost dvou sloupců znamená rovnost všech odpovídajících prvků, tj. $\boldsymbol{a} = \boldsymbol{b}$ tehdy a jen tehdy, když $a_i = b_i$, $i = 1, 2, \ldots, m$. V tomto značení zapíšeme soustavu (1) takto:

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} . \tag{1'}$$

Jak jsme řekli, mají pro problém lineárního programování význam jen řešení $\boldsymbol{x}$ s nezápornými prvky, $x_i \geqq 0$. Taková řešení nazveme *přípustná*. Simplexová metoda lineárního programování využívá těchto vlastností množiny přípustných řešení:

Vlastnost 1: Jsou-li $\boldsymbol{x}^{(1)}, \boldsymbol{x}^{(2)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ přípustná řešení soustavy (1'), a $\gamma_1, \ldots, \gamma_k$ čísla, splňující podmínky $\Sigma\gamma_i = 1$, $0 \leqq \gamma_i$, $i = 1, 2, \ldots, k$, pak $\boldsymbol{x} = \sum_{i=1}^{k} \gamma_i \boldsymbol{x}^{(i)}$ je také přípustné řešení soustavy (1').

Vlastnost 1 je zřejmá, neboť

$$\sum_{i=1}^{n} \left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j x_i^{(j)} \right) \boldsymbol{a}_i = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \left(\sum_{j=1}^{n} x_i^{(j)} \boldsymbol{a}_i \right) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \boldsymbol{b} = \boldsymbol{b}$$

($x_i^{(j)}$, $i = 1, 2, \ldots, n$ jsou prvky řešení $\boldsymbol{x}^{(j)}$).

Pro jednodušší vyjadřování v celém dalším textu definujeme nyní *základní řešení*: přípustné řešení (soustavy (1')) nazveme *základním*, jestliže systém sloupců, jimž odpovídají *kladné* prvky řešení $\boldsymbol{x}$, $\{\boldsymbol{a}_i : x_i > 0\}$*) je lineárně nezávislý, tj. neexistují čísla α_i, z nichž aspoň jedno by bylo různé od nuly s vlastností $\sum_{i: x_i > 0} \alpha_i \boldsymbol{a}_i = 0$. Základní řešení mají mezi přípustnými řešeními zvláštní postavení, vyjádřené dalšími vlastnostmi množiny přípustných řešení.

Vlastnost 2: Je-li $\boldsymbol{x}$ základním řešením soustavy (1'), nelze je vyjádřit jako lineární kombinaci různých přípustných řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ s kladnými koeficienty γ_i, $\sum_{i=1}^{p} \gamma_i = 1$. Vlastnost 2 plyne z jednoznačnosti vyjádření vektoru pomocí prvků base vektorového prostoru (viz na př. [2]). Předpokládejme totiž, že existují přípustná řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$, $\sum_{i=1}^{p} \gamma_i \boldsymbol{x}^{(i)} = \boldsymbol{x}$, kde γ_i jsou kladná čísla,

---

*) Složené závorky $\{\boldsymbol{a}_i : \ldots\}$ označují množinu, jejímiž prvky jsou sloupce $\boldsymbol{a}_i$ splňující podmínku, označenou za dvojtečkou, v našem případě tedy množinu sloupců, jimž odpovídají kladné prvky řešení.

splňující podmínku $\sum_{i=1}^{p} \gamma_i = 1$. Protože všechna $\gamma_i > 0$ a všechna $x_i^{(j)} \geqq 0$ ($x_i^{(j)}$ je i-tý prvek $\boldsymbol{x}^{(j)}$), musí být $x_i^{(j)} = 0$ pro všechna i, pro která $x_i = 0$ (x_i je i-tý prvek $\boldsymbol{x}$). Protože $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ jsou přípustná řešení, musí pro všechna $j = 1, 2, \ldots, p$ tedy platit

$$\sum_{i:x_i > 0} x_i^{(j)} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} ;$$

vzhledem k jednoznačnosti vyjádření $\boldsymbol{b}$ pomocí lineárně nezávislých sloupců musí být $x_i^{(1)} = x_i^{(2)} = \ldots = x_i^{(p)} = x_i$ pro všechna i, čili $\boldsymbol{x}^{(j)} = \boldsymbol{x}$ pro všechna j.

Vlastnost 3: Každé přípustné řešení $\boldsymbol{x}$ lze vyjádřit ve tvaru $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \boldsymbol{x}^{(j)}$, kde $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$ jsou základní řešení,

$$\gamma_j \geqq 0 , \quad j = 1, 2, \ldots, p, \quad \sum_{j=1}^{p} \gamma_j = 1 .$$

Vlastnost 3 plyne ze skutečnosti, že pro každé přípustné řešení $\boldsymbol{x}$, které není základní, je systém $\{\boldsymbol{a}_i : x_i > 0\}$ lineárně závislý. Označme množinu indexů i, kterým odpovídají *kladné* prvky řešení $\boldsymbol{x}$, symbolem I, tedy $I = \{i : x_i > 0\}$. Je-li $\boldsymbol{x}$ přípustné, ale nikoli základní řešení, existují konstanty γ_i, $i \in I$, takové, že $\sum_{i \in I} \gamma_i \boldsymbol{a}_i = 0$. Pro libovolné t tedy platí rovnice

$$\sum_{i \in I} x_i \boldsymbol{a}_i + t \sum_{i \in I} \gamma_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} ,$$

to jest

$$\sum_{i \in I} (x_i + t\gamma_i) \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} ,$$

a právě tak rovnice

$$\sum_{i \in I} (x_i - t\gamma_i) \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} .$$

Označíme-li $\boldsymbol{x}^{(1)}$ řešení, které má prvky $x_i^{(1)} = 0$ pro $i \bar{\in} I$ a $x_i^{(1)} = x_i + t\gamma_i$ pro $i \in I$, a $\boldsymbol{x}^{(2)}$ řešení s prvky $x_i^{(2)} = 0$ pro $i \bar{\in} I$ a $x_i^{(2)} = x_i - t\gamma_i$ pro $i \in I$, pak $\boldsymbol{x} = \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{(1)} + \frac{1}{2} \boldsymbol{x}^{(2)}$. Protože $x_i > 0$ pro $i \in I$, lze zvolit t tak malé, aby všechna $x_i \pm t\gamma_i$ byla nezáporná, čili $\boldsymbol{x}^{(1)}$ i $\boldsymbol{x}^{(2)}$ přípustná řešení. Zvolíme-li t tak, aby $\min (x_i - t\gamma_i) = 0$, tj. aby alespoň při jednom $i \in I$ bylo $x_i - t\gamma_i = 0$, pak je $\boldsymbol{x}$ vyjádřeno jako lineární kombinace dvou přípustných řešení, z nichž aspoň jedno má aspoň o jednu kladnou složku méně. Obě tato řešení můžeme stejně rozkládat dále, až postupným snižováním počtu kladných prvků v řešeních dostaneme samá řešení, jejichž kladné prvky budou odpovídat navzájem lineárně nezávislým sloupcům $\boldsymbol{a}_i$. V nejhorším případě to bude tenkrát, až každé řešení bude obsahovat jediný kladný prvek.

Vlastnost 4: funkce $f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i$ nabývá na množině přípustných řešení soustavy (1′) svého maxima v některém (nebo v některých, je-li jich více) ze základních řešení; jestliže nabývá téže maximální hodnoty pro několik základních řešení, pak nabývá téže hodnoty na množině všech lineárních kombinací těchto základních řešení s nezápornými koeficienty s jednotkovým součtem.

První tvrzení vyplyne z této úvahy: předpokládejme, že f nabývá v bodě $\boldsymbol{x}$, který není základním řešením, hodnoty A, větší než je hodnota f pro všechna základní řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(p)}$. Protože $\boldsymbol{x}$ není základní řešení, lze je — podle vlastnosti 3 — vyjádřit ve tvaru

$$\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \boldsymbol{x}^{(j)} ,$$

kde $\boldsymbol{x}^{(j)}$ jsou základní řešení, γ_j nezáporná čísla, $\sum_{j=1}^{p} \gamma_j = 1$.

$$f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{j=1}^{p} \gamma_j x_i^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{p} \gamma_j \left(\sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(j)}\right) < A \sum_{j=1}^{p} \gamma_j = f(\boldsymbol{x}) ,$$

takže předpoklad $f(\boldsymbol{x}) > f(\boldsymbol{x}^{(j)})$ pro všechna základní řešení $\boldsymbol{x}^{(j)}$ přivedl k nemožnému důsledku $f(\boldsymbol{x}) < f(\boldsymbol{x})$.

Druhé tvrzení se ověří jednoduše: nechť f má pro základní řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}, \ldots, \boldsymbol{x}^{(k)}$ stejnou hodnotu A, nechť $\gamma_1, \ldots, \gamma_p$ jsou nezáporná čísla, jejichž součet je roven 1. Označme $\boldsymbol{x} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \boldsymbol{x}^{(j)}$.

$$f(\boldsymbol{x}) = f\left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j \boldsymbol{x}^{(j)}\right) = \sum_{i=1}^{n} c_i \left(\sum_{j=1}^{k} \gamma_j x_i^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(j)} = \sum_{j=1}^{k} \gamma_j f(\boldsymbol{x}^{(j)}) = A .$$

Vlastnost 4 má pro řešení problému lineárního programování základní význam. Plyne z ní, že k nalezení řešení $\boldsymbol{x}$, maximalisujícího f, stačí vyšetřit všechna základní řešení, kterých je konečný počet (tolik, kolik lineárně nezávislých systémů lze sestavit z vektorů $\boldsymbol{a}_1, \ldots, \boldsymbol{a}_n$) a vyhledat ta základní řešení, při nichž f je maximální. Všechna řešení, maximalisující f — budeme jim říkat *optimální řešení* — dostaneme pak jako lineární kombinace základních optimálních řešení.

A pro rozhodnutí, zda dané základní řešení je optimální, či nikoli, existuje kriterium, které nalezl Lehmke (viz [1]). Toto kriterium zní:

Budiž $\boldsymbol{x}$ základní řešení soustavy (1'). Jestliže v $\boldsymbol{x}$ je právě m *kladných* (nenulových) prvků x_i, pak systém $\{\boldsymbol{a}_i : x_i > 0\}$ je basí prostoru sloupců s m prvky. Jestliže v $\boldsymbol{x}$ je méně než m, řekněme p kladných prvků x_i, doplníme systém $\{\boldsymbol{a}_i : x_i > 0\}$ $m - p$ dalšími sloupci $\boldsymbol{a}_i$ tak, abychom dostali basi. Označme tuto basi $\mathfrak{A}$, množinu indexů jejích prvků I,

$$I = \{i : \boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}\} .$$

Souřadnice vektoru $\boldsymbol{a}_j$ v basi $\mathfrak{A}$ označme $\xi_{1j}, \ldots, \xi_{mj}$, tedy

$$\boldsymbol{a}_j = \sum_{i \in I} \xi_{ij} \boldsymbol{a}_i .$$

Jestliže nyní:

(a) $c_j - \sum_{i \in I} c_i \xi_{ij} \leqq 0$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$, pak řešení $\boldsymbol{x}$ je optimální (tj. f nabývá v $\boldsymbol{x}$ své maximální hodnoty);

(b) mezi 1,2, ..., n existuje k tak, že

$c_k - \sum_{i \in I} c_i \xi_{ik} > 0$ a při tom $\xi_{ik} \leqq 0$ pro všechna $i \in I$, pak f je na množině všech přípustných řešení neohraničená shora (tj. může nabývat libovolně vysokých hodnot — k libovolnému M existuje přípustné řešení $\boldsymbol{x}_M$ soustavy (1′) takové, že $f(x_M) > M$);

(c) mezi 1, 2, ..., n existuje k tak, že $c_k - \sum_{i \in I} c_i \xi_{ik} > 0$ a přitom existuje v I aspoň jeden index i_k, pro který $\xi_{i_k k} > 0$, pak lze hodnotu f zvýšit přechodem od řešení $\boldsymbol{x}$ (ve kterém bylo $x_k = 0$), k řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}$ (ve kterém zvolíme za x_k vhodnou kladnou hodnotu), a tím se přiblížit k optimálnímu řešení.

K ověření platnosti tohoto kriteria vypočteme, oč se změní hodnota funkce f, když některý z nulových prvků $\boldsymbol{x}$, řekněme x_k, nahradíme kladným číslem t. Protože $\boldsymbol{x}$ je řešením soustavy (1), je

$$\sum_{i \in I} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b}$$

(připomeňme, že $I = \{i : \boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}\}$, kde $\mathfrak{A}$ je base prostoru sloupců s m prvky, získané ze systému $\{\boldsymbol{a}_i : x_i > 0\}$ připojením potřebného počtu sloupců). Přičtením a odečtením $t\boldsymbol{a}_k (\boldsymbol{a}_k \bar{\in} \mathfrak{A})$ na levé straně se rovnost neporuší, takže

$$t\boldsymbol{a}_k + \sum_{i \in I} x_i \boldsymbol{a}_i - t\boldsymbol{a}_k = \boldsymbol{b} .$$

Vyjádříme nyní $\boldsymbol{a}_k$ pomocí prvků base $\mathfrak{A}$:

$$t\boldsymbol{a}_k + \sum_{i \in I} x_i \boldsymbol{a}_i - t \sum_{i \in I} \xi_{ik} \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} ,$$

tj.

$$t\boldsymbol{a}_k + \sum_{i \in I} (x_i - t\xi_{ik}) \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} .$$

Odtud plyne, že $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$
s prvky $x_i^{(1)} = x_i - t\xi_{ik}$ pro $i \in I$,

$$x_k^{(1)} = t$$

$$\text{a} \quad x_i^{(1)} = 0 \quad \text{pro} \quad i \bar{\in} I, i \neq k$$

je rovněž řešení soustavy (1). Aby $\boldsymbol{x}^{(1)}$ bylo přípustné řešení, musí být zřejmě

$$t \leqq \min_{i:\xi_{ik}>0} \frac{x_i}{\xi_{ik}} . \tag{3}$$

A hodnota f v řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}$ je

$$f(\boldsymbol{x}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i^{(1)} = c_k t + \sum_{i \in I} c_i x_i^{(1)} = c_k t + \sum_{i \in I} (x_i - t\xi_{ik}) c_i =$$

$$= c_k t + \sum_{i \in I} x_i c_i - t \sum_{i \in I} \xi_{ik} c_i = f(\boldsymbol{x}) + t(c_k - \sum_{i \in I} \xi_{ik} c_i) ,$$

takže přírůstek funkce f při přechodu od $\boldsymbol{x}$ k $\boldsymbol{x}^{(1)}$(s$x_k = t$), tj. při zvětšení x_k z 0 na t, je $t(c_k - \Sigma\xi_{ik}c_i) = t\Delta_k$. Je-li $\Delta_k \leqq 0$ pro všechna $k = 1, 2, \ldots, n$, pak zřejmě nelze zvýšit hodnotu f vsunutím žádné nové kladné složky do řešení $\boldsymbol{x}$. Je-li pro některé k $\Delta_k > 0$, pak lze vsunutím nenulové složky $x_k = t$ hodnotu f zvýšit, aby však nové řešení bylo přípustné, musí být $x_i - t\xi_{ik} \geqq 0$. Jsou-li všechna $\xi_{ik} \leqq 0$, nepředstavuje to žádné omezení a volbou dost velkých t lze f libovolně zvětšovat, je-li některé $\xi_{ik} > 0$, pak je maximální možné zvětšení omezeno nerovností (3).

Pro minimalisaci funkce $f(x)$ aplikujeme uvedené kriterium na funkci $-f(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} (-c_i)\, x_i$. Dosazením koeficientů $-c_i$ na místa c_i do nerovností v kriteriu optimálnosti, dostáváme tato pravidla pro minimalisaci funkce $f(x)$

(a) Jestliže $c_j - \sum_{i \in J} c_i\, \xi_{ij} \geqq 0$ pro všechna $j = 1, 2, \ldots, n$, pak funkce $f(\boldsymbol{x})$ nabývá v $\boldsymbol{x}$ své minimální hodnoty;

(b) jestliže existuje takové, k, že $c_k - \sum_{i \in J} c_i\, \xi_{ik} < 0$ a při tom $\xi_{ik} \leqq 0$ pro všechna $i \in J$, pak $f(\boldsymbol{x})$ je na množině všech přípustných řešení neohraničená zdola;

(c) jestliže existuje k tak, že $c_k - \sum_{i \in J} c_i\, \xi_{ik} < 0$ a přitom v J existuje alespoň jeden index i_k takový, že $\xi_{ik}\, k > 0$, pak lze hodnotu f zmenšit přechodem od řešení $\boldsymbol{x}$ k řešení $\boldsymbol{x}^{(1)}$, ve kterém za x_k zvolíme vhodnou kladnou hodnotu.

Simplexová metoda spočívá vlastně v opakované aplikaci Lehmke-ho kriteria optimálnosti řešení, při čemž se soustavně přechází od jednoho základního řešení ke druhému jakýmsi iteračním postupem, končícím v konečném počtu kroků. V každém kroku se aplikuje Lehmke-ho kriterium, dokud nenastane situace a) nebo b), tj. dokud kriterium neukáže, že bylo dosaženo optimálního řešení, nebo že lze dosáhnout libovolně vysokých hodnot.

Simplexovou metodu lze bez komplikací aplikovat jen tenkrát, když pravá strana rovnice (1′) — tj. sloupec $\boldsymbol{b}$ tvoří s libovolnými $m - 1$ sloupci z levé strany lineárně nezávislý systém, tj. jestliže k vyjádření sloupce $\boldsymbol{b}$ je třeba ne méně než m různých sloupců $\boldsymbol{a}_i$. Má-li soustava tuto vlastnost, říkáme, že jde o nedegenerovaný problém. Předpokládejme tedy, že soustava (1) tuto vlastnost má. (Dále bude platnost simplexové metody rozšířena i na jiné případy, takže v praxi není třeba ověřovat, zda předpoklad je splněn.) Pak každé řešení, tedy i každé základní řešení $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ musí mít právě m nenulových prvků x_i. Vyjde se od nějakého základního řešení $\boldsymbol{x}^{(0)} = (x_1^{(0)}, \ldots, x_n^{(0)})$. Všechny sloupce $\boldsymbol{a}_j$ se vyjádří pomocí prvků base $\mathfrak{A}^{(0)} = \{\boldsymbol{a}_i : x_i^{(0)} > 0\}$, $\boldsymbol{a}_j = \sum_{i \in J^{(0)}} \xi_{ij}^{(0)}\, \boldsymbol{a}_i$, kde $J^{(0)} = \{i : \boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}^{(0)}\}$. Aplikuje se Lehmke-ho kriterium; jestliže je zjištěna situace (c) z kriteria optimálnosti, čili existuje-li k tak, že $c_k - \sum_{\in J^{(0)}} c_i\, \xi_{ik}^{(0)} > 0$ a některé $\xi_{ik}^{(0)} > 0$, pak se přejde k novému řešení $\boldsymbol{x}^{(1)} = (x_1^{(1)}, \ldots, x_n^{(1)})$ s prvky

$$x_i^{(1)} = x_i^{(0)} - t_0 \xi_{ik}^{(0)} \quad \text{pro } i \in I^{(0)}\,,$$

$$x_k^{(1)} = t_0\,,$$

$$x_i^{(1)} = 0 \quad \text{pro} \quad i \,\bar{\in}\, I^{(0)}\,, i \neq k\,,$$

kde $t_0 = \min\limits_{i:\xi_{ik} > 0} \frac{x_i^{(0)}}{\xi_{ik}^{(0)}}$. Vhledem k této volbě t_0 jeden prvek řešení $x^{(0)}$ se stane rovným nule a naopak x_k dříve nulový nabude hodnoty t_0. Index „vyřazeného" prvku označíme r. Jestliže existuje takových k několik, zvolí se kterékoli z nich, je však přirozené volit to, které dává maximální $c_k - \sum_{i=J^{(0)}} c_i \xi_{ik}^{(0)}$.

Systém $\mathfrak{A}^{(1)} = \{a_i : x_i^{(1)} > 0\}$ tvoří opět basi; obsahuje právě m prvků (neboť je přípustným řešením soustavy (1'), která je nedegenerovaná) a je lineárně nezávislý. Kdyby totiž nebyl lineárně nezávislý, bylo by možno zapsat sloupec $\boldsymbol{a}_k$ (ten, který je nový v basi) jako lineární kombinaci ostatních sloupců $\boldsymbol{a}_i$ z $\mathfrak{A}^{(1)}$,

$$\boldsymbol{a}_k = \sum_{i \in J^{(1)} i \neq k)} \gamma_i \boldsymbol{a}_i ,$$

kde aspoň jeden koeficient $\gamma_i \neq 0$, $I^{(1)} = \{i : \boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}^{(1)}\}$. Avšak odečtením tohoto vyjádření od vyjádření $\boldsymbol{a}_k$ v basi $\mathfrak{A}^{(0)}$ dostaneme

$$\sum_{i \in J^0} \xi_{ik} \boldsymbol{a}_i - \sum_{i \in J^{(1)}, i \neq k} \gamma_i \boldsymbol{a}_i = \sum_{i \in J^{(1)}, i \neq r} \boldsymbol{a}_i(\xi_{ik} - \gamma_i) + \boldsymbol{a}_r \xi_{rk} = \mathbf{O} ,$$

kde $\mathbf{O}$ značí sloupec m nul. Protože však $\mathfrak{A}^{(0)}$ je lineárně nezávislý systém, plynulo by odtud, že všechny koeficienty v tomto vyjádření nulového vektoru jsou rovny 0, což není možné, neboť ξ_{rk} je *kladné* číslo (podle volby r).

A protože systém $\mathfrak{A}^{(1)}$ je basí, je možno opakovat s řešením $\boldsymbol{x}^{(1)}$ týž postup. Souřadnice $\xi_{ij}^{(1)}$ pro vyjádření prvku $\boldsymbol{a}_j$ v nové basi $\mathfrak{A}^{(1)}$, jež potřebujeme k aplikaci kriteria optimálnosti, jsou dány — podle pravidel o změně base — výrazy

$$\xi_{ij}^{(1)} = \xi_{ij}^{(0)} - \xi_{ik}^{(0)} \frac{\xi_{rj}^{(0)}}{\xi_{rk}^{0}} \quad \text{pro} \quad i \neq k , \quad \xi_{kj}^{(1)} = \frac{\xi_{rj}^{(0)}}{\xi_{rk}^{(0)}} , \tag{4}$$

a lze je tedy jednoduše vypočítat ze souřadnic prvku $\boldsymbol{a}_j$ ve staré basi. Výpočet se upravuje schematicky do tabulky, jak bude předvedeno v příkladech části II této práce.

Jestliže problém je degenerovaný, čili, jestliže sloupec $\boldsymbol{b}$ tvoří s některými $m - 1$ sloupci $\boldsymbol{a}_j$ lineárně závislý systém, může se stát, že po některém — řekněme p-tém — kroku netvoří systém $\mathfrak{A}^{(p)} = \{\boldsymbol{a}_i : x_i^{(p)} > 0\}$ basi, čili podíl

$$x_i^{(p-1)}/\xi_{ik}^{(p-1)}$$

nabývá téže minimální hodnoty pro více než jednu hodnotu i. Charnes v [3] dokázal, že i pro degenerované problémy vede simplexová metoda k cíli, doplní-li se pravidlem (jež uvedeme bez důkazů jeho platnosti):

Jestliže $x_i^{(p)} = 0$ pro několik indexů $i \in I^{(p-1)}$, vyřadí se z base $\mathfrak{A}^{(p-1)}$ prvek $\boldsymbol{a}_r$ s indexem

$$r = \min \left\{ j : \frac{\xi_{ij}}{\xi_{ik}} = \min \left\{ \frac{\xi_{lj}}{\xi_{lk}} , l \in I^{(p-1)}, x_l^{(p)} = 0. \right\} \right\}$$

Tímto pravidlem je vyřešen problém degenerace.

Zbývá ještě otázka, jak najít výchozí základní řešení $\boldsymbol{x}^{(0)}$ a jak stanovit souřadnice $\xi_{ij}^{(0)}$ — dále už se pokračuje mechanicky podle výrazů (4).

Stanovení výchozího řešení by vyžadovalo vyhledání m lineárně nezávislých sloupců $\boldsymbol{a}_i$, řešení soustavy lineárních rovnic, a určení souřadnic ξ_{ij} řešením dalších soustav lineárních rovnic. Těmto pracným výkonům lze se vyhnout vhodným *rozšířením soustavy* (*1*) a úpravou funkce $f(\boldsymbol{x})$. Soustava (1) se nahradí soustavou

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{m} x_{n+j} \mathbf{e}_j = \boldsymbol{b} , \tag{5}$$

kde $\mathbf{e}_j$ jsou jednotkové vektory — sloupce s $m - 1$ nulami a jedničkou na j-tém místě:

$$\mathbf{e}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ \dots, \ \mathbf{e}_m = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Výchozím základním řešením soustavy (5) je pak zřejmě

$$\begin{aligned} x_i^{(0)} &= 0 \quad \text{pro } i = 1, 2, \dots, n , \\ x_{n+1}^{(0)} &= b_1 , \\ x_{n+2}^{(0)} &= b_2 , \\ \dots\dots\dots\dots &\quad \text{atd.}, x_{n+m}^{(0)} = b_m . \end{aligned}$$

Souřadnice $\xi_{ij}^{(0)}$ jsou $\xi_{ij}^{(0)} = a_{ij}$.

Avšak $x_{n+1}, \dots x_{n+m}$ jsou pomocné proměnné, které ovšem nesmějí v konečném řešení mít kladnou hodnotu, neboť nemají praktického smyslu. Aby určitě v průběhu řešení proměnné x_{n+j} nabyly nulových hodnot, upravíme funkci $f(\boldsymbol{x})$ na

$$f'(\boldsymbol{x}) = \sum_{i=1}^{n} c_i x_i + \sum_{j=1}^{m} (-M)\, x_{n+j} ,$$

kde za $-M$ zvolíme velmi nízkou hodnotu, např. $-(10^7)$ (nepracuje se však s číselnou hodnotou, ale se symbolem). Pak určitě jakékoli řešení, obsahující některou z pomocných proměnných, bude mít daleko do optimálního.

Vlastnost 5: v jednom z příkladů části II bude příležitost výhodně užít následující vlastnosti, jež naopak umožňuje redukci soustavy — snížení počtu proměnných:

Funkce $f(x_1, \dots, x_{n+s}) = \sum_{i=1}^{n+s} c_i x_i$ nabývá na množině přípustných řešení soustavy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i + \sum_{j=1}^{s} x_{n+j} \boldsymbol{a}_{n+j} = \boldsymbol{b} \tag{6}$$

maxima při stejném $\boldsymbol{x}$, jako na množině přípustných řešení soustavy

$$\sum_{i=1}^{n} x_i \boldsymbol{a}_i = \boldsymbol{b} , \tag{7}$$

jestliže každé $\boldsymbol{a}_{n+j} = \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(j)} \boldsymbol{a}_i$ a $c_{n+j} < \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(j)} c_i$.

Tato skutečnost je téměř zřejmá: budiž $\mathbf{x}$ jakékoli optimální řešení soustavy (7), $\mathfrak{A}$ jemu odpovídající base prostoru sloupců s m prvky, $I = \{i : \mathbf{a}_i \in \mathfrak{A}\}$, ξ_{ij} souřadnice prvku $\mathbf{a}$ v basi $\mathfrak{A}$. Pro jakékoli $j > n$ je

$$c_j - \sum_{i \in J} \xi_{ij} c_i = c_j - \sum_{i \in J} \left(\sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{(j)} \xi_{il}\right) c_i = c_j - \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{(j)} \sum_{i \in J} c_i \xi_{il} .$$

Pro jakékoli $l \leqq n$ je však $\sum_{i \in J} c_i \xi_{il} \geqq c_l$, neboť ξ_{il} jsou souřadnice vektoru $\mathbf{a}_l$ v basi $\mathfrak{A}$, odpovídající optimálnímu řešení, takže $c_l - \sum_{i \in J} c_i \xi_{il} \leqq 0$ pro všechna l. Tudíž

$$c_j - \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{(j)} \sum_{i \in J} c_i \xi_{il} \leqq c_j - \sum_{l=1}^{n} \gamma_l^{(j)} c_l < 0 .$$

Poslední nerovnost plyne z předpokladu $c_j < \sum_{i=1}^{n} \gamma_i^{(j)} c_i$. Podle kriteria optimality tedy vsunutím složky x_j s $j > n$ s nenulovou hodnotou do řešení lze hodnotu f jen *zmenšit*; v konečném řešení budou mít kladnou hodnotu jen x_i s $i \leqq n$. Proměnné, jimž odpovídají sloupce koeficientů, rovné lineárním kombinacím jiných sloupců a ve funkci f koeficienty menší než příslušná lineární kombinace koeficientů, lze tedy vypustit od počátku z řešené soustavy.

1.3 Dopravní problém

Jednou z nejstarších úloh lineárního programování je tzv. dopravní problém. Tato úloha se také stále často vyskytuje v aplikacích. Jeden praktický numerický příklad řešení dopravního problému je uveden v části II. Pro řešení dopravního problému lze simplexovou metodu upravit na zvlášť jednoduchý postup. Příklad v části II bude tímto postupem řešen. V tomto oddíle bude jen provedena úprava simplexové metody pro řešení dopravního problému, v podstatě způsobem navrženým v [4].

V dopravním problému bude výhodné značit proměnné dvěma indexy, i, j, $i = 1, \ldots, m$, $j = 1, \ldots, n$. Dopravní problém spočívá v minimalisaci funkce

$$f(\mathbf{x}) = f(x_{11}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij} x_{ij} \tag{8}$$

na množině nezáporných řešení soustavy

$$\sum_{i=1}^{m} x_{ij} = p_j,\ j = 1, 2, \ldots, n , \tag{9}$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = q_i ,\ i = 1, 2, \ldots, m ,$$

kde p_i a q_j jsou daná čísla, splňující podmínku

$$\sum_{j=1}^{n} p_j = \sum_{i=1}^{m} q_i . \tag{10}$$

Praktický smysl dopravního problému je tento: čísla q_i, $i = 1, 2, \ldots, m$ představují kapacity m zdrojů určitého produktu, čísla p_j spotřebu tohoto produktu v n místech. Číslo x_{ij} značí množství, jímž přispívá i-tý zdroj ke krytí spotřeby j-tého místa spotřeby, a které tedy bude dopravováno z místa i do místa j. Předpokládá se — při zde uvedené jednoduché variantě dopravního problému — že zdroje jsou schopny právě krýt spotřebu, že množství vyrobené za jednotku času je v tomtéž čase spotřebováno. Čísla c_{ij} představují náklady na dopravu jednotky množství produktu ze zdroje i do místa spotřeby j. Řešit dopravní problém znamená tedy stanovit optimální schéma rozvozu, schéma, minimalisující celkové dopravní náklady. Zdánlivě je to jednoduchá úloha, avšak při větším počtu zdrojů i míst spotřeby je bez užití metody lineárního programování prakticky neřešitelné.

Vzhledem k podmínce (10) je v soustavě (9) jedna rovnice přebytečná a lze ji vynechat. Řekněme, že vynecháme poslední rovnici $\sum_{j=1}^{n} x_{mj} = q_m$. Matice koeficientů této soustavy má zvláštní tvar:

$x_{11}x_{12}\dots x_{1n}$	$x_{21}\,x_{22}\dots x_{2n}$	...	$x_{m-1,1}x_{m-1,2},\dots x_{m-1,n}$	$x_{m1}\,x_{m2}\,\dots\,x_{mn}$	pravá strana
1 0 ... 0	1 0 ... 0		1 0 ... 0	1 0 ... 0	p_1
0 1 0... 0	0 1 0.. 0		0 1 0 ... 0	0 1 0... 0	p_2
.....			...	...	...
00 ... 0 1	0 .... 0 1		0 ... 0 1	0 ..... 0 1	p_n
1 1 1	0 1				q_1
0 0	1 1 1				q_2
	0 0	...	0 0		.
			1 1 1		q_{m-1}

Nevyplněná místa zaujímají nuly.

Z tabulky koeficientů je ihned vidět, že sloupec koeficientů při proměnné x_{ij} je složen ze dvou jednotkových vektorů, pod sebe napsaných, jednoho n-rozměrného a jednoho m-1 rozměrného:

$$\boldsymbol{k}_{ij} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_j^{(n)} \\ \mathbf{e}_i^{(m)} \end{pmatrix} \quad \text{pro } j = 1, 2, \dots, n,\ i = 1, 2, \dots, m - 1$$

$$\text{a } \boldsymbol{k}_{mj} = \begin{pmatrix} \mathbf{e}_j^{(n)} \\ \mathbf{O}^{(m)} \end{pmatrix} \quad \text{pro } j - 1, 2, \dots, n\,,$$

kde $\mathbf{e}_j^{(n)}$ je sloupec s n prvky s 1 na j-tém místě a s nulami na všech ostatních, $\mathbf{e}_i^{(m)}$ je sloupec s m-1 prvky, s 1 na i-tém místě a s nulami na všech ostatních, $\mathbf{O}^{(m)}$ je sloupec m-1 nul.

Soustava (9) v tomto značení je

$$\sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} x_{ij}\, \boldsymbol{k}_{ij} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{p}^{(n)} \\ \boldsymbol{q}^{(m)} \end{pmatrix}. \tag{11}$$

Předpokládejme nyní, že problém je nedegenerovaný, tj. že pravou stranu rovnice (11) nelze zapsat jako lineární kombinaci menšího počtu sloupců $\boldsymbol{k}_{ij}$ než $m + n - 1$, což je počet lineárně nezávislých rovnic (pravou stranu nelze lineárně vyjádřit menším počtem sloupců $\boldsymbol{k}_{ij}$ než $m + n - 1$), takže každé základní řešení rovnice (9) má právě $m + n - 1$ *kladných* prvků x_{ij}.

Vyjdeme od jakéhokoli základního řešení $\boldsymbol{x}^{(0)} \doteq \{x_{11}^{(0)}, \ldots, x_{mn}^{(0)}\}$. Systém $K^{(0)} = \{\boldsymbol{k}_{ij} : x_{ij}^{(0)} > 0\}$ tvoří basi; označme

$$I^{(0)} = \{i : \boldsymbol{k}_{ij} \in K^{(0)}\} .$$

Vzhledem k povaze sloupců $\boldsymbol{k}_{ij}$ musí se každé $i \leqq m$ vyskytovat ve spojení s některými j jako první index u některého prvku base $K^{(0)}$ a každé $j \leqq n$ ve spojení s některými i jako druhý index některého prvku base $K^{(0)}$. Jinými slovy: ke každému i existuje j takové, že $\boldsymbol{k}_{ij} \in K^{(0)}$ a ke každému j existuje i tak, že $\boldsymbol{k}_{ij} \in K^{(0)}$. Kdyby totiž tomu tak nebylo a např. $i = 1$ by se nevyskytovalo jako první index u některého prvku systému $K^{(0)}$, byl by systém $K^{(0)}$ složen ze samých sloupců s nulami na prvním místě a nemohl by tedy být basí, neboť žádný sloupec s prvním prvkem nenulovým by nemohl být vyjádřen pomocí sloupců systému $K^{(0)}$.

Najdeme nyní vyjádření libovolného sloupce $\boldsymbol{k}_{ij}$ pomocí sloupců z $K^{(0)}$. Ve sloupci $\boldsymbol{k}_{ij}$ musí být na j-tém a $(n + i)$-tém místě 1, jinak nuly. V $K^{(0)}$ určitě je sloupec s prvním indexem i, rekněme $\boldsymbol{k}_{il_1}$ a sloupec s druhým indexem j, řekněme $\boldsymbol{k}_{h_1j}$. Součtem těchto dvou sloupců vznikne sloupec $\boldsymbol{k}_{il_1} + \boldsymbol{k}_{h_1j}$, který má 1 na místě j-tém, l_1-tém, $(n + h_1)$-tém a $(n + i)$-tém. Abychom dostali $\boldsymbol{k}_{ij}$, musíme odečíst sloupec s 1 na l_1-tém a $(n + h_1)$-tém místě, tj. $\boldsymbol{k}_{h_1l_1}$. Je-li $\boldsymbol{k}_{h_1l_1} \in$ $\varepsilon\, K^{(0)}$, je tím vyjádření hotovo:

$$\boldsymbol{k}_{ij} = \boldsymbol{k}_{il_1} + \boldsymbol{k}_{h_1j} - \boldsymbol{k}_{h_1l_1} .$$

Jestliže $\boldsymbol{k}_{h_1l_1}$ *není* prvkem $K^{(0)}$, pak určitě jsou v $K^{(0)}$ prvky $\boldsymbol{k}_{h_1l_2}$, $\boldsymbol{k}_{h_2l_1}$; jestliže je v $K^{(0)}$ i $\boldsymbol{k}_{h_2l_2}$, je vyjádření

$$\boldsymbol{k}_{ij} = \boldsymbol{k}_{il_1} + \boldsymbol{k}_{h_1j} - \boldsymbol{k}_{h_1l_2} - \boldsymbol{k}_{h_2l_1} + \boldsymbol{k}_{h_2l_2} .$$

Jestliže $\boldsymbol{k}_{h_2l_2}$ není v $K^{(0)}$, opakuje se postup. Vyjádření může užít nejvýše $m + n - 1$ prvků.

Z těchto vyjádření je vidět, že souřadnice ξ_{ij}^{pq} sloupců $\boldsymbol{k}_{ij}$ v libovolné basi, sestavené z $\boldsymbol{k}_{ij}$, jsou rovny jen -1, nebo 0, nebo $+1$. Dosadíme-li tyto souřadnice do kriteria pro *minimalisaci* funkce $f(x_{11}, \ldots, x_{mn}) = \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} c_{ij}x_{ij}$, dostaneme: Jestliže prvek $x_{ij}^{(0)}$ v řešení $\boldsymbol{x}^{(0)}$ má hodnotu 0, pak znamením, že hodnotu $f(\boldsymbol{x}^{(0)})$ lze *snížit* přiřazením *kladné* hodnoty prvku $x_{ij}^{(0)}$ je splnění následujících nerovností: v případě, že $\boldsymbol{k}_{ij}$ je vyjádřen pomocí tří sloupců, $\boldsymbol{k}_{il_1}$, $\boldsymbol{k}_{h_1j}$, $\boldsymbol{k}_{h_1l_1}$

$$c_{ij} - c_{il_1} + c_{h_1l_1} - c_{h_1j} < 0 \tag{12}$$

v případě, že $\boldsymbol{k}_{ij}$ je vyjádřen pomocí pěti sloupců

$$c_{ij} - c_{il_1} + c_{h_2l_1} - c_{h_2l_2} + c_{h_1l_2} - c_{h_1j} < 0 , \tag{13}$$

atd.

Jestliže všem nulovým prvkům v $\boldsymbol{x}^{(0)}$ odpovídají nezáporné rozdíly typu (12), (13), atd., pak řešení $\boldsymbol{x}^{(0)}$ již je optimální (tj. minimalisuje $f(\boldsymbol{x})$).

O tom, zda dané řešení je optimální, či ne, se tedy rozhoduje podle výrazů typu (12), (13), atd. Je žádoucí mít nějaké pravidlo pro tvoření takových rozdílů. A v případě nedegenerovaného dopravního problému je toto pravidlo zcela jednoduché.

Výchozí řešení se sestaví do tabulky, jejíž řádky (v počtu m) odpovídají zdrojům, sloupce (v počtu n) místům spotřeby. Na průsečíku i-tého řádku a j-tého sloupce stojí $x_{ij}^{(0)}$ — velikost dodávky ze zdroje i do místa j ve výchozím řešení. Ve stejné tabulce se vyznačí dopravní náklady c_{ij} — cena dopravy jednotkového množství z místa i do místa j. V této tabulce se nějak označí pole (i, j), na nichž v tab. řešení stojí *kladné* číslo. A připomeneme si: stojí-li na poli (i, j) *kladné* číslo, sloupec $\mathbf{k}_{ij}$ je v basi $K^{(0)}$. Dále: pole (i, j) a (i, l_1) jsou v tomtéž řádku, (i, j) a (h_1, j) v tomtéž sloupci tabulky, zrovna tak (h_1, j) a (h_1, l_1), atd. Odtud plyne: sloupec $\mathbf{k}_{ij}$ je vyjádřen pomocí tří sloupců $\mathbf{k}_{h_1 j}$, $\mathbf{k}_{h_1 l_1}$, $\mathbf{k}_{i l_1}$, jestliže na odpovídajících polích stojí kladné prvky, jestliže lze z pole (i, j), obsazené nulou, obejít obdélník, jehož vrcholy jsou pole (i, l_1), (h_1, j), $(h_1 l_1)$, obsazená kladnými čísly

$$\begin{array}{lccccc}
 & & \text{sl. j} & & \text{sl. } \mathrm{l}_1 \\
\text{řádek } i & \text{———} & x_{ij} = 0 & \text{—————} & x_{il_1} > 0 \\
 & & | & & | \\
\text{řádek } h_1 & & x_{h_1 j} > 0 & \text{—————} & x_{h_1 l_1} > 0
\end{array}$$

Neexistuje-li takový obdélník, je nutno hledat složitější cestu s kladnými čísly x_{ij} ve vrcholech, např.:

$$\begin{array}{ccccc}
x_{ij} = 0 & \text{————} & x_{il_1} > 0 & & \\
| & & | & & \\
| & & x_{h_2 l_1} > 0 & \text{———} & x_{h_2 l_2} > 0 \\
| & & & & | \\
x_{h1j} > 0 & \text{————} & \text{————} & \text{————} & x_{h_1 l_2} > 0
\end{array}$$

A pro kriterium optimálnosti se berou hodnoty dopravních nákladů c_{ij} z vrcholů takové cesty se střídavými znaménky. Tento způsob řešení nalezl jako první Nožička [5], avšak zcela jinou cestou, geometricky, bez užití simplexové metody.

Kde se dopravní problém řeší často, zejména kde se vyskytují problémy s velkým počtem zdrojů a míst spotřeby, je výhodné postup ještě více zmechanisovat. V příkladě dopravního problému v následující části bude popsána výpočetní technika pro uvedený postup, které se užívá ve VÚTE CHP.

Když je problém degenerovaný, může se stát, že po některém kroku bude mít řešení méně než $m + n - 1$ kladných složek, to znamená, že systém sloupců $\mathbf{k}_{ij}$, jimž odpovídají kladné složky, již není basí $(m + n - 1)$ — rozměrného prostoru. V takovém případě by nebylo možno utvořit potřebná kriteria typu (12) nebo (13) — některá pole tabulky řešení by nebylo možno spojit v pravoúhelníkový obrazec s poli, obsazenými kladnými čísly. V takových případech lze postupovat různými způsoby. Jeden z nich spočívá v tom, že se systém sloupců k_{ij}, jimž odpovídají kladné prvky řešení x_{ij}, doplní některými dalšími sloupci tak, aby výsledný systém tvořil basi $(m + n - 1)$ — rozměrného prostoru. Prakticky to znamená: v tabulce řešení se vyznačí potřebná pole, obsazená nulami, jichž lze užít jako vrcholů v uvedených cestách. To znamená, že čísel c_{ij}, jim odpovídajících, lze užít v kriteriích typu (12), (13). Jedno pravidlo pro vyhledání polí, kterými lze systém doplnit, uvádí např. Habr v [6].

Výchozí řešení $\mathbf{x}^{(0)}$, které se pak postupně zlepšuje, se může vyhledat např. tzv. indexovou metodou, která bude rovněž popsána v části II.

(*Dokončení.*)

Literatura

(Citovaná díla jsou uvedena v tom pořadí, v jakém se vyskytují v článku.)

[1] A. Charnes, W. Cooper, A. Henderson, *An Introduction to Linear Programming*, New York 1953.

[2] I. M. Gelfand, *Lineární algebra*, Praha 1953.

[3] A. Charnes, *Optimality and Degeneracy in Linear Programming*, Econometrica 20 (1952).

[4] J. Machek, *A Note on the Solution of the Transportation Problem by the Simplex Method*, Časopis pro pěstování matematiky.

[5] F. Nožička, *O jednom minimálním problému v theorii lineárního programování*, Aplikace matematiky, 1957.

[6] J. Habr, *Lineární programování*, Praha 1959.

AFINITY V TŘÍROZMĚRNÉM AFINNÍM PROSTORU

DALIBOR KLUCKÝ, *VŠP* Praha

1. Vektorový a afinní prostor

Moderní analytická geometrie lineárních útvarů si vytvořila mohutný aparát ve vektorové algebře, který umožňuje definovat a vyšetřovat vlastnosti těchto útvarů nezávisle na volbě soustavy souřadnic. Dokladem toho je např. kniha akademika E. Čecha: „Základy analytické geometrie", zejména její 1. díl, kde jsou pomocí vektorové algebry definovány nejen základní pojmy afinní geometrie (jako pojem rovnoběžnosti, uspořádání, afinního zobrazení a podobně), nýbrž i pojmy geometrie metrické (kolmost, velikost úhlu, goniometrické funkce atd.)[1])

Tento článek má být ukázkou, jak lze podrobněji studovat vlastnosti afinního zobrazení v trojrozměrném afinním prostoru metodou vektorové algebry. V rámci tohoto článku použijeme všech vlastností vektorového a afinního prostoru potřebných k sledování dalšího textu. Jde však o vlastnosti známé jistě každému čtenáři, který se zajímá o moderní analytickou geometrii případně o algebru. Poučení o vektorovém prostoru najde čtenář např. v již zmíněné knize akademika Čecha „Základy analytické geometrie", dále ve knihách Gelfand: „Lineární algebra"[2]) (užívá místo názvu „vektorový pro-

---

[1]) Eduard Čech, *Základy analytické geometrie I*; vyd. Přírodovědecké nakladatelství, Praha 1951.

[2]) I. M. Gelfand, *Lineární algebra*, přeložil RNDr. Miroslav Fiedler; vyd. Nakladatelství ČSAV, Praha 1953.