K. Bláha; Josef Machek

Lineární programování. II

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 2, 129--147

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137049

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK V — ČÍSLO 2

MATEMATIKA

LINEÁRNÍ PROGRAMOVÁNÍ — II. ČÁST*)

Příklady řešení některých úloh

KAREL BLÁHA, JOSEF MACHEK

2.1. Úvod

V prvé části této práce jsme se zabývali teoretickou podstatou řešení otázek lineárního programování. Stejně důležitou otázkou, která vyžaduje dosti důkladného studia, je způsob uspořádání výpočtů při řešení konkrétních úloh. V této části je na příkladech předváděna formulace úloh a výpočetní postupy (algoritmy) pro modely, odvozené teoreticky v předcházející části práce.

Formulaci úlohy a techniku řešení pomocí simplexové metody uvedeme v odstavci 2.2 na příkladě maximalisace pevnosti.

V odstavci 2.3 bude popsán konkrétní příklad z výroby papíru a na něm předvedena možnost zjednodušování původně velmi rozsáhlého problému na úlohu, řešitelnou běžnými technickými prostředky.

V odstavci 2.4 bude popsáno získání výchozího řešení pro dopravní problém.

V odstavci 2.5 uvedeme algoritmus na řešení dopravního problému, který se používá v praxi VÚTE CHP.

2.2. Formulace úlohy a technika řešení pomocí simplexové metody

Pro ilustraci užití simplexové metody a na ukázku formulace úlohy a sestavení rovnic uvedeme příklad s menším počtem proměnných, který by vzhledem k tomuto malému rozsahu snad byl řešitelný i jinak. Jde o úlohu stanovení optimální technologie — optimální nastavení spřádacího stroje na umělé vlákno na základě předchozího odzkoušení jednoho úseku technologie. Tento úsek technologie je charakterisován třemi proměnnými veličinami, které označíme x_1, x_2, a x_3. Pro kvalitu vlákna mají rozhodující význam dvě vlastnosti: pevnost, kterou označíme y a tažnost, kterou označíme u. Pevnost y i tažnost u jsou závislé na technologických ukazatelích x_1, x_2, x_3. Úkolem bylo stanovit takové hodnoty x_1, x_2, x_3, při kterých je pevnost y maximální a tažnost u se pohybuje v daných mezích, $9 \leqq u \leqq 13$. Různé jiné okolnosti ve výrobě ukládají přitom na proměnné x_1, x_2, x_3 omezení

$$1 \leqq x_1 \leqq 3\,, \quad 2 \leqq x_2 \leqq 5\,, \quad 0 \leqq x_3 \leqq 4\,.$$

Nejprve byly provedeny pokusy s různými technologickými ukazateli, jejichž výsledky byly rozebrány metodami matematické statistiky. Tímto předběžným průzkumem se dosáhlo určitého zmenšení celé experimentální oblasti (bylo přibližně lokalisováno maximum), a zjištěno, že v daném rozmezí pro-

*) I. část v předcházejícím čísle.

měnných x_1, x_2, x_3 závisí pevnost i tažnost na x_1, x_2, x_3 skoro přesně lineárně a to

$$\begin{aligned} y &= 3{,}70 + 0{,}106x_1 - 0{,}083x_2 - 0{,}0121x_3 \,, \\ u &= 7{,}958 - 0{,}258x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}291x_3 \,. \end{aligned}$$

Koeficienty v těchto rovnicích byly stanoveny velkým počtem zkoušek, takže s nimi lze počítat jako s pevnými čísly; není třeba brát ohled na to, že jsou to vlastně experimentální data.

Úloha tedy zní: maximalisovat lineární funkci

$$y(x_1, x_2, x_3) = 3{,}70 + 0{,}106x_1 - 0{,}083x_2 - 0{,}0121x_3$$

za vedlejších podmínek

$$\begin{aligned} &9 \leqq 7{,}958 - 0{,}258x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}291x_3 \leqq 13 \,, \\ &1 \leqq x_1 \leqq 3 \,, \\ &2 \leqq x_2 \leqq 5 \,, \\ &0 \leqq x_3 \leqq 4 \,. \end{aligned}$$

Zřejmě lze úlohu upravit jinak: maximalisovat

$$y' = 0{,}106x_1 - 0{,}083x_2 - 0{,}0121x_3$$

(neboť y' nabývá maxima v témž bodě x_1, x_2, x_3, jako y) za podmínky

$$1{,}042 \leqq u' = -0{,}258x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}291x_3 \leqq 5{,}042 \tag{a}$$

(nerovnost upravena odečtením konstatního členu) a dalších tří výše uvedených nerovností.

Nyní přepíšeme podmínky vyjádřené nerovnostmi, jako rovnice: podmínka (a) je rovnocenná s podmínkou

$$-0{,}258x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}291x_3 + x_4 = 5{,}042 \,,$$

kde x_4 je nově zavedená proměnná, značící rozdíl mezi pravou stranou nerovnosti a hodnotou funkce $u'(x_1, x_2, x_3)$; aby nerovnost byla splněna, musí být $x_4 \geqq 0$. Aby byla splněna též druhá nerovnost pro u', musí být $x_4 \leqq 4$, (neboť jinak by bylo $-0{,}258x_1 + 0{,}55x_2 + 0{,}291x_3 < 1{,}042$, což se nepřipouští); tuto podmínku zapíšeme jako $x_4 + x_5 = 4$, kde x_5 je nová pomocná proměnná s nezápornou hodnotou, $x_5 \geqq 0$.

Podobně podmínku $x_1 \leqq 3$ přepíšeme jako $x_1 + x_6 = 3$, kde $x_6 \geqq 0$, podmínku $x_3 \leqq 4$ jako $x_3 + x_8 = 4$, kde $x_8 \geqq 0$.

Opačné nerovnosti — jako výše — vyjádříme pomocí rovnic pro pomocné proměnné x_6, x_7, x_8; musí být

$$\begin{aligned} x_6 + x_9 &= 2, \quad \text{kde} \quad x_9 \geqq 0 \,, \\ x_7 + x_{10} &= 3 \,, \quad \text{kde} \quad x_{10} \geqq 0 \,, \end{aligned}$$

(jinak by totiž mohlo být např. $x_1 < 1$).

Vedlejší podmínky jsou tedy vyjádřeny systémem

$$* \begin{cases} -0{,}258x_1 + 0{,}550x_2 + 0{,}291x_3 + x_4 + x_{11} = 5{,}042 \,, \\ x_4 + x_5 = 4 \,, \\ x_1 + x_6 + x_{12} = 3 \,, \\ x_2 + x_7 + x_{13} = 5 \,, \\ x_3 + x_8 = 4 \,, \\ x_6 + x_9 = 2 \,, \\ x_7 + x_{10} = 3 \,. \end{cases}$$

Tento systém byl rozšířen podle poznámky v části I o pomocné proměnné x_{11}, x_{12}, x_{13}. U těchto proměnných jsou sloupce koeficientů jednotkové vektory, proto, abychom snadno našli základní řešení.

Ještě je třeba upravit příslušným způsobem maximalisovanou funkci y; aby rovněž zahrnovala všechny proměnné až do x_{13}. Proměnné $x_4, x_5, x_6, \ldots x_{10}$ mají v řešení reálný význam — ukazují, oč se navzájem liší jednotlivé strany nerovnosti — v řešení se mohou vyskytnout, nesmějí však ovlivnit hodnotu y'. Proto jim v maximalisované funkci přiřadíme koeficient 0, naproti tomu x_{11}, x_{12}, x_{13} jsou umělé proměnné, které nemají reálný význam, v řešení musí mít hodnotu 0, proto jim v maximalisované funkci přiřadíme koeficienty $-M$, kde M je velmi vysoké číslo, představme si třeba 10^6 (viz poznámku v I).

Maximalisujeme tedy

$$f(x_1, x_2, \ldots, x_{13}) = \sum_{i=1}^{13} c_i x_i\,,$$

kde $c_1 = 0{,}106$, $c_2 = -0{,}083$, $c_3 = -0{,}0121$, $c_4 = c_5 = \ldots = c_{10} = 0$, $c_{11} = c_{12} = c_{13} = -M$.

Výchozí základní řešení soustavy (*) dostaneme velmi snadno vzhledem k tomu, že máme mezi sloupci koeficientů zastoupeny všechny jednotkové vektory; stačí položit

$$x_5^{(0)} = 4,\ x_8^{(0)} = 4,\ x_9^{(0)} = 2,\ x_{10}^{(0)} = 3,\ x_{11}^{(0)} = 5{,}042,\ x_{12}^{(0)} = 3,\ x_{13}^{(0)} = 5.$$

Basi $\mathfrak{A}^{(0)} = \{a_i : x^{(0)}_i > 0\}$ 7- rozměrného prostoru tvoří vektory (jednotkové) $a_5, a_8, a_9, a_{10}, a_{11}, a_{12}, a_{13}$. Proto lze velmi jednoduše stanovit i tabulku souřadnic $\xi_{ij}^{(0)}$ vektoru a_j v basi $\mathfrak{A}^{(0)}$; $\xi_{ij}^{(0)} = a_{ij}$. Řešení je zvykem provádět tabelárně. Sestavíme tedy $\xi_{ij}^{(0)}$ do tabulky, ve které budou uvedeny i jiné údaje, důležité pro řešení. Hlavička tabulky poskytuje dosti přesný popis obsahu tabulky (tab. 1).

Prvky base 7-rozměrného prostoru $\mathfrak{A}^{(0)}$ jsou trochu přeházeny, nenásledují po sobě v pořadí rostoucích indexů proto, aby tab. 1 bylo možno sestavit prostým opsáním koeficientů soustavy (*). Z tabulky hned vidíme např., že

$$a_2 = 0{,}55a_{11} + 1a_{13} = 0{,}55\begin{bmatrix}1\\0\\0\\0\\0\\0\\0\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}0\\0\\0\\1\\0\\0\\0\end{bmatrix}, \quad \text{atd.}$$

Poslední dva řádky tabulky obsahují už výpočty pro aplikaci kriteria optimálnosti z části I. Je vidět, že kladnou hodnotu mají všechny rozdíly $c_j - \sum_{i \in J^{(0)}} c_i \xi_{ij}^{(0)}$ pro $j = 1, 2, 3, 4, 6, 7$, takže $f(x_1, \ldots x_{13})$ lze zvětšit přiřazením kladné hodnoty kterékoli z proměnných $x_1^{(0)}, x_2^{(0)}, x_3^{(0)}, x_4^{(0)}, x_6^{(0)}, x_7^{(0)}$. Největší kladný rozdíl však je ve sloupci 2. Přiřadíme tedy v novém řešení proměnné $x_2^{(1)}$ maximální přípustnou kladnou hodnotu

$$x_2^{(1)} = \min_{i : \xi_{ik}^{(0)} > 0} \frac{x_i^{(0)}}{\xi_{ik}^{(0)}}\,,$$

což je (z tabulky) menší z čísel $\dfrac{5{,}042}{0{,}55}$ a $\dfrac{5}{1}$, tedy zřejmě 5. V nové basi $\mathfrak{A}^{(1)}$ nahradíme tedy vektor a_{13} vektorem a_2. Souřadnice vektorů a_j v nové basi sestavíme opět do tabulky (tab. 2).

Tabulka 1

Sloupce koeficientů soustavy (*)

Vektory base $\mathfrak{A}^{(0)}$ $\boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}^{(0)}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{a}_8$	$\boldsymbol{a}_9$	$\boldsymbol{a}_{10}$	$\boldsymbol{a}_{11}$	$\boldsymbol{a}_{12}$	$\boldsymbol{a}_{13}$	koef. funkce c_i	$x^{(0)}{}_i$
c_j	0,106	$-0{,}083$	$-0{,}0121$	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$		
$\boldsymbol{a}_{11}$	$-0{,}258$	0,55	0,291	1							1			$-M$	5,042
$\boldsymbol{a}_5$				1	1									0	4
$\boldsymbol{a}_{12}$	*1*					1						1		$-M$	3
$\boldsymbol{a}_{13}$		$\boxed{1}$					1						1	$-M$	5
$\boldsymbol{a}_8$			1					1						0	4
$\boldsymbol{a}_9$						1			1					0	2
$\boldsymbol{a}_{10}$							1			1				0	3
$\Sigma c_i \xi_{ij}{}^{(0)}$	$0{,}258M-M$	$-0{,}55M-M$	$-0{,}291M$	$-M$	0	M	M	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$		
$c_j - \Sigma \xi_{ij}^{(0)} c_i$	$0{,}106$ $-0{,}258M$ $+M$	$-0{,}083$ $+0{,}55M$ $+M$	$-0{,}0121$ $+0{,}291M$	M	0	M	M	0	0	0	0	0	0		

Tabulka 2

Vektory base $\mathfrak{A}^{(1)}$

$\boldsymbol{a}_i \in \mathfrak{A}^{(1)}$	$\boldsymbol{a}_1$	$\boldsymbol{a}_2$	$\boldsymbol{a}_3$	$\boldsymbol{a}_4$	$\boldsymbol{a}_5$	$\boldsymbol{a}_6$	$\boldsymbol{a}_7$	$\boldsymbol{a}_8$	$\boldsymbol{a}_9$	$\boldsymbol{a}_{10}$	$\boldsymbol{a}_{11}$	$\boldsymbol{a}_{12}$	$\boldsymbol{a}_{13}$	koef. funkce c_i	$x^{(1)}{}_i$
c_j	0,106	—0,083	—0,0121	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$		
$\boldsymbol{a}_{11}$	—0,258		0,291	$\boxed{1}$			—0,55			1	1			$-M$	2,292
$\boldsymbol{a}_5$				1	1									0	4
$\boldsymbol{a}_{12}$	*1*					1								$-M$	3
$\boldsymbol{a}_2$		1					1					1	1	—0,083	5
$\boldsymbol{a}_8$			1					1						0	4
$\boldsymbol{a}_9$						1			1					0	2
$\boldsymbol{a}_{10}$							1							0	3
$\Sigma c_i \xi^{(1)}{}_{ij}$	$0{,}258M-M$	—0,083	$-0{,}291M$	$-M$	0	$-M$	$0{,}55M$ —0,083	0	0	0	$-M$	$-M$	—0,083		
$c_j - \Sigma c_i \overset{(1)}{\xi}_{ij}$	0,106 $-0{,}258M$ $+M$	0	—0,0121 $+0{,}291M$	M	0	M	$-0{,}55M$ +0,083	0	0	0	0	0	$-M$ +0,083		

Souřadnice $\xi_{ij}^{(1)}$ vyplníme postupně užitím formulí (4) z I. Výpočet je mechanický a postupuje po řádcích nebo po sloupcích; nejprve počítáme „nový řádek" $\xi_{kj}^{(1)} = \xi_{2j}^{(1)} = \frac{\xi_{rj}^{(0)}}{\xi_{rk}^{(0)}} = \frac{\xi_{13j}^{(0)}}{\xi_{13,2}^{(0)}}$, tj. v našem případě vpíšeme do řádku odpovídajícího a_2 (tj. do čtvrtého) souřadnice z řádku odpovídajícího a_{13} v tab. 1. Pak zaplníme ostatní řádky podle první z formulí (4) části I., např.

$$\underset{\text{z tab. 1}}{\xi_{1,1}^{(1)} = -0,258} \quad \underset{\text{z tab. 1}}{-0,55} \, . \underset{\text{nový prvek z tabulky 2.}}{0} \quad \text{atd.}$$

Poslední sloupec — řešení — podle týchž pravidel.

V posledním řádku tab. 2 čteme opět hodnoty kriteria optimálnosti. Přiřadíme dále maximální přípustnou hodnotu proměnné x_4, nahradíme v basi vektor a_{11} vektorem a_4 a výpočet se opakuje s takto vzniklou novou basí $\mathfrak{A}^{(2)}$. Po několikerém opakování postupu dospějeme k tabulce 3, ve které vidíme samé nekladné rozdíly takže kriterium optimality ukazuje, že řešení v pravém sloupci je optimální (tab. 3).

Jiné optimální řešení bychom mohli dostat zavedením např. proměnné x_7 s kladnou hodnotou do řešení, neboť tím by se hodnota f nezměnila (je totiž $c_7 - \sum c_i \xi_{i7} = 0$), takže přírůstek funkce f při přechodu k řešení s kladným x_7 je nulový podle důkazu kriteria optimality I.).

Řešením úlohy je

$$\begin{aligned} x_4 &= 4,260\,, & x_8 &= 1,85\,, \\ x_7 &= 2,401\,, & x_9 &= 2\,, \\ x_1 &= 3\,, & x_3 &= 2,15\,. \\ x_2 &= 2\,, \end{aligned}$$

Jestliže tedy nastavíme technologické ukazatele $x_1 = 3$, $x_2 = 2$, $x_3 = 2,15$, dostáváme maximální pevnost $y = 3,70 + 0,106 \,.\, 3 - 0,083 \,.\, 2 - 0,0121 \,.\, 2,15 = 3,806$, k níž přísluší tažnost $u = 9,758 - 0,258 \,.\, 3 + 0,55 \,.\, 2 + 0,291 \,.\, 2,15 = 8,91$.

2.3. Minimalisace odpadu při řezání tamborů rotačního papíru

Každý papírenský stroj vyrábí role (tambory) papíru, které jsou vždy širší než vyžaduje zákazník. Tak např. šíře rolí může být 250 cm, zákazník však vyžaduje kotouč o šíři 50 cm, 64 cm, 96 cm atd. Proto se role ještě v papírně převíjejí a při převíjení se rozřezávají na kotouče požadovaných šíří.

Pro papírnu je plánem dán požadavek vyrobit

$$\begin{aligned} &k_1 \text{ kotoučů šíře } r_1\,, \\ &k_2 \text{ kotoučů šíře } r_2\,, \\ &\vdots \\ &k_m \text{ kotoučů šíře } r_m\,. \end{aligned}$$

Je pochopitelné, že se téměř nikdy nepodaří nalézt takovou sestavu kotoučů, aby role byla stoprocentně využita. Pokud taková sestava existuje, je složena pouze z několika šíří a její trvalé nastavení by vedlo k tomu, že by se vyráběly některé šíře ve větším množství než je plánováno a některé šíře v menším množství než stanoví plán, nebo by se nevyráběly vůbec. Důsledkem toho by

Tabulka 3

Vektory base $\mathfrak{A}^{(5)}$

$\mathbf{a}_i \in \mathfrak{A}^{(5)}$	$\mathbf{a}_1$	$\mathbf{a}_2$	$\mathbf{a}_3$	$\mathbf{a}_4$	$\mathbf{a}_5$	$\mathbf{a}_6$	$\mathbf{a}_7$	$\mathbf{a}_8$	$\mathbf{a}_9$	$\mathbf{a}_{10}$	$\mathbf{a}_{11}$	$\mathbf{a}_{12}$	$\mathbf{a}_{13}$	koef. fce c_i	$x_i^{(5)}$
c_j	0,106	−0,083	−0,0121	0	0	0	0	0	0	0	$-M$	$-M$	$-M$		
$\mathbf{a}_4$				1	1						1			0	4,260
$\mathbf{a}_7$							0,55			1				0	2,401
$\mathbf{a}_1$	1					1						1		0,106	3
$\mathbf{a}_2$		1								−1			1	−0,083	2
$\mathbf{a}_8$					3,61	−0,86		1		−1,88				0	1,85
$\mathbf{a}_9$						1			1					0	2
$\mathbf{a}_3$			0,529		−3,61	0,86				1,88				−0,0121	2,15
$\Sigma c_i \xi^{(5)}_{ij}$	0,106	−0,083	−0,0064	0	0,0436	0,016 −0,010	0	0	0	−0,022 +0,083	0	0,106	−0,083		
$c_j - \Sigma c_i \xi^{(5)}_{ij}$	0	0	<0	0	<0	<0	0	0	0	<0	<0	<0	<0		

byly nesplněné požadavky zákazníků. Je proto nutné při rozřezávání tamborů připustit určitý okrajový odpad a snahou je, aby tento odpad byl co nejmenší. Schematické uspořádání podkladů je uvedeno v tab. 4. Jsou uvedeny koeficienty c_{ij}, nabývající hodnot 0, 1, 2, 3, ..., pomocí nichž se vytvoří sestava, která se při převíjení zpracovává. Koeficienty c_{ij} se stanoví tak, aby bylo

$$c_{1j}r_1 + c_{2j}r_2 + \ldots + c_{mj}r_m + p_j = \mathrm{R}\,, \quad (j = 1, 2 \ldots n)\,,$$

kde $r_1, r_2, \ldots, r_m$ jsou jednotlivé šíře, R šíře tamboru, p_j okrajový odřez (odpad) a n počet různých sestav, které je možno na řezačce nastavit.

Tabulka 4

Schematické uspořádání podkladů na řešení minimalisace odpadu

Šíře \ Sestava	S_1	S_2	$\ldots$	S_j	$\ldots$	S_n	Vyrobit kotoučů
r_1	c_{11}	c_{12}	$\ldots$	c_{1j}	$\ldots$	c_{1n}	k_1
r_2	c_{21}	c_{22}	$\ldots$	c_{2j}	$\ldots$	c_{2n}	k_2
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$		$\vdots$		$\vdots$	$\vdots$
r_m	c_{m1}	c_{m2}	$\ldots$	c_{mj}	$\ldots$	c_{mn}	k_m
Odpad	p_1	p_2	$\ldots$	p_j	$\ldots$	p_n	
Počet zapojení	x_1	x_2	$\ldots$	x_j	$\ldots$	x_n	

Označme x_j počet zapojení j-té sestavy do řešení. x_j může být zřejmě 0 nebo celé kladné číslo. Úkolem je nyní minimalisovat lineární formu $L = \sum_{j=1}^{n} p_j x_j$ za platnosti podmínek:

$$c_{i1}x_1 + c_{i2}x_2 + \ldots + c_{ij}x_j + \ldots + c_{in}x_n = k_i\,, \quad (i = 1, 2, \ldots, m)\,.$$

Uvědomme si, že množství papíru, jež se má podle plánu vyrobit, je konstantní, ať má funkce L jakoukoli hodnotu. Postup řešení bude týž, i když utvoříme nějakou funkci

$$f(\mathbf{x}) = K + \sum_{j=1}^{n} p_j x_j\,,$$

kde K je konstanta. Celkové množství papíru, jež se má podle plánu vyrobit, je konstantní a můžeme je zřejmě vyjádřit vztahem

$$K = \sum_{j=1}^{n} (R - p_j)\, x_j\,.$$

Cenovou funkci lze tedy psát $f'(\mathbf{x}) = R \sum_{j=1}^{n} x_j$. Také konstantu R lze pro účely minimalisace vynechat, takže dostáváme

$$f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{n} x_j\,.$$

Úloha nalezení minimálního odpadu je tedy identická s úlohou nalezení nejmenšího počtu zpracovaných tamborů. Minimalisace funkce f je však prakticky výhodnější, neboť při řešení simplexovou metodou odpadne manipulace s čísly p_j.

Uvažujme nyní konkrétní případ, kdy role měří 392,5 cm a je dán požadavek vyrobit

183 kotoučů šíře 43 cm,
218 kotoučů šíře 63 cm,
329 kotoučů šíře 86 cm,
31 kotoučů šíře 128 cm,
201 kotoučů šíře 129 cm,
365 kotoučů šíře 172 cm.

V tab. 5 jsou uvedeny některé sestavy, s jejichž pomocí by bylo možno uvedený program splnit.

Tabulka 5

Některé sestavy pro řešení úlohy minimalisace odpadu

Šíře \ Sestava	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_7	S_8	...	S_{72}	S_{73}	S_{74}	S_{75}
43	9	—	—	—	—	—	7	6	...	1	1	1	1
63	—	6	—	—	—	—	1	2	...	2	1	1	—
86	—	—	4	—	—	—	—	—	...	1	1	—	1
128	—	—	—	3	—	—	—	—	...	—	—	1	1
129	—	—	—	—	3	—	—	—	...	1	—	1	1
172	—	—	—	—	—	2	—	—	...	—	1	—	—
Odpad	5,5	14,5	48,5	8,5	5,5	48,5	28,5	8,5	...	8,5	28,5	29,5	6,5

Sestav pro řešení, které padají v úvahu, je celkem 75. Již pro nalezení minima při tomto malém problému (v praxi bývá počet šíří mnohem vyšší) by bylo nutno řešit poměrně velmi rozsáhlou tabulku (6 × 75). Mezi sestavami se ovšem vyskytuje celá řada takových, jimž přísluší velký odpad (k splnění programu se používá příliš velkého počtu rolí). Vzniká tedy myšlenka, že takové „nevýhodné" sestavy se patrně nevyskytnou v konečném řešení a že je možno je vyloučit již předem. Ve skupině sestav, s níž bude prováděna minimalisace, musí ovšem bezpodmínečně zůstat base — v našem případě ji můžeme vytvořit pomocí sestav, v nichž se řeže pouze jediná šíře (viz S_1 až S_6). Z ostatních sestav ponecháme ve skupině sestav pro řešení pouze ty, které dávají určitou záruku, že budou obsaženy v konečném řešení. Z vlastnosti 5, uvedené v odstavci 1.2, vyplývá, že vyloučením takových proměnných, jimž odpovídají sloupce koeficientů rovné lineárním kombinacím jiných sloupců a ve funkci f koeficienty větší nebo rovné než příslušná lineární kombinace koeficientů, se nezmění výsledek řešení.

Ze skupiny sestav pro řešení je tedy možno bez změny výsledku minimalisace vyloučit např. sestavu S_7, neboť koeficienty tohoto sloupce lze vyjádřit pomocí lineární kombinace koeficientů sloupců S_1 a S_2, tedy

$$\begin{array}{c} S_7 \\ \begin{bmatrix} 7 \\ 1 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \end{array} = \frac{7}{9} \begin{array}{c} S_1 \\ \begin{bmatrix} 9 \\ - \\ - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \end{array} + \frac{1}{6} \begin{array}{c} S_2 \\ \begin{bmatrix} - \\ 6 \\ - \\ - \\ - \\ - \end{bmatrix} \end{array},$$

a lineární kombinace příslušných koeficientů $\left(\frac{7}{9} + \frac{1}{6}\right)$ splňuje podmínku $\frac{7}{9} + \frac{1}{6} < 1$. (Všem neznámým, tedy i x_7, odpovídají ve funkci f koeficienty 1).

V tabulce 6 uvádíme sestavy, které zůstaly pro konečné řešení.

Tabulka 6

Sestavy pro konečnou formulaci problému

Sestava / Šíře	S_1	S_2	S_3	S_4	S_5	S_6	S_{15}	S_{21}	S_{23}	S_{2}-	S_{30}	S_{63}	S_{67}	S_{68}
43	9						1	1						
63		6							3			2		
86			4				4		2	3	3	1	1	1
128				3						1			1	
129					3						1			1
172						2		2				1	1	1
Počet nastavení	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	x_6	x_7	x_8	x_9	x_{10}	x_{11}	x_{12}	x_{13}	x_{14}

Čtenář se může přesvědčit o správnosti vyloučení některých sestav z tabulky 5. Někdy nepostačí k vyloučení sestavy pouze 2 vektory, jak tomu bylo v ilustrativním příkladě. Např. pro vyloučení S_{72} bylo nutno uvažovat vektory S_{30}, S_5, S_1 a S_2, pro vyloučení S_{73} vektory S_{21}, S_{23}, S_1 a S_3. Ve vylučování jednotlivých sestav je možno rychle získat praxi, takže tato práce je celkem snadným úkolem.

Z takto zpracovaného problému již velmi snadno můžeme formulovat problém pro aplikaci simplexové metody. Úkolem je maximalisovat funkci $f(\mathbf{x}) = \sum_{j=1}^{14} x_j$ za platnosti podmínek

$$\begin{aligned}
&x_1 + \frac{1}{9} x_7 + \frac{1}{9} x_8 &&= 20{,}33 \\
&+ x_2 + \frac{1}{2} x_9 + \frac{1}{3} x_{12} &&= 36{,}33 \\
&+ x_3 + x_7 + \frac{1}{2} x_9 + \frac{3}{4} x_{10} + \frac{3}{4} x_{11} + \frac{1}{4} x_{12} + \frac{1}{4} x_{13} + \frac{1}{4} x_{14} &&= 82{,}25 \\
&+ x_4 + \frac{1}{3} x_{10} + \frac{1}{3} x_{13} &&= 10{,}33 \\
&+ x_5 + \frac{1}{3} x_{11} + \frac{1}{3} x_{14} &&= 67{,}00 \\
&+ x_6 + x_8 + \frac{1}{2} x_{12} + \frac{1}{2} x_{13} + \frac{1}{2} x_{14} &&= 121{,}66
\end{aligned}$$

Systém podmínek jsme zřejmě dostali za pomoci sestav uvedených v tabulce 6. a požadavků na výrobu. Jednotlivé rovnice byly vyděleny čísly 9, 6, 4, ... tak, aby v systému vznikla jednotková base.

Sestavení simplexové tabulky a řešení celého příkladu lze provést obdobným způsobem, jaký byl popsán v předcházejícím odstavci. Touto úpravou bylo provedeno podstatné zkrácení celého problému. Původní simplexová tabulka měla 75 vektorů a tabulka po zjednodušení pouze 14 vektorů. Není vyloučeno, že by se podařilo vyloučit ještě některý z 8 vektorů, které zbyly v konečné tabulce kromě base, na prvý pohled to však nebylo patrné a při řešení problému jsme se tím nezdržovali. Je třeba ještě poznamenat, že exaktní nalezení minima v tomto případě, kdy funkce f může nabývat pouze celočíselných hodnot, by vyžadovalo použití speciálního postupu, popsaného např. v [1]. Pro praktické účely však plně postačí takové řešení, v němž předpokládáme, že proměnná je spojitá.

2.4. Sestavení výchozího základního řešení pro dopravní problém

V tabulce 7. uvádíme podklady pro řešení dopravního problému. Z původního rozdělovníku práškového superfosfátu, který obsahoval 7 výrobních a 19 spotřebních míst, byla vymezena menší tabulka, zahrnující 3 výrobce a 8 spotřebitelů, což pro ilustraci postačí. Na okrajích tabulky je uvedena výroba a spotřeba v jednotkách 10 t. Tedy plánovaná výroba závodu V_1 je 6630 × 10 t, plánovaná spotřeba místa S_1 je 3550 × 10 t apod. Celková výroba se rovná spotřebě a činí 13 090 × 10 t. Uvnitř tabulky jsou uvedeny jednak dopravní sazby za přepravu 10 t hnojiva, jednak indexy určující každé políčko (čísla v závorkách). Za dopravu 10 t hnojiva z výrobny V_1 do místa S_1 se zaplatí 169 Kčs a tato sazba se nalézá v políčku (1,1). Indexy jsou stanoveny tak, že číslo před desetinnou čárkou určuje sloupec a číslo za desetinnou čárkou určuje řádek.*)

Tabulka 7

Podklady po minimalisaci dopravních nákladů.

	V_1	V_2	V_3	Spotřeba
S_1	169 (1,1)	155 (2,1)	133 (3,1)	3 350
S_2	293 (1,2)	272 (2,2)	228 (3,2)	2 010
S_3	214 (1,3)	200 (2,3)	214 (3,3)	1 620
S_4	169 (1,4)	177 (2,4)	257 (3,4)	930
S_5	133 (1,5)	141 (2,5)	228 (3,5)	1 390
S_6	173 (1,6)	169 (2,6)	173 (3,6)	1 000
S_7	228 (1,7)	221 (2,7)	148 (3,7)	1 530
S_8	221 (1,8)	214 (2,8)	126 (3,8)	1 060
Výroba	6630	560	5 900	13 090

K sestavení základního řešení můžeme použít několika metod. Nejčastěji se používá tzv. indexové metody,**) nebo metody „od severozápadního k jiho-

*) Indexy je možno stanovit také pořadovými čísly, vepisovanými do jednotlivých políček po řádcích; naše značení je však přehlednější.

**) Indexová metoda má širší uplatnění než v souvislosti s dopravním problémem. Příklad jiné aplikace viz v [2].

východnímu rohu". Prvá z těchto metod je časově náročnější než druhá, což je markantní zvláště při velkých rozdělovnících. Základní řešení sestrojené indexovou metodou bývá však blíže optimálnímu než základní řešení, získané druhou metodou.

Použití indexové metody spočívá v logické úvaze, že celkové dopravní náklady budou pravděpodobně nejvýhodnější, jestliže se v maximální míře využije nejnižších dopravních sazeb, a jedině v těch případech, kde by byly porušeny omezující podmínky, se použije vyšších dopravních sazeb.

Seřadíme tedy nejprve všechny dopravní sazby od nejmenší k největší a vypíšeme příslušné indexy:

126	(3,8)	173	(1,6)	228	(3,2)
133	(3,1)	173	(3,6)	228	(3,5)
133	(1,5)	177	(2,4)	228	(1,7)
141	(2,5)	200	(2,3)	257	(3,4)
148	(3,7)	214	(1,3)	272	(2,2)
155	(2,1)	214	(3,3)	293	(1,2)
169	(1,1)	214	(2,8)		
169	(1,4)	221	(2,7)		
169	(2,6)	221	(1,8)		

Výchozí základní řešení (viz tab. 8) nyní získáme tím způsobem, že obsadíme nejprve políčko (3,8), kam dáme největší možnou dodávku (1060). Tím je ovšem zcela vyčerpána spotřeba místa S_8, proškrtneme tedy políčka (1,8) a (2,8), kam již nemůže přijít žádná položka. Dále obsadíme políčko (3,1) a proškrtneme zbývající 2 políčka v témže řádku. Obdobným způsobem postupujeme i u políčka (1,5). Další nejnižší náklady příslušejí k indexu (2,5), avšak protože jsme toto políčko již proškrtli, můžeme postoupit k dalšímu indexu (3,7). Zde již nemůžeme dát plnou možnou dodávku pro místo S_7, poněvadž bychom překročili kapacitu výrobny V_3. Volná kapacita výrobny V_3 je již jen 1290, dáme tedy tuto položku do políčka (3,7) a všechna volná políčka ve sloupci V_3 proškrtneme. Tak postupujeme dále, pokud výroba a spotřeba nejsou rozděleny.

Tabulka 8

Řešení dopravního problému indexovou metodou

	V_1	V_2	V_3	Spotřeba
S_1	—	—	3 550	3 550
S_2	2 010	—	—	2 010
S_3	1 620	—	—	1 620
S_4	930	—	—	930
S_5	1 390	—	—	1 390
S_6	440	560	—	1 000
S_7	240	—	1 290	1 530
S_8	—	—	1 060	1 060
Výroba	6 630	560	5 900	13 090

Velmi snadno se můžeme přesvědčit, že rozdělovník je správný (platí řádkové a sloupcové součty) a že celkové dopravní náklady (součet součinů dopravních sazeb a přepravovaných množství) činí $0 \,.\, 169 + 293 \,.\, 2010 + 214 \,.\, 1620 + \ldots + 126 \,.\, 1060 = 2\,299\,760$.

K rozdělovníku, který má právě $m + n - 1$ obsazených políček, je však možno dospět zcela jednoduchým způsobem, že obsazujeme políčka bez ohledu na dopravní sazby, přihlížejíce pouze k tomu, aby platily řádkové a sloupcové součty. Jeden z takových „základních rozdělovníků" můžeme získat pomocí postupu „od severozápadního k jihovýchodnímu rohu". Vyplňujeme tabulku takto:

Políčko	Velikost dodávky	Políčko	Velikost dodávky
(1,1)	3550	(3,4)	920
(1,2)	2010	(3,5)	1390
(1,3)	1070	(3,6)	1000
(2,3)	550	(3,7)	1530
(2,4)	10	(3,8)	1060

Je zřejmé, že v tabulce bude vyplněno právě $m + n - 1 = 10$ políček i v tomto případě.

2.5. Algoritmus pro řešení dopravního problému

V odstavci 1.3 jsme odvodili postup pro řešení dopravního problému. Prakticky při řešení postupujeme tím způsobem, že sestrojíme tabulku výchozího základního řešení, v níž je vyplněno právě $m + n - 1$ polí a v této tabulce provádíme změny až do té doby, pokud všem prázdným políčkům neodpovídají nezáporné rozdíly (12), (13) atd.

Vyhledávání a provádění těchto postupných změn nyní popíšeme. Nejprve však musíme poněkud pozměnit symboliku a tvar kriterií tak, aby odpovídala zavedenému pracovnímu systému.

Uvažujme nejprve jednoduchý příklad, kdy cesta se uzavře pomocí 4 čísel. Schematicky spolu s naším značením vyjádříme tuto skutečnost takto:

0 c_0 (1)	* c_k (2)
* c_l (3)	* c_p (4)

kde hvězdička označuje, že v políčku je umístěna dodávka. c_k značí dopravní sazby a čísla v závorkách indexy. Označme nyní

(1) — nulové políčko,
(2) — klíčové políčko,
(3) — levé políčko základu,
(4) — pravé políčko základu,

c_0 bude vždy dopravní sazba příslušející k nulovému políčku; c_k dopravní sazba příslušející k obsazenému políčku v témže řádku, které je součástí cesty (tratě). Konečně c_l a c_p jsou dopravní sazby příslušející ke dvojici obsazených políček, které slouží k uzavření celé tratě. Přitom c_l bude dopravní sazba příslušející k políčku vlevo a c_p dopravní sazba příslušející k políčku vpravo.

Přesun na určité políčko bude tedy žádoucí (přinese snížení celkových dopravních nákladů), jestliže

$$c_0 - c_k + c_p - c_l < 0 ,$$

což analogicky odpovídá výrazu (12). Tuto nerovnost upravíme na

$$c_0 < c_k + (c_l - c_p) , \tag{1}$$

$$c_0 < c_k + d_z ,$$

kde

$$d_z = c_l - c_p \tag{2}$$

představuje rozdíl mezi dopravními sazbami v levém a v pravém základním políčku. Budeme jej nazývat *základní diferencí*.

Je ještě důležité se všimnout, jakým směrem postupujeme při uzavírání celé trati. Cestu na trať zahájíme vždy z nulového políčka na klíčové políčko. Postup je pak dán schématem

$$c_0 \to c_k \to (c_p \to c_l) \to c_0 .$$

Uvažujme nyní další příklad, že máme posoudit vhodnost přesunu pro případ znázorněný tímto schématem:

* c_k	0 c_0
* c_l	* c_p

Potom v naší symbolice má kriterium pro posouzení výhodnosti přesunu zřejmě tvar

$$c_0 - c_k + c_l - c_p < 0$$

$$c_0 < c_k - d_z \tag{3}$$

a postup při uzavírání tratě je dán schématem

$$c_0 \to c_k \to (c_l \to c_p) \to c_0 .$$

Rozšiřme nyní příklad na takový případ, kdy je trať nutno uzavřít pomocí 8 čísel, tedy

0 c_0		* c_k	
	* c_{l_1}	* c_{p_1}	
	* c_{l_2}		* c_{p_2}
* c_{l_3}			* c_{p_3}

a označme

$$d_{z_1} = c_{l_1} - c_{p_1}\,,$$
$$d_{z_2} = c_{l_2} - c_{p_2}\,,$$
$$d_{z_3} = c_{l_3} - c_{p_3}\,; \text{ potom kriterium je}$$

$$c_0 - c_k + c_{p_1} - c_{l_1} + c_{l_2} - c_{p_2} + c_{l_3} - c_{p_3} < 0\,,$$
$$c_0 < c_k + d_{z_1} - d_{z_2} + d_{z_3}\,. \tag{4}$$

Celá trať pak probíhá takto:

$$c_0 \to c_k \to (c_{p_1} \to c_{l_1}) \to (c_{l_2} \to c_{p_2}) \to (c_{p_3} \to c_{l_3}) \to c_0\,.$$

Na základě induktivních úvah můžeme pak stanovit obecné kriterium pro posouzení výhodnosti přesunu: přesun na určité políčko je výhodný, jestliže platí

$$c_0 < c_k + D_z\,, \tag{5}$$

kde c_0 — dopravní sazba na nulovém políčku, c_k — dopravní sazba na klíčovém políčku, D_z — součet odpovídajících základních diferencí, přičemž se u diferencí, v nichž se postupuje zleva doprava, se mění znaménko.

Použití kriteria (5) je výhodné pro rychlé získání konečného řešení. Prakticky postupujeme takto:

1. Zjistíme všechny základní diference, které v dané tabulce existují.
2. Vyčerpáme všechny možnosti zlepšení, závisející na absolutně nejvyšší základní diferenci.
3. Vyčerpáme postupně možnosti zlešení, kdy D_z tvoří jediná diference, při čemž kriteriem pro určování pořadí je absolutní velikost diference.
4. Prošetříme možnosti zlepšení, kdy D tvoří více diferencí.
5. Provedeme kontrolní prošetření všech políček.

Provedeme nyní minimalisaci pro rozdělovník uvedený v tab. 8. Pro lepší přehlednost uvedeme tento rozdělovník do společné tabulky s podklady pro minimalisaci. Prakticky je vhodné používat pro řešení plánovací tabule a odlišovat dodávky od dopravních sazeb barevnými jezdci. Toto uspořádání má tu výhodu, že odstraňuje zbytečné opisování podkladů, neboť v tomto případě postačí pouze v postupu celého řešení vyměňovat několik jezdců. Výchozí tabulku uvádíme v tab. 9, kde jednotlivé dodávky jsou uvedeny čísly v silném orámování.

Tabulka 9

Výchozí uspořádání pro výpočet nejvýhodnějšího rozdělovníku.

	V_1		V_2		V_3		Spotřeba
S_1	169		155		133	3550	3550
S_2	293	2010	272		228		2010
S_3	214	1620	200		214		1620
S_4	169	930	177		257		930
S_5	133	1390	141		228		1390
S_6	173	440	169	560	173		1000
S_7	228	240	221		148	1290	1530
S_8	221		214		126	1060	1060
Výroba	6630		560		5900		13090

Zjistíme tedy nejprve všechny základní diference:

V_1	V_2	V_3	Diference
/	/		+ 4
/		/	+80

V tabulce existují tedy pouze dvě základní diference, a to v řádku S_6 (173 — 169 = 4) a S_7 (228 — 148 = 80). Čárkou jsme znázornili, kterých sloupců se diference týkají. Absolutně nejvyšší diference je +80, budeme tedy zkoumat možnosti zlepšení ve sloupcích V_1 a V_3.

Tabulka 10

Změny promítnuté v rozdělovníku

	I				II				III			
	V_1		V_3		V_1		V_3		V_1		V_2	
S_1	169	44	133	3550	169	240	133	3310	169	2250	155	10
S_2	293	2010	228		293	2010	228	29	293	.	272	
S_3	214	1620	214		214	1620	214	.	214	1620	200	10
S_4	169	930	257		169	930	257	.	169	930	177	.
S_5	133	1390	228		133	1390	228	.	133	1390	141	.
S_6	173	440	173		173	440	173	.	173	440	169	560
S_7	228	240	148	1290	228	.	148	1530	228	.	221	
S_8	221	.	126	1060	221	.	126	1060	221	.	214	

Podle kriteria (5) dostáváme v políčku V_1S_1

$$c_0 < c_k + D_z\,, \quad 169 < 133 + 80; \text{ rozdíl } 44.$$

Přesunem dodávky d do políčka V_1S_1 se dopravní náklady sníží o hodnotu 44 . d. Možnost přesunu vyznačujeme zanesením rozdílu do příslušného políčka. Přesun do políčka V_1S_8 není žádoucí, neboť 221 > 126 + 80; prošetření označíme v tomto případě tečkou.

Promítneme nyní maximální možnou změnu do políčka V_1S_1, tj. $d = 240$ a uprázdněné políčko V_1S_7 označíme tečkou, neboť je nebudeme již prověřovat. (viz tab. 10-II). Tím se ovšem změnila základní diference, která již není 80, ale 169 — 133 = 36. Uplatníme nyní kriterium (5) na sloupec V_3. Dostáváme

$$\begin{aligned} 228 &< 293 - 36; \quad \text{rozdíl } 29,\\ 214 &> 214 - 36,\\ 257 &> 169 - 36,\\ 228 &> 133 - 36,\\ 173 &> 173 - 36, \end{aligned}$$

Zcela obdobným způsobem postupujeme dále a promítneme v tomto případě změna $d = 2010$.

Tím byly vyčerpány již možnosti zlepšení vzájemnými záměnami ve sloupcích V_1 a V_3. V tab. 10-III jsou uvedeny již sloupce V_1, V_2, kde analogickým postupem bylo zjištěno, že existují dvě stejné možnosti zlepšení, a to bylo vyznačeno čísly ve čtverečcích. Po promítnutí všech naznačených změn by rozdělovník nabyl tvaru, který je uveden v tab. 11.

Tabulka 11

Optimální rozdělovník práškového superfosfátu.

	V_1		V_2		V_3		Spotřeba
S_1	169	2250	155	.	133	1300	3350
S_2	293	.	272	. .	228	2010	2010
S_3	214	1060	200	560	214	.	1620
S_4	169	930	177	.	257	.	930
S_5	133	1390	141	.	228	.	1390
S_6	173	1000	169	.	173	.	1000
S_7	228	.	221	. .	148	1530	1530
S_8	221	.	214	. .	126	1060	1060
Výroba	6630		560		5900		13090

V rozdělovníku však zbývají ještě 3 políčka (označená 2 tečkami), která nebyla dosud prošetřena. Veličinu D_z tvoří v tomto případě součet dvou základních diferencí a zjistíme ji snadno jejich sloučením. V tabulce, kterou uvádíme níže, můžeme velmi snadno evidovat během celého postupu základní diference.

Výrobna			Diference při změně			
V_1	V_2	V_3	I	II	III	IV
/	/		$+4$		$+4$	$+14$
/		/	$+80$	$+36$		$+36$

Dle definice hodnoty D_z ve výrazu (5) dostáváme, že $D_z = 36 - 14 = 22$. Políčka označená dvěma tečkami nedávají další možnosti zlepšení, neboť

$$\begin{aligned} 272 &> 228 + 22\,, \\ 221 &> 148 + 22\,, \\ 214 &> 126 + 22\,. \end{aligned}$$

Tím jsme provedli jeden krok (všechna políčka jsou označena tečkami na důkaz toho, že nevidíme další možnosti zlepšení) a tento jediný krok vede ve většině případů k nalezení minima sledované cenové funkce f. Přesto však by se mohly vyskytnout případy, kdy by i v rozdělovníku přešetřeném tímto způsobem mohly existovat další možnosti zlepšení. K nalezení absolutního minima mohou posloužit 2 cesty:

a) Uplatnění některých dalších kriterií, která v tomto všeobecném článku již nemůžeme uvádět.

b) Provedením kontrolního prošetření všech prázdných políček tabulky a promítnutím změny, která se eventuálně může při tomto kontrolním prošetření objevit.

V našem případě kontrolní prošetření všech 15 prázdných políček ukazuje, že bylo nalezeno minimum cenové funkce. Její hodnota je

$$f(\mathbf{x}) = 2250 \,.\, 168 + 0 \,.\, 293 + \ldots + 1060 \,.\, 293 + \ldots + 1060 \,.\, 126 = \\ = 2\,214\,780$$

a celkové dopravní náklady jsou o Kčs 80 480 nižší než dopravní nákaldy příslušející k rozdělovníku zpracovanému indexovou metodou.

Poznámka 1. V případě, že problém je degenerovaný, což se nám projeví v tom, že v určitém okamžiku by měl být počet obsazených políček nižší než $m + n - 1$, pomůžeme se velmi snadno podle postupu, který navrhuje dr. Habr ve své práci [6], str. 95. Celý postup spočívá v tom, že pouze symbolicky doplníme políčka do požadovaného počtu.

Poznámka 2. Zavedený způsob výpočtu se velmi osvědčuje při vyhledávání rozdělovníku s minimálními dopravními náklady v rámci ministerstva chemického průmyslu. Umožňuje poměrně snadné řešení i velmi rozsáhlých úloh např. 10 výrobců a 120 odběratelů.

Závěr

V této práci jsme seznámili čtenáře s podstatou lineárního programování a způsobem řešení ekonomických úloh. Nebylo možno se zabývat všemi otázkami, které vyžaduje provedení úspěšné aplikace. Další podrobnější popis metody je uveden v literatuře [4], [5] a příklady aplikací v četných zahraničních časopisech. (Příslušné literární odkazy jsou u autorů k disposici.)

Také algoritmy na řešení problému lineárního programování nebyly popsány vyčerpávajícím způsobem. Kromě obecné simplexové metody a speciálních metod indexové a metody na řešení dopravního problému existují i další metody řešení. Velký ekonomický význam lineárního programování vede také programátory a konstruktéry matematických strojů k přípravě těchto metod pro samočinné počítače. U nás sestrojila např. instrukční síť na simplexovou metodu pro první československý počítač pracovnice výzkumného ústavu matematických strojů O. Pokorná [7]. Pracovníci ústavu matematických strojů sestrojili také analogový počítač Adop, na němž lze řešit dopravní problém podle metody navržené doc. Nožičkou [3]. Tento analog však umožňuje řešení pouze „malých" dopravních problémů do rozměru tabulky 8 + 10.

Literatura

[1] Markowitz H. M., Manne A. S.: *On the Solution of Discrete Programming Problems;* Econometrica 25, 1957.

[2] Votava R.: *Volba nejlepší alternativy výrobního plánu indexní metodou lineárního programování;* Podn. organizace 1, 1958.

[3] Nožička F: *O jednom minimálním problému v teorii lineárního programování;* Skripta, Matematický ústav ČSAV, Praha.

[4] Dorfman, Samuelsen, Solow: *Linear Programming and Economic Analysis*, New York 1958.
[5] Churchmann, Ackoff, Arnoff: *Introduction to Operations Research*, New York 1957.
[6] Habr: *Lineární programování — výklad pro ekonomy*; Praha, 1958.
[7] Pokorná: *Instrukční síť pro simplexovou metodu*; Zpráva Výzkumného ústavu matematických strojů, 1958.

AFINITY V TŘÍROZMĚRNÉM AFFINNÍM PROSTORU

(Dokončení)

DALIBOR KLUCKÝ, *VŠP* Praha

4. Samodružné směry afinity

Podle věty 2.7 je obrazem každé lineární soustavy vektorů v afinitě opět lineární soustava vektorů téže dimense. Víme, že každá lineární soustava vektorů dimense 1 je směrem určité přímky a naopak směr každé přímky je lineární soustavou vektorů dimense 1. Budeme proto nadále užívat místo termínu lineární soustava vektorů dimense 1 užívat většinou termínu směr. Je-li $\mathbf{x}$ nenulový vektor, $\mathscr{A}$ afinní zobrazení, potom nutná a postačující podmínka pro to, aby směr $\mathbf{x}$ byl v afinitě $\mathscr{A}$ samodružný je, aby

$$\mathscr{A}(\mathbf{x}) = k\mathbf{x}, \quad k \neq 0\,. \tag{4.1}$$

Určit samodružné směry afinity $\mathscr{A}$ znamená tedy určit všechny lineárně nezávislé vektory, které vyhovují rovnici (4.1).

Pro počet samodružných směrů afinity jsou tyto logické možnosti:

1. Afinita nemá žádný samodružný směr.
2. Afinita má jeden samodružný směr.
3. Afinita má dva různé samodružné směry.
4. Afinita má tři různé samodružné směry, které
   a) nenáležejí témuž dvojsměru[8])
   b) náležejí témuž dvojsměru.

V případě b) je uvedený dvojsměr dvojsměrem samodružných směrů podle věty 3.6

5. Afinita má čtyři různé samodružné směry:
   a) Všechny čtyři náležejí témuž dvojsměru; pak tento případ splývá s 4b).
   b) Všechny čtyři nenáležejí témuž dvojsměru, avšak tři z nich — označme je $\{\mathbf{u}\}$, $\{\mathbf{v}\}$, $\{\mathbf{w}\}$ náležejí témuž dvojsměru např. $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$. Podle věty 3.5 je každý směr dvojsměru $\{\mathbf{u}, \mathbf{v}\}$ samodružný. Afinita má tedy dvojsměr samodružných směrů a další samodružný směr, který tomuto dvojsměru nenáleží.
   c) Žádné tři nenáleží témuž dvojsměru, potom podle věty 3.7 je každý směr samodružný.

Kdyby v případě 5b) měla afinita ještě další samodružný směr, pak by měla všechny směry za samodružné, což je případ 5c).

Úkolem 4. části tohoto článku je zjistit, které z uvedených logických možností pro samodružné směry mohou nastat. Při tom budeme zjišťovat existenci jednotlivých případů v opačném pořadí, než jsou vyjmenovány logické možnosti.

[8]) Název dvojsměr budeme užívat pro lineární soustavu vektorů dimense 2 z téhož důvodu jako názvu směr pro lineární soustavu vektorů dimense 1.