Jan Navrátil

Odchylky od normálního zákona chyb

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 4, 409--415

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137036

nější mezinárodní matematická konference, jíž by se sovětští vědci aktivně nezúčastnili. Zvlášť těsné je spojení s matematiky lidově demokratických zemí. Velmi přátelské jsou naše styky s francouzskými, italskými a anglickými matematiky. Sovětským vědcům se často dostává pozvání k přednáškám v těchto státech, řada sovětských matematiků byla zvolena za členy zahraničních akademií a vědeckých institucí. Členy mnoha zahraničních akademií jsou akad. I. M. Vinogradov, S. N. Bernštejn, P. S. Alexandrov, A. N. Kolmogorov aj.

Ve všech obdobích rozvoje lidstva, počínaje už dávnou minulostí, hrála matematika jako nástroj k poznání zákonitostí obklopujícího nás světa i jako mohutný prostředek k ovládnutí přírody velmi důležitou roli při tvorbě duchovní a hmotné kultury národů. Plníc tuto úlohu, matematika se stále zdokonaluje a její význam pro náš život neustále roste. Proto je matematika vědou, která má nejen bohatou minulost, ale i velkou budoucnost. A k této budoucnosti vede cesta komunismu, cesta Velké říjnové socialistické revoluce.

Zkráceně přeložil Václav Vilhelm

ODCHYLKY OD NORMÁLNÍHO ZÁKONA CHYB

JAN NAVRÁTIL, *ČVUT* Praha

Neodpovídá-li serie opakovaných měření podmínkám formulovaným Hagenem a Besselem, může serie měření vykazovat význačné odchylky od normálního rozložení, jehož se běžně v teorii chyb používá. V práci jsou probrány některé možné zdroje takových odchylek a metody k analyse nenormálních empirických rozložení chyb.

1. Úvod

Profesor Z. Horák upozornil ve svých pracích [1] a [2] na odchylky empirického rozložení hodnot, získaných opakovaným měřením, od teoretického rozložení Gaussova, a navrhuje nahrazení Gaussova rozložení obecnějším, závislým na více parametrech. V práci [2] slibuje teoretické zdůvodnění zobecněné hustoty rozložení chyb.

Snaha po formálním vystižení empirického rozložení četností chyb vhodnou funkcí skrývá v sobě nebezpečí, že tak složitý proces, jako je opakování fysikálního měření, místo aby byl podrobně analysován, bude vtěsnán do bezduché matematické formule. Matematická statistika celým svým vývojem za posledních 20 let tento postup odmítá.

Použití normálního rozložení k aproximaci empirického rozložení četností chyb má teoretické odůvodnění plynoucí z hlubokých úvah o zdrojích náhodného kolísání měřených hodnot. Při snaze o revisi použitelnosti Gaussova normálního rozložení na rozložení chyb je třeba doplnit, opravit nebo zpřesnit tyto úvahy a najít teoretická rozložení odpovídající obecnějším podmínkám, než jsou podmínky, za nichž je Gaussovo rozložení odvozeno. Některá zobecnění předpokladů o vzniku chyb při měření jsou předmětem této práce.

V původní Laplaceově formulaci uvedeného problému se předpokládá, že chyba při fysikálním měření vzniká kumulováním velikého počtu navzájem nezávislých elementárních náhodných chyb.

Kromě toho může být měření zatíženo konstantní systematickou chybou, takže můžeme psát

$$\xi = x + s + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \ldots + \varepsilon_n\,, \tag{1}$$

kde ξ je výsledek měření veličiny x, s je systematická chyba a $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ jsou elementární náhodné chyby.

Za velmi obecných podmínek týkajících se rozložení náhodných veličin $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ platí, že rozložení náhodné veličiny ξ dané distribuční funkcí $F_n(y)$ je asymptoticky normální. To zhruba znamená, že pro velká n platí přibližně vztah

$$F_n(y) = P(\xi < y) \doteq \frac{1}{2\sqrt{\pi}\,\sigma} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-m}{\sigma}\right)^2} \mathrm{d}t\,, \tag{2}$$

kde m a σ jsou konstanty (parametry normálního rozložení).

Je známa řada vět, které udávají podmínky pro $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_n$ aby nahoře uvedené tvrzení platilo.

Věty tohoto druhu, které mají fundamentální význam pro teorii pravděpodobnosti a především pro její aplikace na reálné jevy, mají společný název centrální limitní věty. Jejich formulace a důkazy jsou spojeny se jmény Čebyšev, Markov, Ljapunov, Bernštejn, Lévy, Lindeberg, Cramér a j.

Významné odchylky empirických rozložení chyb od normálního rozložení ukazují na to, že předpoklady, za nichž platí (2), nejsou splněny.

Podstatné předpoklady pro přibližnou normalitu rozložení chyb jsou a) nezávislost elementárních chyb, b) veliký počet elementárních chyb.

Při konkretních měřeních se snadno může stát, že některý z těchto předpokladů není splněn a to přirozeně vede k významným odchylkám rozložení takových měření od rozložení normálního.

H. Cramér analysoval v rozsáhlé práci [3] podrobně případ, kdy není splněna podmínka b), tedy případ, kdy počet elementárních chyb, majících vliv na výsledek měření, není příliš veliký.

Ve své práci ukazuje Cramér, že se za velmi obecných podmínek dá distribuční funkce $F_n(y)$ pro konečné n aproximovat s libovolnou přesností Gramovým-Charlierovým rozvojem typu A:

$$F_n(y) \doteq \Phi(y) + \sum_{\nu=3}^{k} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(y) + \ldots \tag{3}$$

Konstanty c_ν tohoto rozvoje jsou určeny pomocí momentů rozložení elementárních chyb. Požadavek znalosti momentů rozložení elementárních chyb však není podstatný. Při dosti velikém počtu měření lze pro přibližné určení koeficientů c_ν použít výběrových momentů empirické distribuční funkce.

Vycházíme-li tedy v teorii chyb z principu sčítání nezávislých elementárních chyb, jak byl zaveden Hagenem a Besselem, docházíme k rozložením typu (3) za velmi obecných podmínek. Dokonce se dá poněkud oslabit i požadavek nezávislosti elementárních chyb využitím limitních vět o součtech slabě závislých náhodných veličin (Bernštejn).

V podstatě tvoří serie opakovaných měření stochastickou posloupnost (viz na př. [4]), neboť výsledky předcházejících měření ovlivňují měření další. Někdy je tento vliv nepatrný, takže může být zanedbán a měření mohou být pokládána za nezávislá. Jindy tomu tak není a pak je třeba analysovat posloupnost měření se zachováním pořadí. Souhrn všech měření může vést v tomto případě k nejrůznějším typům „křivek četnosti" podle charakteru závislosti jednotlivých měření. O rozložení četností v pravděpodobnostním slova smyslu zde vůbec mluvit nelze, ježto požadavek nezávislosti jednotlivých měření je pro rozložení četností fundamentální.

Někdy je sice možno pokládat měření za vzájemně nezávislá, ale systém elementárních chyb nebo velikost systematické chyby se během měření mění. Tak na příklad únava pozorovatele zvětšuje rozptyl elementárních chyb, nebo naopak treningem se rozptyl elementárních chyb zmenšuje. Na měření mají vliv povětrnostní podmínky, denní doba a pod. Souhrn měření tvoří v tomto případě smíchaný soubor. Některé důsledky těchto vlivů odvozuji v této práci.

Nakonec je třeba poznamenat, že ne každá odchylka empirického rozložení četností od příslušného teoretického rozložení, konstruovaného na př. pomocí výběrových momentů empirického rozložení, je statisticky významná. Významnost je tu třeba ověřit metodami statistickými (χ^2 — test dobré shody, Smirnovův-Kolmogorovův λ^2-test).

2. Ověřování normality pomocí koeficientů šikmosti a špičatosti

V teorii pravděpodobnosti se dokazuje, že rozložení funkce centrálních výběrových momentů je za jistých podmínek asymptoticky normální a odvozují se výrazy pro momenty tohoto rozložení (viz na př. [5] str. 366). Takovými funkcemi jsou též běžně užívané koeficienty g_1 (koeficient šikmosti) a g_2 (koeficient špičatosti):

$$g_1 = \frac{m_3}{m_2^{3/2}}, \tag{4}$$

$$g_2 = \frac{m_4}{m_2^2} - 3. \tag{5}$$

O momentech koeficientů g_1 a g_2 platí za předpokladu, že základní rozložení je normální, tyto vztahy:

$$\mu(g_1) = 0, \quad \sigma^2(g_1) = \frac{6(N-2)}{(N+1)(N+3)}, \tag{6}$$

$$\mu(g_2) = -\frac{6}{N+1}, \quad \sigma^2(g_2) = \frac{24N(N-2)(N-3)}{(N+1)^2(N+3)(N+5)}; \tag{7}$$

N značí počet měření.

Ze vzorců (6) a (7) a z asymptotické normality veličin g_1 a g_2 lze odvodit meze, v nichž leží za předpokladu normality rozložení chyb koeficientů g_1 a g_2 s pravděpodobností 0,95.

Tabulka 1

95procentní hranice pro koeficienty g_1 a g_2

Počet měření	Hranice pro g_1		Hranice pro g_2	
	dolní	horní	dolní	horní
50	−0,64	+0,64	−1,30	+1,05
100	−0,47	+0,47	−0,95	+0,84
200	−0,335	+0,335	−0,684	+0,624
500	−0,214	+0,214	−0,435	+0,411
1000	−0,152	+0,152	−0,308	+0,296
5000	−0,068	+0,068	−0,137	+0,135
10000	−0,048	+0,048	−0,097	+0,096

Když je rozložení chyb normální, leží koeficienty g_1 a g_2 v mezích udaných v tabulce 1 s pravděpodobností 0,95. Obráceně můžeme soudit, je-li koeficient g_1 nebo g_2 vně udaných mezí, že dané empirické rozložení chyb se prakticky jistě odchyluje významně od rozložení normálního.

3. Analysa empirických distribučních funkcí pomocí Gramova-Charlierova rozvoje typu A

Řekli jsme, že v případě ne příliš velkého počtu elementárních chyb dává dobrou aproximaci rozložení četností chyb Gramův-Charlierův rozvoj (3)

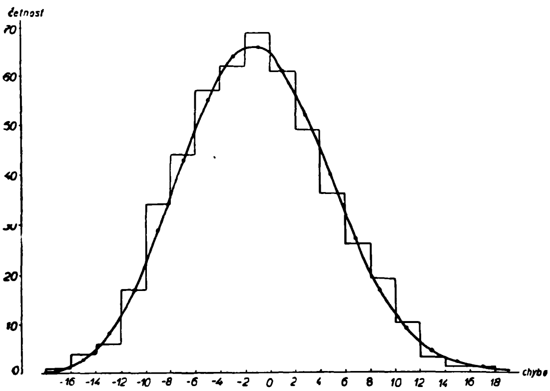
$$F_n(y) \doteq \Phi(y) + \sum_{\nu=3}^{k} \frac{c_\nu}{\nu!} \Phi^{(\nu)}(y) + \dots$$

V rozvoji (3) značí $\Phi(y)$ distribuční funkci normálního rozložení,

$$\Phi(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{y} e^{-\frac{u^2}{2}} du\,, \tag{8}$$

$\Phi^{(\nu)}(y)$ ν-tou derivaci funkce $\Phi(y)$. Funkce $\Phi(y)$ a její derivace do pátého řádu jsou dostatečně hustě tabelovány v knize [5]. $F_n(y)$ v rozvoji je distribuční funkce standardisované náhodné veličiny (1):

$$F_n(y) = P\left(\frac{\xi - m}{\sqrt{m_2}} < y\right). \tag{9}$$



Obr. 1

První dva koeficienty v rozvoji (3) jsou

$$c_3 = -g_1\,, \quad c_4 = g_2\,; \tag{10}$$

g_1 a g_2 jsou koeficienty šikmosti a špičatosti (4) a (5). Další koeficienty, jakož i vhodnější úpravu rozvoje (3) lze nalézt v práci [3].

Z koeficientů c_3 a c_4 je vidět, že první z nich koriguje rozložení na asymetrii a druhý na špičatost. Velmi často stačí první tři členy rozvoje (3) k uspokojivé aproximaci rozložení chyb.

Ve vzorcích (4), (5), (9) značí m výběrový průměr a m_ν ν-tý centrální výběrový moment empirického rozložení četností:

$$m = \frac{1}{N} \sum_i x_i f_i\,, \quad m_\nu = \frac{1}{N} \sum_i (x_i - m)^\nu f_i\,; \tag{11}$$

N je počet pozorování, f_i je četnost chyb o velikosti x_i. Jako příklad na použití rozvoje (3) k rozboru empirického rozložení četností vypočteme theoretické četnosti v řadě II. můstkových měření z Horákovy práce [2] (str. 357) použitím prvních tří členů Gramova-Charlierova rozvoje (3).

Pro snazší výpočet je materiál z původní tabulky Horákovy stažen do tříd o délce třídního intervalu 2 mm. Takto získaný počet tříd je dostačující.

Co do obtížnosti je výpočet asi stejně pracný jako výpočet Horákův navržený v práci [2], ale aproximace je lepší, ježto respektuje mírnou asymetrii rozložení četností chyb můstkových měření.

Pro srovnání je v tabulce 2 a na obr. 1 uveden výsledek výpočtů:

Tabulka 2

Rozložení chyb řady můstkových měření

Chyba mm	Empirická četnost	Teoretická četnost
−(16, 17)	1	1
(14, 15)	4	3
(12, 13)	6	8
(10, 11)	17	17
(8, 9)	34	29
(6, 7)	44	43
(4, 5)	57	56
(2, 3)	62	64
− (0, 1)	69	66
+ (1, 2)	61	61
(3, 4)	49	52
(5, 6)	36	40
(7, 8)	26	27
(9, 10)	19	17
(11, 12)	10	9
(13, 14)	3	4
(15, 16)	1	2
+(17, 18)	1	1

4. Kolísání systému elementárních chyb během měření

V tomto odstavci se zabývám serií měření $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$. Předpokládám, že veličiny ξ_i $(i = 1, 2, \ldots, N)$ jsou nezávislé náhodné veličiny s Gaussovým rozložením daným hustotou

$$f_j(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{y - m_j}{\sigma_j}\right]^2\right\}. \tag{12}$$

Tyto předpoklady jsou ve shodě s principem skládání nezávislých elementárních chyb, vycházíme-li z předpokladu, že systém elementárních chyb se mění od jednoho měření ke druhému.

Buď nyní x libovolné reálné číslo, $X_j(x)$ náhodná veličina mající tuto vlastnost:

$$X_j(x) = \begin{cases} 1 & \text{pro } y_j < x\,, \\ 0 & \text{pro } y_j \geqq x\,, \end{cases} \qquad j = 1, 2, \ldots, N\,. \tag{13}$$

Snadno se vidí, že platí

$$P(X_j(x) = 1) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j} \int_{-\infty}^{x} \exp\left\{ -\frac{1}{2}\left[\frac{y - m_j}{\sigma_j}\right]^2\right\} \mathrm{d}y = \Phi\left(\frac{x - m_j}{\sigma_j}\right), \tag{14}$$

$$P(X_j(x) = 0) = 1 - P(X_j(x) = 1) = 1 - \Phi\left(\frac{x - m_j}{\sigma_j}\right),$$

kde $\Phi(u)$ je distribuční funkce Gaussova rozložení.

Dále položme

$$X(x) = \frac{1}{N} \sum_{j=1}^{N} X_j(x) \; ; \tag{15}$$

$X(x)$ značí zřejmě relativní četnost těch náhodných veličin z posloupnosti $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, které jsou menší než x.

Střední hodnotu náhodné veličiny $X(x)$

$$E[X(x)] = G(x) \tag{16}$$

nazveme pseudodistribuční funkcí příslušnou k posloupnosti $\{\xi_i\}$.

Funkce $G(x)$ značí zřejmě očekávanou hodnotu relativní četnosti těch měření z posloupnosti měření $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_N$, která jsou menší než x. Funkci $G(x)$ snadno najdeme použitím metody charakteristických funkcí (viz [5]).

Náhodná veličina $X(x)$ má charakteristickou funkci

$$\varphi(t) = \prod_{j=1}^{N} \varphi_j\left(\frac{t}{N}\right), \tag{17}$$

kde $\varphi_j(\tau)$ je charakteristická funkce náhodové veličiny $X_j(x)$:

$$\varphi_j(\tau) = 1 - \Phi\left(\frac{x - m_j}{\sigma_j}\right) . \, (1 - e^{i\tau}) \, . \tag{18}$$

Odtud obvyklým způsobem dostáváme

$$G(x) = E[X(x)] = \frac{1}{i}\left[\frac{\partial}{\partial t}\,\varphi(t)\right]_{t=0} = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \Phi\left(\frac{x - m_j}{\sigma_j}\right). \tag{19}$$

Hustota příslušná k pseudodistribuční funkci $G(x)$ je

$$g(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi} N} \sum_{j=1}^{N} \frac{1}{\sigma_j}\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x - m_j}{\sigma_j}\right)^2}. \tag{20}$$

Když změny v systému elementárních chyb mezi dvěma sousedními měřeními jsou velmi malé, dá se součet (20) nahradit integrálem použitím sumační formule Eulerovy-Maclaurinovy. Když pak učiníme jisté předpoklady o průměru m_j a směrodatné odchylce σ_j, jakožto funkcích proměnné j, můžeme příslušný integrál vypočíst a tak získat řadu různých hustot příslušných k nenormálním pseudodistribučním funkcím $G(x)$.

Když naopak změna v systému elementárních chyb nastává náhle (na př. změna pozorovatele, změna měřicího přístroje, porucha měřicího přístroje, změna osvětlení a pod.), vznikají rozložení smíchaná ze dvou (případně více) normálních rozložení s významně odchylnými charakteristikami.

Z formulí (19) a (20) se snadno odvodí obecné momenty funkce $G(x)$:

$$\mu'_r = \int_{-\infty}^{+\infty} x^r g(x)\, dx = \frac{1}{N}\sum_{j=1}^{N} \mu'_r(j)\,, \tag{21}$$

kde

$$\mu'_r(j) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma_j}\int_{-\infty}^{\infty} x^r\, e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-m_j}{\sigma_j}\right)^2} dx = \sum_{\nu=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]} \binom{r}{2\nu} \frac{(2\nu)!}{2^\nu \nu!}\, \sigma_j^{2\nu} m_j^{r-2\nu}\,. \tag{22}$$

Ze vztahů (21) a (22) lze odvodit řadu vlastností pseudodistribučních funkcí, činíme-li různé předpoklady o momentech m_j a σ_j. Ukážeme jednu z významných vlastností:

Buď $m_j = m$ $(j = 1, 2, \dots, N)$.

Podle (21) a (22) platí

$$\mu_1' = \frac{1}{N} \sum_j \mu_1'(j) = m\,, \quad \mu_2 = \frac{1}{N} \sum_j \sigma_j^2 = \sigma^2\,, \quad \mu_4 = \frac{3}{N} \sum_j \sigma_j^4\,. \tag{23}$$

Je zřejmé, že všechny liché centrální momenty jsou rovny nule, tedy pseudodistribuční funkce je symetrická.

Pro špičatost pseudodistribuční funkce $G(x)$ platí:

$$g_2 = \frac{\mu_4}{\mu_2^2} - 3 = 3\,\frac{\frac{1}{N}\sum_j \sigma_j^4 - \sigma^4}{\sigma^4} = 3\,\frac{\frac{1}{N}\sum_j (\sigma_j^2 - \sigma^2)^2}{\sigma^4} \geqq 0\,. \tag{24}$$

Když je tedy měření toho druhu, že očekávaná hodnota výsledku měření je konstantní (nezávislá na vnějších podmínkách, za nichž se měření provádí), není příslušné rozložení četností naměřených hodnot nikdy plošší než rozložení normální s týmiž momenty. To platí samozřejmě za předpokladu, že měření odpovídá schematu uvedenému na počátku tohoto odstavce.

Některé výsledky tohoto odstavce s poněkud jiného hlediska a v ne zcela uspokojivé formulaci jsou uvedeny v knize [6], kde je též řada vlastností pseudodistribučních funkcí při různé volbě funkcionálního průběhu parametrů μ a σ.

Závěr

Horákovy práce [1] a [2] upozorňují na významné odchylky empirického rozložení chyb při měření od normálního rozložení. V této práci jsem stručně upozornil na některé příčiny, které mohou vést k takovým odchylkám. Při tom vycházím z klasického principu skládání nezávislých elementárních náhodných chyb. Ve 4. odstavci je zobecněn tento princip na případ, kdy systém elementárních chyb kolísá během měření.

Seznam literatury

[1] Z. Horák: *Zákon četnosti chyb fysikálních měření.* Čas. mat. a fys. 74 (1949), str. 283.

[2] Z. Horák: *Zobecnění normálního zákona chyb.* Čas. pro pěst. fys. 1953, čís. 5, str. 348.

[3] H. Cramér: *On the composition of elementary errors I. a II.* Skandinavisk Aktuarietidskrift 1928, str. 13 a 141.

[4] K. Winkelbauer: *Stacionární náhodné procesy a posloupnosti.* Sov. věda — mat. fys. astronom., 1954, str. 173.

[5] H. Cramér: *Mathematical methods of statistics.* Princeton 1946.

[6] N. A. Borodačev: *Analiz kačestva i točnosti proizvodstva.* MAŠGIZ — 1946.