Miloš Matula

Aplikace matematiky na studium psaní [Dokončení]

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 3 (1958), No. 4, 393--401

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/137030

POKROKY MATEMATIKY, FYSIKY A ASTRONOMIE
ROČNÍK III — ČÍSLO 4

MATEMATIKA

APLIKACE MATEMATIKY NA STUDIUM PSANÍ

MILOŠ MATULA

(dokončení)

2. Spojování grafických křivek

Protože v této části článku budeme vyšetřovat současně více než jednu grafickou křivku, nemůžeme už předpokládat $\psi = 0$. Mimo to musíme přihlédnout k tomu, že, jak jsem už poznamenal, rychlost psaní je v podstatě nepřímo úměrná charakteru; nejsou-li charaktery vyšetřovaných křivek stejné, nemůžeme tedy předpokládat stejné doby kmitů ve směru osy y. Rovnice grafické křivky charakteru m budeme tedy psát ve tvaru

$$x = a \cos (t + \varphi) + \frac{c}{m} t + d\,, \quad y = b \cos \left(\frac{t}{m} + \psi\right) + e\,.$$

Chceme-li použít výsledků 1. části článku, abychom vystihli vlastnosti některé z vyšetřovaných křivek, lze to snadno provést zavedením nového parametru $u = \dfrac{t}{m} + \psi$, načež

$$x = a \cos [mu + (\varphi - m\psi)] + cu + d^*\,, \quad y = b \cos u + e',$$

kde $a \geqq 0$, $b \geqq 0$ (a budeme zase předpokládat $a > 0$, $b > 0$), $c \geqq 0$, ale nepředpokládáme žádné omezení pro φ a ψ. Snadno uvážíme, že výsledky 1. části článku je třeba modifikovat takto: Dolní vrcholy křivky dostaneme pro $\cos \left(\dfrac{t}{m} + \psi\right) = -1$, tj. pro $t = m[(2k - 1)\pi - \psi]$ (k celé); horní vrcholy pro $\cos \left(\dfrac{t}{m} + \psi\right) = 1$, tj. pro $t = m(2k\pi - \psi)$. Singularita základní křivky znamená $\sin (\varphi - m\psi) = 0$. Souměrnost je určena vztahem $\cos (\varphi - m\psi) = 0$. Kladná (záporná) orientace znamená $\sin (\varphi - m\psi) > 0$ (< 0). Diskriminant je $\delta = \dfrac{c}{ma \sin (\varphi - m\psi)}$. Dvojné body jsou $B[m(k\pi - \psi + \alpha_k)] = B[m(k\pi - \psi - \alpha_k)]$. Znění vět 2—5 zůstává stejné, ovšem δ je dáno právě uvedeným výrazem.

V úvodu jsem naznačil, že půjde především o vhodnou definici hladkého spojení. Zkušenost stenografů ukazuje, že je třeba žádat, aby obě křivky měly v bodě hladkého přechodu společnou tečnu a stejnou křivost, že však požadavek rovnosti obou prvých a tím spíše obou prvých i obou druhých derivací podle t by byl silný. Dále se ukazuje účelné žádat, aby se při hladkém přechodu pokračovalo v psaní „ve stejném smyslu"; tím také dosáhneme toho, že při hladkém spojení se nezmění situace, pokud jde o body vratu. Pro jednoduchost formulací se vyhneme singulárním křivkám; nečinilo by ovšem zvláštních potíží vyšetřit je zvlášť.

Definice 6. Říkáme, že nesingulární grafické křivky

$$x_1 = x_1(t)\,, \quad y_1 = y_1(t)\,, \tag{1}$$

$$x_2 = x_2(t)\,, \quad y_2 = y_2(t) \tag{2}$$

mají v bodě t hladký přechod, jestliže mají v t styk 2. řádu a jestliže přitom buď t je horním bodem vratu nebo dolním bodem vratu obou křivek nebo (1) i (2) určují stejnou orientaci společné tečny obou křivek v bodě t.

Z elementárních vět diferenciální geometrie snadno plyne:

Věta 6. *Nechť grafická křivka K_1 má rovnice* (1), *grafická křivka K_2 rovnice* (2).

I. Jestliže $y_1'(t) \neq 0$, pak K_1 a K_2 mají v bodě t hladký přechod právě tehdy, když

$$x_1(t) = x_2(t)\,, \quad y_1(t) = y_2(t)\,, \tag{3}$$

$$\operatorname{sgn} y_1'(t) = \operatorname{sgn} y_2'(t)\,, \quad \frac{x_1'(t)}{y_1'(t)} = \frac{x_2'(t)}{y_2'(t)}\,,$$

$$\frac{x_1'(t)\,y_1''(t) - x_1''(t)\,y_1'(t)}{y_1'^3(t)} = \frac{x_2'(t)\,y_2''(t) - x_2''(t)\,y_2'(t)}{y_2'^3(t)}\,.$$

II. Jestliže $y_1'(t) = 0$, $x_1'(t) \neq 0$, pak K_1 a K_2 mají v t hladký přechod právě tehdy, když platí (3) *a když* $y_2'(t) = 0$, $\operatorname{sgn} x_1'(t) = \operatorname{sgn} x_2'(t)$, $y_2''(t)\,x_1'^2(t) = y_1''(t)\,x_2'^2(t)$.

III. Jestliže $y_1'(t) = x_1'(t) = 0$, pak K_1 a K_2 mají v t hladký přechod právě tehdy, když platí (3) *a když*

$$y_2'(t) = x_2'(t) = 0\,, \quad \operatorname{sgn} y''(t) = \operatorname{sgn} y_2''(t)\,, \quad \frac{x_1''(t)}{y_1''(t)} = \frac{x_2''(t)}{y_2''(t)}\,.$$

Lze se přitom snadno přesvědčit, že nezáleží na tom, zda (1) a (2) jsou rovnice v pravoúhlých nebo kosoúhlých souřadnicích.

Teorie spojování grafických prvků má různé otázky, jejichž řešení leckdy není početně technicky jednoduché. Omezím se tu na jednoduchou otázku, která však má obzvláštní praktickou důležitost. Jde o to — názorně řečeno — že každé dva typy charakteru 1 lze hladce spojit buď přímo nebo prostřednictvím vhodného prvku charakteru 2. Dokonce je to většinou možné ve společných vrcholech příslušných křivek. V praxi je nutno spojovat znaky různých velikostí a s různým vzájemným posunutím ve směru osy y (na př. při „zvyšování" a „snižování" znaků v těsnopise); možnost hladkého spojení bude i tu zaručena, neboť u všech typů bude možno příslušné rozměry ve směru osy y předem volit, při čemž, jak se ukáže, hladký přechod od křivky k vhodné křivce stejného typu s libovolnou y-amplitudou je možný v kterémkoli společném vrcholu.

Věta 7. *Nechť K_1 je daná nesingulární grafická křivka charakteru* 1 *a typu T_1. Buď dán typ T_2 charakteru* 1 *a číslo $B_2 > 0$. Nutná a postačující podmínka, aby existovala nesingulární grafická křivka K_2 charakteru* 1, *typu T_2 a s y-amplitudou B_2, taková, že existuje hladký přechod mezi K_1 a K_2, je: buďto T_1 a T_2 mají* *stejnou orientaci nebo aspoň jeden z nich je N. Dokonce je možno určit K_2 tak, že bod přechodu je společným dolním nebo společným horním vrcholem obou křivek; v dolním vrcholu je to možné právě tehdy, když buďto pro každý z obou typů platí, že má kladnou orientaci nebo je N, anebo oba typy jsou ${}^-V$, anebo oba jsou ${}^-D$; v horním vrcholu je to možné právě tehdy, když buďto pro každý z obou typů platí, že má zápornou orientaci nebo je N, anebo oba typy jsou ${}^+V$, anebo oba jsou ${}^+D$. Křivka K_2 neexistuje právě tehdy, když T_1 a T_2 mají opačné orientace a přitom žádný z nich není N.*

Důkaz. I. Rovnice křivky K_1 můžeme psát ve tvaru

$$X_1 = A_1 \cos(t + \Phi_1) + C_1 t\,, \quad Y_1 = B_1 \cos t\,. \tag{4}$$

Uvažujme dolní vrchol $t = \pi$. Jestliže křivka K_2 charakteru 1 má rovněž v bodě π dolní vrchol, můžeme její rovnice psát ve tvaru

$$X_2 = A_2 \cos(t + \Phi_2) + C_2 t + D_2\,, \quad Y_2 = B_2 \cos t + E_2 \tag{5}$$

(neboť předpokládáme-li $Y_2 = B_2 \cos(t + \Psi) + E_2$, můžeme tu volit $\Psi = 0$) Nechť K_1 a K_2 mají v bodě π hladký přechod.

Buď nejprve $X_1'(\pi) = A_1 \sin \Phi_1 + C_1 \neq 0$, takže K_1 nemá v π bod vratu Pak podle věty 6 II je $B_2 X_1'^2(\pi) = B_1 X_2'^2(\pi)$ a současně $\operatorname{sgn} X_1'(\pi) = \operatorname{sgn} X_2'(\pi)$, takže $\sqrt{B_2} X_1'(\pi) = \sqrt{B_1} X_2'(\pi)$, neboli

$$\sqrt{B_2}(A_1 \sin \Phi_1 + C_1) = \sqrt{B_1}(A_2 \sin \Phi_2 + C_2)\,. \tag{6}$$

Když předně $A_1 \sin \Phi_1 + C_1 > 0$, pak (vzhledem k $C_1 \geqq 0$, $A_1 > 0$) buď $\sin \Phi_1 > 0$ a K_1 má kladnou orientaci, nebo $\sin \Phi_1 = 0$ a podle věty 2 K_1 nemá dvojné body a je typu N, nebo $\sin \Phi_1 < 0$ a $C_1 > A_1 |\sin \Phi_1|$, takže $|\delta_1| > 1$ a podle věty 2 opět K_1 nemá dvojné body a je tedy typu N. Podle (6) je také $A_2 \sin \Phi_2 + C_2 > 0$ a stejným způsobem zjistíme, že buď K_2 má kladnou orientaci nebo je typu N. Jestliže za druhé $A_1 \sin \Phi_1 + C_1 < 0$, pak je $\sin \Phi_1 < 0$, takže K_1 má zápornou orientaci, a $|\delta_1| < 1$, takže buď $c = 0$ a K_1 je základní normální křivka, tedy typu ${}^-D$, nebo $c > 0$ a podle věty 2 má K_1 dvojné body a je tudíž opět typu ${}^-D$. Podle (6) je také $A_2 \sin \Phi_2 + C_2 < 0$, takže totéž platí o K_2.

Buď za druhé $X_1'(\pi) = A_1 \sin \Phi_1 + C_1 = 0$. Protože K_1 není singulární a nemůže tedy být současně $\sin \Phi_1 = C_1 = 0$, je nutně $\sin \Phi_1 < 0$ a K_1 má v π bod vratu, takže K_1 je typu ${}^-V$. Protože obě křivky mají v π hladký přechod, je také $X_2'(\pi) = A_2 \sin \Phi_2 + C_2 = 0$ a také K_2 je typu ${}^-V$.

II. Nechť nyní naopak K_1 má buď kladnou orientaci nebo je typu N. Pak je buď $\sin \Phi_1 > 0$ nebo $\sin \Phi_1 = 0$ a $C_1 > 0$ nebo $\sin \Phi_1 < 0$ a $|\delta| > 1$; v každém případě je $A_1 \sin \Phi_1 + C_1 < 0$. Jestliže typ T_2 charakteru 1 má kladnou orientaci a je-li (5) jakákoli křivka typu T_2, je $A_2 \sin \Phi_2 + C_2 > 0$; ať je typ T_2 jinak jakýkoli, můžeme zřejmě zvolit A_2, Φ_2 a C_2 tak, že platí (6), načež podle věty 6 II mají K_1 a K_2 v π hladký přechod, jestliže ještě $X_1(\pi) = X_2(\pi)$, $Y_1(\pi) = Y_2(\pi)$ — toho však zřejmě můžeme dosáhnout vhodnou volbou koeficientů D_2, E_2. Celkem tedy: má-li K_1 kladnou orientaci nebo typ N, existuje při jakémkoli kladném typu T_2 charakteru 1 křivka K_2 typu T_2, která má s K_1 v bodě π hladký přechod.

Zcela obdobně zjistíme: má-li K_1 kladnou orientaci nebo je typu N a je-li $T_2 = 1N$, existuje křivka K_2 typu T_2, která má s K_1 v bodě π hladký přechod; obdobně pro $T_1 = T_2 = 1{}^-D$ nebo pro $T_1 = T_2 = 1{}^-V$.

III. Docela analogicky probíhá důkaz pro horní vrchol $t = 2\pi$.

IV. Jestliže však T_1 a T_2 mají opačné orientace a žádný z nich není N, nemůže hladký přechod existovat pro žádné t. Není-li (vynechávám indexy) $X'(t) = Y'(t) = 0$, tedy nejde-li o bod vratu, a je-li tedy např. $Y'(t) \neq 0$, musí $Y'(t)$ mít v bodě hladkého přechodu na obou křivkách stejné znamení, takže stejné znamení na obou křivkách musí mít také výraz $X'(t)\, Y''(t) - X''(t)\, Y'(t) = AB[\sin\,(t + \Phi)\cos t - \sin t \cos\,(t + \Phi)] - BC \cos t = B(A \sin \Phi - C \cos t)$. Není-li křivka typu N a není-li t bodem vratu, pak podle vět 2, 4 je $|\delta| < 1$, tedy $A\,|\sin \Phi| > C$ a tím spíše $A\,|\sin \Phi| > C\,|\cos t|$, takže výraz $A \sin \Phi - C \cos t$ je stále kladný (záporný) v případě kladné (záporné) orientace. Pokud pak jde o body vratu, může být podle věty 4 společným bodem vratu jen společný horní (dolní) vrchol v případě kladné (záporné) orientace obou křivek a nemůže tedy ani společný bod vratu existovat, je-li orientace obou křivek opačná.

Poznámka. Části I—III předcházejícího důkazu by bylo možno stručně formulovat asi takto: Pro $t = \pi$, pokud $X_1'(\pi) \neq 0$, je podle věty 6 II podmínka hladkého přechodu (6) a K_2 lze určit právě tehdy, když typ T_2 splňuje požadavek $\operatorname{sgn}\,(C_1 + A_1 \sin \Phi_1) = \operatorname{sgn}\,(C_2 + A_2 \sin \Phi_2)$. Tvrzení pak plyne z vět 2, 4. Obdobně pro $t = 2\pi$. V případě, že uvažovaný vrchol je bodem vratu obou křivek, je situace zřejmá. Splnění rovnic $X_1(t) = X_2(t)$, $Y_1(t) = Y_2(t)$ možno ovšem dosáhnout vhodnou volbou koeficientů D_2, E_2. Důkazu následující věty dám už takovou stručnou formu.

Věta 8. *Nechť K_1 je daná nesingulární grafická křivka charakteru 1 a typu T_1. Buď dán typ T_2 charakteru 1 a čísla $B_2 > 0$, $b > 0$. Nutná a postačující podmínka, aby existovala grafická křivka K charakteru 2 s y-amplitudou b a současně nesingulární grafická křivka K_2 charakteru 1, typu T_2 a s y-amplitudou B_2 tak, že K_1 a K mají hladký přechod ve společném dolním vrcholu a že K a K_2 mají hladký přechod ve společném horním vrcholu, je: buďto T_1 má kladnou orientaci nebo je N a přitom T_2 má zápornou orientaci nebo je N, anebo $T_1 = 1^-D$, $T_2 = 1^+D$, anebo $T_1 = 1^-V$, $T_2 = 1^+V$.*

Důkaz. I. Nechť K_1 má zase rovnice (4). Rovnice křivky K předpokládejme ve tvaru

$$x = a \cos\,(t + \varphi) + \frac{c}{2}\, t + d\,, \quad y = b \cos\left(\frac{t}{2} + \psi\right) + e\,, \tag{7}$$

rovnice křivky K_2 ve tvaru

$$X = A \cos\,(t + \Phi) + Ct + D\,, \quad Y = B \cos\,(t + \Psi) + E\,. \tag{8}$$

Uvažujme dolní vrchol $t = \pi$ křivky K_1. Protože $t = \pi$ má být dolní vrchol křivky K, tedy $\cos\,(\frac{1}{2}\pi + \psi) = -1$, můžeme zvolit $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Buď nejprve $X_1'(\pi) = A_1 \sin \Phi_1 + C_1 \neq 0$. Je ovšem $Y_1'(\pi) = 0$, takže podle věty 6 II vypočteme, že podmínka hladkého přechodu mezi K_1 a K při $t = \pi$ je: $\sqrt{b}(A_1 \sin \Phi_1 + C_1) = 2\sqrt{B_1}(a \sin \varphi + \frac{1}{2}c)$ (a dále $x(\pi) = X_1(\pi)$, $y(\pi) = Y_1(\pi)$, čehož ovšem můžeme dosáhnout vhodnou volbou koeficientů d, e).

Za horní vrchol křivky K, pro který musí platit $\cos\,(\frac{1}{2}t + \psi) = \cos\,(\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}\pi) = 1$, zvolme $t = 3\pi$. Protože $t = 3\pi$ má být také horní vrchol pro K_2, tj. $\cos\,(3\pi + \Psi) = 1$, můžeme volit $\Psi = \pi$. Znovu podle věty 6 II dostaneme jako podmínku hladkého přechodu mezi K a K_2 při $t = 3\pi$ vztah $\sqrt{b}(A \sin \Phi + C) = 2\sqrt{B}(a \sin \varphi + \frac{1}{2}c)$, při čemž vhodnou volbou koeficientů D, E dosáhneme splnění vztahů $X(3\pi) = x(3\pi)$, $Y(3\pi) = y(3\pi)$. Z podmínek při

$t = \pi$ a při $t = 3\pi$ je vidět, že K lze určit právě tehdy, když sgn $(A_1 \sin \Phi_1 + C_1) = \operatorname{sgn}(A \sin \Phi + C)$; a je-li tomu tak, potom lze zřejmě určit také K_2. Přitom diskriminant křivky K_1 je $\delta_1 = \dfrac{C}{A_1 \sin \Phi_1}$, kdežto diskriminant křivky K_2 je $\delta_2 = \dfrac{C}{A \sin (\Phi - \pi)} = -\dfrac{C}{A \sin \Phi}$. Podle vět 2, 4 je $A_1 \sin \Phi_1 + C_1 > 0$ tehdy, když K_1 má kladnou orientaci nebo je typu N, a $A_1 \sin \Phi_1 + C_1 < 0$, když K_1 je typu ${}^-D$; a na druhé straně $A \sin \Phi + C > 0$ neboli $-A \sin (\Phi - \pi) + C > 0$, jestliže K_2 má zápornou orientaci nebo je typu N, a $A \sin \Phi + C < 0$, jestliže K_2 je typu ${}^+D$.

II. Buď nyní $X_1'(\pi) = 0$, takže K_1 je typu ${}^-V$. Jestliže K, K_2 existují, pak také K má v π bod vratu. Protože K má sudý charakter, má podle věty 4 také v horním vrcholu $t = 3\pi$ bod vratu. Tedy také K_2 má v horním vrcholu bod vratu a je tedy typu ${}^+V$. Dokážeme nyní, že takové K, K_2 skutečně existují. Abychom určili K, aby měla s K_1 hladký přechod ve společném dolním vrcholu π, stačí provést toto: zvolit $\psi = \frac{1}{2}\pi$, podle věty 6 III splnit podmínku $\dfrac{x''(\pi)}{y''(\pi)} = \dfrac{X_1''(\pi)}{Y_1''(\pi)}$, která dává po úpravě $4aB_1 \cos \varphi = bA_1 \cos \Phi_1$, dále pro c splnit podmínku $c = 2a \sin (\varphi - 2\psi) = -2a \sin \varphi$, takže musí být $\sin \varphi < 0$, a vhodně volit konstanty d, e. Aby pak existoval hladký přechod mezi K a K_2 v horním vrcholu 3π, stačí zvolit $\Psi = \pi$, opět podle věty 6 III splnit podmínku $\dfrac{x''(3\pi)}{y''(3\pi)} = \dfrac{X''(3\pi)}{Y''(3\pi)}$ neboli po úpravě $4aB \cos \varphi = bA \cos \Phi$, pro C podmínku $A \sin \Phi = C$, $\sin \Phi > 0$ a vhodně volit koeficienty D, E.

Nyní zůstává otevřeno ještě spojení mezi 1^-V a 1^+D a mezi 1^-D a 1^+V, což vyřídíme těmito dvěma větami.

Věta 9. *Nechť K_1 je daná grafická křivka typu 1^-D s rovnicemi* (4). *Nechť $B > 0$, $\beta > -B_1$. Pak existuje grafická křivka K typu $2V$ taková, že K_1 a K mají hladký přechod v bodě $t_0 \in (\pi, 2\pi)$ (tj. mezi dolním a následujícím horním vrcholem křivky K_1) takovém, že $\beta > Y(t_0) = B_1 \cos t_0$, a že β je y-ová souřadnice horního vrcholu křivky K. A dále existuje grafická křivka K_2 typu 1^+V a s y-amplitudou B tak, že K a K_2 mají hladký přechod ve společném horním vrcholu (nejblíže následujícím horním vrcholu křivky K).*

D ů k a z. I. Zvolme $t_0 \in (\pi, 2\pi)$ tak blízko π, aby $\beta > B_1 \cos t_0$. Předpokládejme, že křivka K, kterou máme určit, má rovnice tvaru (7), a zvolme $\psi = \frac{1}{2}t_0$. Požadavek, aby horní vrcholy křivky K měly y-souřadnici β, znamená $b + e = \beta$, a požadavek $Y_1(t_0) = y(t_0)$ znamená $B_1 \cos t_0 = b \cos (\frac{1}{2}t_0 + \psi) + e = b \cos t_0 + e$. Z těchto dvou rovnic můžeme určit

$$b = \frac{\beta - B_1 \cos t_0}{1 - \cos t_0} \tag{9}$$

a e. Požadavek sgn $Y_1'(t_0) = \operatorname{sgn} y'(t_0)$ (věta 6 I) je zřejmě splněn. Protože K má být typu $2V$, budeme požadovat $c = 2a \sin (\varphi - 2\psi)$. Podmínka $\dfrac{X_1'(t_0)}{Y_1'(t_0)} = \dfrac{x'(t_0)}{y'(t_0)}$ pro hladký přechod z věty 6 I dává pak pro křivky (4) a (7):

$$\tfrac{1}{2}b[A_1 \sin (t_0 + \Phi_1) - C_1] = B_1[a \sin (t_0 + \varphi) - a \sin (\varphi - 2\psi)]\,,$$

a protože $2\psi = t_0$, dostaneme po úpravě

$$b[A \sin (t_0 + \Phi_1) - C_1] = 4aB_1 \sin t_0 \cos \varphi \,. \tag{10}$$

Podmínka $y'^3(t_0)[X_1'(t_0)\, Y_1''(t_0) - X_1''(t_0)\, Y_1'(t_0)] = Y_1'^3(t_0)[x'(t_0)\, y''(t_0) - x''(t_0)\, y'(t_0)]$ dává vzhledem k $\frac{1}{2}t_0 + \psi = t_0$:

$$\frac{b^3}{8} \sin^3 t_0 [A_1 B_1 \sin (t_0 + \Phi_1) \cos t_0 - A_1 B_1 \sin t_0 \cos (t_0 + \Phi_1) - B_1 C_1 \cos t_0] =$$

$$= B_1^3 \sin^3 t_0 \left[\frac{ab}{4} \sin (t_0 + \varphi) \cos t_0 - \frac{ab}{4} \cos t_0 \sin (\varphi - t_0) - \frac{ab}{2} \cos (t_0 + \varphi) \sin t_0\right].$$

Výraz v lomených závorkách vlevo dává po úpravě $B_1(A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0)$, výraz v lomených závorkách vpravo dává

$$\frac{ab}{4} (\cos t_0\, 2 \sin t_0 \cos \varphi - 2 \sin t_0 (\cos t_0 \cos \varphi - \sin t_0 \sin \varphi)] = \frac{ab}{2} \sin^2 t_0 \sin \varphi,$$

takže konečně dostaneme

$$b^2(A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0) = 4aB_1^2 \sin^2 t_0 \sin \varphi \,. \tag{11}$$

Položme nyní

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{B_1}{b} \sin t_0 \frac{A_1 \sin(t_0 + \Phi_1) - C_1}{A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0} \,. \tag{12}$$

Je $b > 0$ a K_1 je typu ${}^{-}D$, takže $|A_1 \sin \Phi_1| > C_1 > |C_1 \cos t_0|$, tedy $A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0 < 0$ a zlomek (12) má smysl. Když $t_0 \to \pi$ zprava, pak $A_1 \sin (t_0 + \Phi_1) - C_1 \to -A_1 \sin \Phi_1 - C_1 > 0$, $A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0 \to A_1 \sin \Phi_1 + C_1 < 0$ a podle (9) $b \to \frac{\beta + B_1}{2} > 0$ (protože $\beta > -B_2$), takže $\operatorname{cotg} \varphi \to 0$. Jestliže tedy φ určujeme tak, aby platilo (12) a aby přitom bylo $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, bude $\varphi \to \frac{3}{2}\pi$ pro $t_0 \to \pi$ zprava. Můžeme tedy volit t_0 tak, aby $\varphi > t_0$ a přitom $\varphi \in (\pi, 2\pi)$, takže $\varphi - t_0 \in (0, \pi)$, čímž je vyhověno požadavku $\sin (\varphi - 2\psi) = \sin (\varphi - t_0) > 0$, jak je to potřeba pro typ $2V$.

t_0 a φ je nyní už definitivně zvoleno. Tím je podle předcházejícího určeno také ψ, b, e. Určíme nyní a z rovnice (11). Protože $\sin t_0 \neq 0$, $\sin \varphi < 0$ (neboť $\varphi \in (\pi, 2\pi)$), $b > 0$, $A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0 < 0$, je opravdu $a > 0$. Podmínka (11) je pak splněna. Dosadíme-li vypočtenou hodnotu pro a do podmínky (10), dostáváme

$$b[A_1 \sin(t_0 + \Phi_1) - C_1) = \frac{b^2(A_1 \sin \Phi_1 - C_1 \cos t_0)}{B_1^2 \sin^2 t_0 \sin \varphi} B_1 \sin t_0 \cos \varphi$$

a dosadíme-li sem za $\operatorname{cotg} \varphi$ podle (12), vidíme ihned, že i podmínka (10) je splněna.

Nyní položme ještě $c = 2a \sin (\varphi - 2\psi) = 2a \sin (\varphi - t_0) > 0$ a konečně určeme d z rovnice $x(t_0) = X(t_0)$.

II. Nyní máme určit K_2 typu 1^+V s rovnicemi tvaru (8), aby měla s K hladký přechod v horním vrcholu. Protože $\psi = \frac{1}{2}t_0$, dostaneme horní vrcholy křivky K pro $\cos (\frac{1}{2}t + \frac{1}{2}t_0) = 1$, takže $t = 4\pi - t_0$ je horní vrchol pro nejmenší možnou hodnotu $t > t_0$. Protože $4\pi - t_0$ má být také horní vrchol křivky K_2, tj. má být $\cos (4\pi - t_0 + \Psi) = 1$, můžeme položit $\Psi = t_0$. Podle věty 6 III je podmínkou hladkého přechodu křivek K a K_2:

$$\frac{X''(4\pi - t_0)}{Y''(4\pi - t_0)} = \frac{x''(4\pi - t_0)}{y''(4\pi - t_0)}\,, \text{ tedy po úpravě}$$

$$4aB \cos(\varphi - t_0) = bA \cos(\Phi - t_0)\,. \tag{13}$$

Protože K_2 musí být nutně typu 1^+V, musí být

$$\frac{C}{A \sin(\Phi - \Psi)} = \frac{C}{A \sin(\Phi - t_0)} = 1\,. \tag{14}$$

Protože jsme viděli, že $\sin(\varphi - t_0) > 0$, lze volit $\Phi = \varphi$, načež z (13) určíme A a z (14) určíme C. Konečně stanovíme D z rovnice $x(4\pi - t_0) = X(4\pi - t_0)$ a E z rovnice $y(4\pi - t_0) = Y(4\pi - t_0)$.

Věta 10. *Nechť K_1 je daná grafická křivka typu 1^-V s rovnicemi* (4). *Nechť $b > 0$, $B > 0$. Pak existuje grafická křivka K typu $2V$ s y-amplitudou b a grafická křivka K_2 typu 1^+D s y-amplitudou B tak, že K_1 a K mají hladký přechod ve společném dolním vrcholu $t = \pi$ a K a K_2 mají hladký přechod v bodě $t_0 \in (\pi, 3\pi)$ (mezi dvěma sousedními vrcholy křivky K).*

Důkaz. I. Předpokládejme rovnice křivky K ve tvaru (7). Křivka K má mít v bodě $t = \pi$ dolní vrchol, tedy má být $\cos(\frac{1}{2}\pi + \psi) = -1$. Položme $\psi = \frac{1}{2}\pi$. Podle věty 6 III má být splněna podmínka hladkého přechodu $\dfrac{x''(\pi)}{y''(\pi)} = \dfrac{X_1''(\pi)}{Y_1''(\pi)}$, tj.

$$\frac{A_1 \cos(\pi + \Phi_1)}{B_1 \cos \pi} = \frac{a \cos(\pi + \varphi)}{\frac{1}{4}b \cos \pi} \quad \text{neboli } 4aB_1 \cos\varphi = bA_1 \cos\Phi_1.$$

Zřejmě můžeme určit $a > 0$, $b > 0$, φ tak, aby tento vztah byl splněn a aby přitom $\varphi \in (\pi, 2\pi)$; pak $\sin\varphi < 0$, tedy $\sin(\varphi - 2\psi) = \sin(\varphi - \pi) = = -\sin\varphi > 0$ a položíme-li $c = 2a \sin(\varphi - 2\psi) = -2a \sin\varphi$, bude K typu $2V$. Z podmínek $x(\pi) = X_1(\pi)$, $y(\pi) = Y_1(\pi)$ vypočteme d, e. Tím je úplně určena křivka K, jejíž rovnice mají tvar

$$x = a \cos(t + \varphi) - a \sin\varphi \,.\, t + d\,, \quad y = b \cos(\tfrac{1}{2}t + \tfrac{1}{2}\pi) + e\,.$$

II. Nyní máme určit křivku K_2 s rovnicemi (8) (kde B je dáno) tak, aby požadavkům věty bylo vyhověno.

Zaveďme transformaci souřadnic $x^* = -x$, $y^* = -y$ a místo t zaveďme nový parametr $z = -t + 5\pi - \Psi$. Tím dostaneme z K a K_2 grafické křivky K^*, K_2^* s rovnicemi

$$x^* = a \cos(z + \Psi - \varphi) - a \sin\varphi \,.\, z + d^*, \quad y^* = b \cos(\tfrac{1}{2}z + \tfrac{1}{2}\Psi) - e\,, \tag{15}$$

$$X^* = A \cos(z + \Psi - \Phi) + Cz + D^*\,, \quad Y^* = B \cos z - E\,. \tag{16}$$

Protože $-a \sin\varphi = a \sin[(\Psi - \varphi) - 2\frac{1}{2}\Psi]$, je K^* typu $2V$ právě tehdy, když K je typu $2V$. K_2^* má diskriminant

$$\delta_2^* = \frac{C}{A \sin(\Psi - \Phi)} \text{ a } K_2 \text{ má diskriminant } \delta_2 = \frac{C}{A \sin(\Phi - \Psi)}\,,$$

tedy je $\delta_2^* = -\delta_2$, takže K_2^* je typu 1^-D právě tehdy, když K_2 je typu 1^+D.

Předpokládejme nyní, že koeficienty $A, C, D^*, B, E, \Phi, \Psi$ lze určit tak, že $\Psi \in (\pi, 2\pi)$ a že K^* a K_2^* mají hladký přechod v bodě $z_0 = \Psi$. Tomuto bodu odpovídá původní $t_0 = -z_0 + 5\pi - \Psi = 5\pi - 2z_0$. Pak K a K_2 mají hladký přechod v bodě t_0, neboť platí $y'(t_0) = -\frac{1}{2}b \sin(\frac{1}{2}t_0 + \frac{1}{2}\pi) = -\frac{1}{2}b \sin z_0$,

$Y'(t_0) = - B \sin (t_0 + \Psi) = - B \sin z_0$, takže $\operatorname{sgn} y'(t_0) = \operatorname{sgn} Y'(t_0)$, a styk 2. řádu zůstává zřejmě při přechodu od K^* a K_2^* ke K a K_2 zachován. Přitom, protože $z_0 \in (\pi, 2\pi)$, je $t_0 \in (\pi, 3\pi)$. Dokážeme-li tedy, že uvedený předpoklad je splněn, bude tím dokázána také existence K_2.

Pro zjednodušení označení pišme nyní po řadě $t, x, y, X, Y, \varphi, \psi, \Phi, d, e, D, E$ místo $z, x^*, y^*, X^*, Y^*, \Psi - \varphi, \frac{1}{2}\Psi, \Psi - \Phi, d^*, -e, D^*, -E$; místo $\varphi = - (\Psi - \varphi) + 2\frac{1}{2}\psi$ přijde pak $- (\varphi - 2\psi)$. Rovnice (15), (16) křivek K^*, K_2^* se tím změní na

$$x = a \cos (t + \varphi) + a \sin (\varphi - 2\psi)\, t + d\,, \quad y = b \cos (\tfrac{1}{2}t + \psi) + e\,, \tag{17}$$

$$X = A \cos (t + \Phi) + Ct + D\,, \quad Y = B \cos t + E\,. \tag{18}$$

Zvolme $t_0 \in (\pi, 2\pi)$ a položme $\psi = \frac{1}{2}t_0$. Všechny koeficienty v (17) jsou nyní dány, zatím co v (18) je dáno $B > 0$. Máme dokázat, že ostatní koeficienty v (18) lze volit tak, že křivka (18) je typu 1-D a že obě křivky mají v t_0 hladký přechod.

Zvolme $\delta = \dfrac{C}{A \sin \Phi}$ libovolně v intervalu $(-1, 0)$, takže K_2^* bude typu 1-D. Z důkazu věty 9 (viz (12)) vyplývá, že máme určit Φ tak, aby

$$\operatorname{cotg} \varphi = \frac{B}{b} \sin t_0 \frac{A \sin (t_0 + \Phi) - C}{A \sin \Phi - C \cos t_0}\,, \tag{19}$$

při čemž má být $\sin \Phi < 0$.

Je $\dfrac{A \sin (t_0 + \Phi) - C}{A \sin \Phi - C \cos t_0} = \dfrac{A \sin (t_0 + \Phi) - \delta A \sin \Phi}{A \sin \Phi - \delta A \sin \Phi \cos t_0} =$

$= \dfrac{\cos \Phi \sin t_0 + \sin \Phi (\cos t_0 - \delta)}{\sin \Phi(1 - \delta \cos t_0)}$. Vyšetřme průběh tohoto zlomku, když Φ probíhá (otevřený) interval $(-\pi, 0)$. Pak $\sin \Phi \neq 0$, takže zlomek můžeme psát ve tvaru $\dfrac{\operatorname{cotg} \Phi \sin t_0 + (\cos t_0 - \delta)}{1 - \delta \cos t_0}$. Protože $t_0 \in (\pi, 2\pi)$, je $\sin t_0 < 0$; proto limita zlomku je rovna $-\infty$ pro $\Phi \to -\pi$ zprava a je rovna $+\infty$ pro $\Phi \to 0$ zleva. Nabývá tedy zlomek všech od nuly různých reálných hodnot, když Φ probíhá interval $(-\pi, 0)$, takže existuje $\Phi \in (-\pi, 0)$, pro které je (19) splněno.

Dále z důkazu věty 9 (viz (11)) vyplývá, že máme určit $A > 0$ z rovnice $b^2(A \sin \Phi - C \cos t_0) = 4aB^2 \sin^2 t_0 \sin \varphi$, tj.

$$b^2 A \sin \Phi(1 - \delta \cos t_0) = 4aB^2 \sin^2 t_0 \sin \varphi\,. \tag{20}$$

Přitom jestliže φ^* znamená číslo, které se v dřívějším označení nazývalo φ, pak bylo $\varphi^* \in (\pi, 2\pi)$. O t_0 jsme dosud předpokládali jen, že je v intervalu $(\pi, 2\pi)$; můžeme je volit tak, aby přitom bylo $t_0 - \varphi^* = \Psi - \varphi^* = \varphi < 0$. Pak bude $\sin \varphi < 0$, takže z (20) lze skutečně určit $A > 0$. Nyní položíme $C = \delta A \sin \Phi$ a konečně určíme D, resp. E z rovnice $X(t_0) = x(t_0)$, resp. $Y(t_0) = y(t_0)$, čímž jsme hotovi.

Věta 11. *Tvrzení vět 7—10 zůstávají v platnosti, požadujeme-li, aby křivky K_1, K_2, K byly regulární (pokud jsou odvozené).*

D ů k a z. Z důkazu věty 7 je snadno patrno, že diskriminant $\dfrac{C_2}{A_2 \sin \Phi_2}$ křivky K_2 lze (v rámci definice příslušného typu) předem volit — můžeme tedy dosáhnout toho, aby K_2 byla regulární; v případě, že $\sin \Phi_2 = 0$, je K_2 typu

N a tedy automaticky regulární. Obdobně pokud jde o důkaz věty 8 a diskriminant $\dfrac{c}{2a \sin(\varphi - 2\psi)} = -\dfrac{c}{2a \sin \varphi}$ křivky K a diskriminant $-\dfrac{C}{A \sin \Phi}$ křivky K_2. Ve větě 9 jsou K i K_2 typu V a tedy automaticky regulární. Ve větě 10 je K rovněž typu V, zatím co diskriminant křivky K_2 jsme v důkazu této věty předem volili (v rámci definice typu).

Poznámka. Předpokládejme, že křivka K_1 ve větách 7, 8 je souměrná, tj. že $\cos \Phi_1 = 0$. Z důkazů těchto vět snadno nahlédneme, že můžeme A_2, resp. a, resp. A zvolit tak, aby $|\sin \Phi_2| = |\sin \varphi| = |\sin \Phi| = 1$. Protože přitom $\Psi_2 = 0$, $\psi = \frac{1}{2}\pi$, $\Psi = \pi$, je pak $\cos(\Phi_2 - 2\Psi_2) = \cos(\varphi - 2\psi) = \cos(\Phi - 2\Psi) = 0$; takže K_2 ve větě 7 i K a K_2 ve větě 8 jsou souměrné. Jinými slovy, můžeme dokonce požadovat, aby ve větách 7, 8 byly K_1, K_2 i K regulární souměrné křivky. V případech řešených ve větách 9, 10 lze aspoň dosáhnout toho, aby K_1 i K_2 byly souměrné regulární křivky, postupným zapojením dvou regulárních souměrných křivek K_3 a K_4 charakteru 2, a to tak, že nejprve určíme K_3, aby měla hladký přechod s K_1 ve společném dolním vrcholu (což je možné na základě věty 8), načež můžeme zvolit K_4 tak, že K_3 a K_4 mají hladký přechod ve společném inflexním bodě (připomeňme, že křivka sudého charakteru má mezi dvěma sousedními vrcholy aspoň jeden inflexní bod), a konečně (na základě věty 8) můžeme určit souměrnou regulární křivku K_2 tak, aby měla s K_4 hladký přechod v horním vrcholu.

Příklady. 1. Všimněme si ještě, aniž bychom se zdržovali modifikací definice hladkého spojení pro tento případ. případu singulárních křivek charakteru 1, tj. úseček. Zřejmě hladký přechod mezi úsečkou a jinou grafickou křivkou je možný jen v bodech vratu nebo v inflexních bodech druhé křivky; nemá-li např. křivka charakteru 1 jedno ani druhé, je možno přechod uskutečnit pomocí vhodné křivky charakteru 2, která má podle věty 5 nutně inflexní body (v praxi se však úsečky ve spojení zpravidla nahrazují oblouky křivek charakteru 1 s dostatečně malou křivostí). Hladký přechod mezi dvěma úsečkami daných různých směrů není ovšem přímo možný. V praxi dochází tu zpravidla k deformaci úhlů v sinusoidy nebo k nahrazení některé z úseček obloukem křivky typu V, což v případě sinusoidy prakticky nemusí příliš vadit, je-li úhel obou úseček tak malý, že deformace není pro oko příliš patrná, v druhém případě pak, je-li nahrazená úsečka dosti krátká nebo křivost nahrazujícího oblouku dosti malá.

2. Matematická teorie nám umožní pochopit např. nepříjemnost spojování znaků opačných orientací. Máme-li např. spojit prvý znak č. 13 s prvým znakem č. 14, znamená to, že dejme tomu uskutečníme pohyb zdola nahoru při spojivce přechodem k znaku č. 23, což znamená zpomalení psaní. Proto se toto spojení při rychlém psaní snadno deformuje v sinusoidu nebo ve zkrácenou cykloidální křivku.

3. Píšeme-li znaky č. 20 jako části znaku č. 19, dochází u nich ve spojení nutně k deformaci „špice" v kličku, má-li spojení být hladké, neboť jinak by vznikal ve vrcholu bod vratu, zatím co křivka, z níž je odvozen znak č. 19, nemá body vratu.

4. Prvý znak č. 9 je možno psát ve spojení bez deformace špice v kličku jen tak, že jej neodvodíme z elipsy, nýbrž z cykloidy; potom však (na rozdíl od prvého znaku č. 13) musí tečna v bodě vratu mít šikmý sklon, takže křivka nemůže být souměrná. Píšeme-li prvý znak č. 9 jako část elipsy, dochází k deformaci v kličku z obdobného důvodu jako u příkladu 3. Působí tedy horní špice tohoto znaku při spojování potíže a proto je účelné použít tohoto znaku tak, aby se vyskytoval převážně na začátku slov (v naší těsnopisné soustavě je použit pro hlásku „p", která se skutečně v češtině často vyskytuje především na začátku slov).

5. Z rovnice (6) vyčteme, že zvětšování znaku č. 15 při jeho spojování s prvým znakem č. 13, ke kterému při rychlém psaní zpravidla dochází, píšeme-li tyto znaky v praxi běžným tvarem, je zákonité. Jestliže na příklad koeficienty s indexem 1 se vztahují na znak č. 15, pak při přibližně stejných C, Φ je $A_1 > A_2$, takže musí být $B_2 < B_1$, aby (6) byla splněna. Jestliže chceme zachovat stejnou velikost y-amplitud obou znaků, dojde k určité deformaci tvaru nebo k deformaci sklonu znaku (aby se zmenšilo $\sin \Phi_1$).

Vcelku lze říci, že matematická teorie psaní nám umožní vysvětlit většinu případů zákonitých deformací znaků při rychlém psaní.