Milan Sekanina

O rozložení množin v euklidovských prostorech

Pokroky matematiky, fyziky a astronomie, Vol. 5 (1960), No. 3, 245--248

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136989

MATEMATIKA

O ROZLOŽENÍ MNOŽIN V EUKLIDOVSKÝCH PROSTORECH*)

MILAN SEKANINA, Brno

Předmětem této přednášky je několik problémů týkajících se pokrytí euklidovského prostoru množinami předepsaného typu. S otázkami pokrytí se setkáváme nejen v elementární geometrii, ale i v teorii automorfních funkcí, teorii míry, teorii čísel apod. Některé z problémů, týkajících se tohoto předmětu, sehrály v matematice velmi důležitou roli. Byl to například paradoxální rozklad kulové plochy, sestrojený Haussdorfem, nebo hypothesa Minkovského o zaplnění euklidovského prostoru krychlemi, řešená Hajósem.

Ve své přednášce se zmíním o třech otázkách. Každá z nich je vzata z jiného okruhu úvah, při čemž každý následující případ je zobecněním předcházejícího.

1.

1.1. R o z k l a d e m n-rozměrného euklidovského prostoru E_n rozumíme systém $\mathfrak{S}$ neprázdných, navzájem disjunktních podmnožin $S \subset E_n$ takový, že $\sum_{\mathfrak{S}} S = E_n$.

1.2. O množině M říkáme, že je r o z k l a d o v o u m n o ž i n o u (resp. p ř í m o r o z k l a d o v o u m n o ž i n o u) prostoru E_n, existuje-li rozklad $\mathfrak{S}$ na E_n takový, že $S \in \mathfrak{S} \Rightarrow S \simeq M$ (resp. $S \simeq M$, $\simeq$ značí přímou shodnost).

V práci [1] bylo ukázáno, že každá trojbodová množina na přímce je rozkladová množina přímky. Platí tato věta

1.3. Podmnožina přímky $T = \{a, b, c\}$ je právě tehdy přímo rozkladová množina přímky, dá-li se najít souřadnicový systém na přímce takový, že $T = \{0, 1, \alpha\}$, α iracionální, nebo $T = \{0, m, n\}$ $(m, n) = 1$, $0 \not\equiv m \not\equiv n \not\equiv 0$ (vše mod 3).

Důkaz, že T tvaru $\{0, m, n\}$, $(m, n) = 1$, při čemž $0 \equiv m$ nebo $0 \equiv n$ nebo $m \equiv n$ (vše mod 3) je rozkladová, ale ne přímo rozkladová množina, je dosti složitý. K případnému zjednodušení by mohlo přispět řešení této otázky:

Problém 1. Najít v případě T právě uvedeného tvaru všechny rozklady přímky na množiny shodné s T.

Poznamenejme, že je velmi snadné dokázat, že každá dvojbodová podmnožina přímky je její přímo rozkladovou množinou, a že existují čtyřbodové množiny na přímce, které nejsou jejími rozkladovými množinami. Pro $n \geqq 2$ je

*) Přednáška proslovená na konferenci o elementární matematice 30. listopadu 1959 v Brně.

situace podstatně jiná. Dá se ukázat (viz [2]), že v tomto případě každá neprázdná množina $M \subset E_n$, pro niž platí $M < 2\aleph_0$, je přímo rozkladová množina prostoru E_n.

Předcházející výsledky se týkaly mohutnosti rozkladové množiny. Pro dimensi se dá odvodit toto tvrzení:

1.4. Nechť $n \geqq 1$, $M \subset E_n \subset E_{2n+1}$, $M \neq \emptyset$. Potom M je přímo rozkladová množina prostoru E_{2n+1}.

Dá se ukázat, že množina, kterou dostaneme z přímky, vyjmeme-li jeden její bod, není rozkladovou množinou roviny. Pro $n > 1$ je neřešen tento problém:

Problém 2. Nechť $n > 1$, $M \subset E_n \subset E_{2n}$. Je M rozkladovou množinou E_{2n}?

2.

Přistoupíme k druhé části našeho výkladu.

2.1. Rozkladem prostoru E_n ve smyslu elementární geometrie rozumíme takový systém $\mathfrak{S}$ neprázdných podmnožin $S \subset E_n$, že

1. $\sum_{\mathfrak{S}} S = E_n$.

2. Každý bod z E_n je vnitřním bodem nejvýše jedné množiny ze systému $\mathfrak{S}$.

Na tomto místě se zmíním o jednom výsledku. K. Reinhardta (viz [3]), který je velmi obecný a je málo znám.

2.2. Nechť v rovině je zaveden pojem orientovaného úhlu a míra úhlu (při tom míru úhlu α značíme týmž symbolem α). Píšeme $\alpha \sim \beta$ právě tehdy, je-li $\alpha = \beta$ nebo $\alpha + \beta = 2\pi$. Pro $0 \leqq \alpha \leqq \pi$ označme jako K_α množinu těch rovinných úhlů β, pro něž platí $\alpha \sim \beta$.

2.3. Nechť $A_1, A_2, \ldots, A_n$ je jednoduchý rovinný mnohoúhelník s vnitřními úhly $\beta_1, \ldots, \beta_n$, o nichž předpokládáme, že jsou různé od π. Nechť $K_{\alpha_1}, \ldots, K_{\alpha_s}$ jsou právě všechny množiny definované v 2.2. incidentní s množinou $\{\beta_1, \ldots, \beta_n\}$. Nechť pro $i = 1, \ldots s$ je n_1^i počet těch úhlů β_j, pro něž $\beta_j = \alpha_i$, n_2^i je počet těch úhlů β_j, pro něž $\alpha_i + \beta_j = 2\pi$. Číslo $\bar{n} = \sum_i |n_1^i - n_2^i|$ nazveme redukovaným počtem vrcholů mnohoúhelníka $A_1, \ldots, A_n$.

Reinhardt dokázal tuto větu:

2.4. Nechť je dáno přirozené číslo $\bar{n}$. Nechť $\mathfrak{S}$ je rozklad roviny ve smyslu elementární geometrie na mnohoúhelníky s redukovaným počtem vrcholů $\bar{n}$, při čemž existuje kružnice k, resp. K, která se dá vložit do každého mnohoúhelníka z $\mathfrak{S}$, resp. do níž se dá vložit každý mnohoúhelník z $\mathfrak{S}$. Potom $\bar{n} \leqq 6$.

V Reinhardtově práci je tato věta důsledkem obecnější věty, která se zabývá případem, že $\bar{n}$ je tzv. průměrným redukovaným počtem vrcholů mnohoúhelníků, tvořících rozklad roviny ve smyslu elementární geometrie.

Formulujme nyní otevřenou otázku z této oblasti takto:

Problém 3. Jaké podmínky (kromě $\bar{n} \leqq 6$) musí splňovat jednoduchý mnohoúhelník M, aby existoval rozklad roviny ve smyslu elementární geometrie, který by měl za prvky množiny shodné s M.

Reinhardt řešil tento problém pro speciální rozklady v případě, že M je konvexní (viz též [5]).

3.

3.1. Řekneme, že systém $\mathfrak{S}$ podmnožin $S \subset E_n$ je uložením v E_n, je-li každý bod $x \in E_n$ vnitřním bodem nanejvýš jedné množiny $S \in \mathfrak{S}$.

Dále se budeme zabývat uložením, při kterém prvky z $\mathfrak{S}$ budou navzájem shodné kruhy (resp. koule).

Budeme nyní definovat hustotu uložení $\mathfrak{S}$ takto:

3.2. Zvolme v rovině, resp. v prostoru, bod O libovolně, ale pevně. K_R nechť je kruhem resp. koulí, o středu O a poloměru R (K_R značí též obsah uvedeného kruhu). Nechť $\mathfrak{S}_R$ je plocha množiny $K_R \cap \sum_{\mathfrak{S}} S$. Nechť existuje $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{\mathfrak{S}_R}{K_R}$. Potom tuto limitu značíme $d_{\mathfrak{S}}$ a nazýváme hustotou uložení.

Dá se ukázat, že hustota nezáleží na volbě O.

3.3. Nechť $\mathfrak{S}$ je uložení shodných kruhů v E_2. Nechť $d_{\mathfrak{S}}$ existuje. Potom $d_\varphi \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$.

Uvedený odhad je nejlepší možný a je možno popsat všechna uložení, pro něž $d_{\mathfrak{S}} = \dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$. Dříve však je nutno definovat ještě dva pojmy.

3.4. Nechť $\varrho(a, b)$ značí vzdálenost bodů a, b v E_2. Nechť A, B jsou ohraničené uzavřené množiny v E_2. Položme pro $x \in E_2$, $Y \subset E_2$, kde Y je uzavřená ohraničená, množina $\varrho(x, Y) = \min\limits_{y\in Y} \{\varrho(x, y)\}$. Budiž potom $\varrho(A, B) = \max \{\max\limits_{x\in A} \varrho(x, B) \max\limits_{x\in B} \varrho(x, A)\}$.

3.5. Nechť $\mathfrak{S}$ je uložení shodných kruhů K_i se středy O_i. Potom P_i budiž množina těch bodů $x \in E_2$, pro něž platí $\varrho(x, O_i) \leqq x, O_j$ pro každé O_j.

Dá se snadno ukázat, že P_i je konvexní uzavřená množina. Nechť P je pravidelný šestiúhelník opsaný kružnici K, pro niž je $K \cong K_i$. Nechť $\varepsilon > 0$. Nechť E_ε je množina těch P_i, které jsou buď neohraničené nebo pro něž platí $\varrho(P_i, P')$ pro každý $P' \cong P$. Budiž $F(R, \varepsilon) = K_R \cap \sum\limits_{i\in E} P_i$. Platí tato věta:

3.6. Nechť $\mathfrak{S}$ je uložení shodných kruhů v rovině s hustotou $d_{\mathfrak{S}}$. Potom $d_\varphi = \dfrac{\pi}{\sqrt{12}}$ právě tehdy, když $\lim\limits_{R\to\infty} \dfrac{F(R, \varepsilon)}{K_R} = 0$ pro každé $\varepsilon > 0$.

Přejděme nyní k E_3. Pravidelnou kulovou vrstvu budeme nazývat takový systém shodných koulí, jejichž středy leží v jedné rovině a každá koule z tohoto systému se dotýká šesti dalších. Nechť $\mathfrak{S}$ je uložení shodných koulí v prostoru takové, že je tvořeno pravidelnými kulovými vrstvami, při čemž každá koule se dotýká dvanácti dalších koulí z $\mathfrak{S}$. Hustota uložení $d_{\mathfrak{S}}$ je $\dfrac{\pi}{\sqrt{18}}$. Neřešen je tento problém:

Problém 4. Nechť $\mathfrak{S}$ je uložení shodných koulí v prostoru s hustotou $d_{\mathfrak{S}}$. Je $d_{\mathfrak{S}} \leqq \dfrac{\pi}{\sqrt{18}}$.

Literatura:

[1] K. Koutský-M. Sekanina: *Rozklad přímky na shodné trojbodové množiny,* Časopis pro pěstování matematiky, 83 (1958), 317—326.

[2] M. Sekanina: *O rozkladech eukleidovských prostorů,* Časopis pro pěstování matematiky, 83 (1958), 70—79.

[3] K. Reinhardt: *Über die Zerlegung der Ebene in Polygone,* Borna, Leipzig 1918.

[4] L. Fejés Tóth: *Lagerungen in der Ebene, auf der Kugel und im Raum,* Berlin, 1953.

[5] Б. Н. Делоне: *Теория планигонов,* Изв. ак. наук СССР, 23 (1959), 365—386.