Math. Slovaca, **50** (2000), No. 2, 135–148

Mathematica Slovaca

GÉNÉRALISATION DE LA MULTIPLICATION DE FIBONACCI

ALI MESSAOUDI

(*Communicated by Stanislav Jakubec*)

ABSTRACT. We study the associativity of the extension of Fibonacci multiplication for a class of reccurent sequences of length 2, and for Tribonacci sequence. We show dynamical properties of this multiplication.

1. Introduction

On considère la suite $(F_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $F_0 = 0$, $F_1 = 1$, $F_{n+2} = F_{n+1}+F_n$. Il est connu [30] que tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique comme somme de termes non consécutifs de la suite de Fibonacci, c' est-à-dire que $n = \sum\limits_{i=2}^{N} \varepsilon_i F_i$ où $\varepsilon_i = 0$ ou 1 et $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1} = 0$. En 1987, D. E. Knuth [20] définit une loi de composition interne "$\circ$" sur $\mathbb{N}$ appelée "multiplication de Fibonacci" de la façon suivante: si $n = \sum\limits_{i=2}^{N} \varepsilon_i F_i$, $m = \sum\limits_{j=2}^{M} \varepsilon'_j F_j$, alors

$$n \circ m = \sum_{i=2}^{N}\sum_{j=2}^{M} \varepsilon_i\varepsilon'_j F_{i+j}\,.$$

Il établit d'une façon combinatoire que $\circ$ est associative. Après P. Arnoux [2] démontre l'associativité d'une autre manière, et explique les propriétés dynamiques de cette multiplication liées à la stabilité par multiplication de l'orbite de 0 sous la rotation d'angle le nombre d'or $\beta = \left(1+\sqrt{5}\,\right)/2$. Pour la définition de la multiplication de Fibonacci voir aussi [27].

Dans [14], il a été introduit une extension de la multiplication de Fibonacci à une classe de suites récurrentes. Cette extension peut être formulée de la

1991 Mathematics Subject Classification: Primary 11B39.
Key words: multiplication de Fibonacci, suites récurrentes.

This work is financed by a CNPq-Brazil Grant 150016/97-2 (Ce travail est financé par une bourse du CNPq-Brazil 150016/97-2).

façon suivante: Soient s, d deux entiers supérieurs ou égals à 1 et (G_n) la suite définie par: $G_{n+d} = a_1 G_{n+d-1} + \cdots + a_d G_n$ pour tout $n \geq s$ et avec les conditions initiales $G_0 = \cdots = G_{s-1} = 0$, on rajoute les conditions $G_k = a_1 G_{k-1} + a_2 G_{k-2} + \cdots + a_k G_0 + 1$ pour $k = s, \ldots, s+d-1$. Les coefficients vérifient la condition $a_1 \geq a_2 \geq \cdots \geq a_d \geq 1$ (la décroissance des coefficients garantit [3] que la racine dominante du polynôme caractéristique est un nombre de Pisot).

Par ailleurs, tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique comme $n = \sum_{i=s}^{N} \varepsilon_i G_i$ où les chiffres (ε_i) vérifient la condition $(\varepsilon_k \ldots \varepsilon_{k-d+1}) < a_1 \ldots a_d$ (pour l'ordre lexicographique) pour tout $k \geq s$. Pour ces développements, on réfère à ([24], [15], [16]). Ces développements peuvent être étudiés dans le cadre des substitutions et automates (voir [5], [6], [7]).

L'extension de la multiplication de Fibonacci à ces suites est définie comme ci-dessus.

Dans [14], il a été démontré qu'il existe un entier s_0 tel que pour tout $s \geq s_0$, la loi $\circ$ est associative. Il a été aussi démontré que si $d = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$, $\circ$ est associative pour $s \geq 9$.

Une question naturelle s'impose: quel est le plus petit entier s_m à partir duquel la loi $\circ$ est associative? par exemple dans le cas $d = 2$ et $a_1 = a_2 = 1$ (Fibonacci), $s_m = 2$.

Dans ce papier nous allons répondre à cette question pour les suites (G_n) où $d = 2$. Nous montrons (Théorème 6) que dans ce cas $s_m = 2$ si $a_2 = 1$. Nous étudierons aussi le cas où $d = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ (suite de Tribonacci), nous retrouvons d'une autre manière le résultat cité ci-dessus. La technique utilisée permet de montrer que dans le cas $d = 4$ et $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$, la loi $\circ$ est associative pour $s \geq 10$.

Une autre classe de suites intéressantes est définie par: $H_{n+d} = a_1 H_{n+d-1} + \cdots + a_d H_n$ pour tout $n \geq s-d$ et avec les conditions initiales $H_i = 0$ pour $i \leq s-2$ et $H_{s-1} = 1$. Les coefficients vérifient la condition $a_1 \geq a_2 \cdots \geq a_d \geq 1$. La suite (H_n) diffère de (G_n) aux conditions initiales. Pour cette classe, tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique comme $n = \sum_{i=s-1}^{N} \varepsilon_i H_i$ où les chiffres (ε_i) vérifient la condition $(\varepsilon_k \ldots \varepsilon_{k-d+1}) < a_1 \ldots a_d$ (pour l'ordre lexicographique) pour tout $k \geq s-1$, avec la condition supplémentaire $\varepsilon_{s-1} < a_1$.

L'extension de la multiplication de Fibonacci pour cette classe de suites a l'avantage d'avoir une interprétation dynamique intéressante que l'on explicitera dans le cas $d = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ (suite de Tribonacci).

Dans ce papier, nous allons aussi étudier la loi $\circ$ associée à la suite H dans le cas $d = 2$. En fait notre étude se généralise aux suites (U_n) de la forme $U_{n+2} = kU_{n+1} + pU_n$, $U_0 = \cdots = U_{s-2} = 0$, $U_{s-1} = 1$, et le polynôme

$X^2 - kX - P$ a une racine qui est un nombre de Pisot. De telles suites sont de la forme $k \geq p \geq 1$ ou bien de la forme $-k+2 \leq p \leq 1$ où k et p parcourent l'ensemble $\mathbb{Z}$.

Ce papier est partagé en quatre sections. Dans la deuxième section nous parlerons de la version algorithmique et algébrique de l'extension de la multiplication de Fibonacci à la suite (U_n). La version algorithmique nous permet de montrer que si $s < d$ alors les deux lois associées à (G_n) et à (H_n) ne sont pas associatives (Proposition 1).

Nous montrons (Corollaire 2) que dans le cas où $k \geq p \geq 1$, $s_m = 2$ si et seulement si $p = 1$ et $k \in \{1, 2\}$.

Nous prouvons aussi (Corollaire 3) que si $p = 1$ et $k \in \mathbb{N} - \{1, 2\}$, alors $s_m = 3$. La même technique sert à montrer pour la deuxième classe que $s_m = 2$, pour tout $k \geq 3$ si et seulement si $p = -1$.

Dans la troisième section, nous étudierons la suite (G_n) où $d = 2$ et $d = 3$, $a_1 = a_2 = a_3 = 1$.

La dernière section est consacrée aux propriétés dynamiques de la loi $\circ$ associée à la suite de Tribonacci.

2. Suites récurrentes d'ordre deux

Il est connu [13] que les seuls nombres de Pisot réels de degré 2 sont les racines des polynômes de la forme $X^2 - kX - p$ où $k, p \in \mathbb{Z}$, $1 \leq p \leq k$ ou bien $-k + 2 \leq p \leq -1$.

Notre étude se restreindra aux suites (U_n) définies par $U_0 = \cdots = U_{s-2} = 0$, $U_{s-1} = 1$ et $U_{n+2} = kU_{n+1} + pU_n$, $n \geq s-2$ où $1 \leq p \leq k$ ou bien $-k+2 \leq p \leq 1$.

Dans cette section, nous aborderons seulement le cas où $1 \leq p \leq k$, le même raisonnement sera valable pour le deuxième cas.

Supposons que $1 \leq p \leq k$. Il est connu (voir par exemple [8]) que tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique comme $n = \sum_{i=s-1}^{N} d_i U_i$ où (d_i) vérifie la condition $(d_{i+1} d_i) <_{\text{lex}} (kp)$ et $d_{s-1} < k$ (car $U_s = k$). La suite (d_i) s'appelle le développement de n en base (U_n). L'ensemble des développements des entiers positifs en base (U_n) sera noté par $L(U)$.

Notations. Nous noterons aussi $\sum_{i=0}^{N} d_i U_i$ par $(d_N \ldots d_0)_U$ et $\sum_{i=0}^{N} d_i \rho^i$ par $(d_N \ldots d_0)_\rho$ pour $\rho \in \mathbb{R}$. Nous parlerons indifféremment du mot $d_N \ldots d_0$ et de la suite $(d_i)_{0 \leq i \leq N}$.

THÉORÈME 1. *Si $s = 2$ alors la loi $\circ$ est associative si et seulement si $p = 1$ et $k \in \{1, 2\}$.*

Avant de prouver le théorème, nous allons donner une version algorithmique et une autre algébrique de la multiplication de Fibonacci.

2.1. Version algorithmique.

Supposons que $s = 2$. Soit n un entier naturel tel que $n = \sum_{i=0}^{L} a_i U_i$ où $a_i \in \mathbb{N}$ pour tout i. Nous associons à n les deux mots $A(n) = a_L \ldots a_1 a_0$ et $Z(n) = d_N \ldots d_0$ tel que $n = \sum_{i=0}^{N} d_i U_i$ et $d_N \ldots d_1 d_0 \in L(U)$ ($A(n)$ est un "développement impropre" de n). Soit $r \in \mathbb{N}$, nous appliquons à $A(n)\underbrace{0\ldots0}_{r}$ l'algorithme qui consiste à remplacer en commençant toujours par la gauche

$$a(k+e)(p+f) \qquad \text{par} \quad (a+1)ef$$

et

$$a(k+1)de \qquad \text{par} \quad (a+1)0(d+k-p)(p+e)\,,$$

$d, e, f, a \in \mathbb{N}$, $a, d < k$. Ces deux opérations proviennent des relations $kU_{n+1} + pU_n = U_{n+2}$ et $U_{n+3} + (k-p)U_{n+1} + pU_n = (k+1)U_{n+2}$.

Après chaque étape de l'algorithme, nous obtenons un nouveau mot supérieur lexicographiquement au précédent. De plus, on sait que tout entier n'a qu'un nombre fini d'écritures comme somme de terme de la suite (U_n), il s'en suit que l'algorithme s'arrétera nécessairement au bout d'un nombre fini d'étapes et on obtiendra pour r assez grand un mot $\overline{A(n)\underbrace{0\ldots0}_{r}} \in L(U)$. On dit que $A(n)\underbrace{0\ldots0}_{r}$ est normalisable (pour cet algorithme voir [10], [11], [12], [13]).

Soit $n = \sum_{i=0}^{L} e_i U_i$ et $m = \sum_{j=0}^{M} d_j U_j$ tels que (e_i) et $(d_j) \in L(U)$. Posons $A(m \circ n) = c_{L+M} \ldots c_2 c_1 c_0$ où $c_l = \sum_{i+j=l} e_i d_j$. Nous avons le théorème suivant:

THÉORÈME 2. *La loi $\circ$ est associative si et seulement si pour tout m et n entiers naturels, $\overline{A(m \circ n)} \in L(U)$ (ie, $\overline{A(m \circ n)} = Z(m \circ n)$).*

P r e u v e . Supposons que $\circ$ est associative. Soient m, n et r trois entiers naturels, nous avons $m \circ (n \circ U_r) = \big(A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}\big)_U$ et $(m \circ n) \circ U_r = \big(Z(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}\big)_U$. On choisit r assez grand pour que $\overline{A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}} \in L(U)$.

Comme $\overline{(A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r})_U} = (A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r})_U$, et en vertu de l'associativité de la loi $\circ$, nous avons

$$(Z(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r})_U = \overline{(A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r})_U}\,.$$

Par ailleurs, l'unicité du développements d'un entier en base (U_n) implique que $Z(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r} = \overline{A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}}$. Donc $\overline{A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}}$ a au moins $r+1$ zéros à droite si $k \neq 1$ et $r+2$ zéros sinon. Or pour r assez grand, il existe un entier $t \leq r$ tel que $\overline{A(m \circ n)\underbrace{0\ldots0}_{r}} = \overline{A(m \circ n)}\underbrace{0\ldots0}_{t}$. D'où $\overline{A(m \circ n)}$ a au moins 1 zéro à droite si $k \neq 1$ et 2 zéros sinon.

Réciproquement, soient $n = \sum_{i=0}^{N} d_i U_i$, $m = \sum_{j=0}^{M} e_j U_j$ et $p = \sum_{k=0}^{L} c_k U_k$. Soit $l \in \mathbb{N}$, puisque $\overline{A(m \circ n)} = Z(m \circ n)$, nous avons $(m \circ n) \circ U_l = \sum_{i=0}^{N}\sum_{j=0}^{M} d_i e_j U_{i+j+l}$. D'où

$$(m \circ n) \circ p = \sum_{k=0}^{L} (m \circ n) \circ (c_k U_k) = \sum_{i,j,k} d_i e_j c_k U_{i+j+k}\,.$$

Par conséquent, $\circ$ est associative. $\square$

Remarque. Le Théorème 2 est vrai pour toutes les suites (G_n) et (H_n) définies dans l'introduction.

PROPOSITION 1. *Si $s < d$ alors la loi $\circ$ associée à la suite (G_n) n'est pas associative.*

P r e u v e . Soit $m = a_1 G_s + a_1 G_{s+d}$ et $n = G_s + G_{s+d}$. On a $A(m \circ n) = a_1 \ldots (2a_1)\underbrace{0\ldots0}_{d-1} a_1 \underbrace{0\ldots0}_{2s}$. En utilisant la relation $0(a_1+1)\underbrace{0\ldots0}_{d} \sim 10(a_1-a_2) \ldots (a_{d-1} - a_d)a_d$. On obtient $\overline{A(m \circ n)} = a_1 \underbrace{0\ldots0}_{d-2} 1(a_1 - 1)(a_1 - a_2) \ldots (a_{d-2} - a_{d-1})(a_{d-1} - a_d + 1)(a_d - 1)(a_1 - a_2) \ldots (a_{d-1} - a_d)a_d \underbrace{0\ldots0}_{2s-d}$. Si $s < d$ alors $\overline{A(m \circ n)} \notin L(G)$. $\square$

Remarque. Si $a_1 > 2$ (resp $a_1 \leq 2$) alors la loi $\circ$ associée à la suite (H_n) n'est pas associative pour $s \leq d$ (resp $s < d$).

2.2. Version algébrique.

Le polynôme $P(X) = X^2 - kX - p$ a deux racines: $\rho = \frac{k - \sqrt{k^2+4p}}{2}$ et $\tau = \frac{k+\sqrt{k^2+4p}}{2}$. Le réel ρ est irrationnel et vérifie la propriété suivante.

LEMME 1. *Nous avons*

$$\forall n \geq 1 \qquad \rho^n = \rho U_n + p U_{n-1} .$$

P r e u v e . La démonstration, par récurrence sur n est laissé au lecteur. $\square$

Considérons l'application g de $L(U)$ dans $\mathbb{Z}[\rho]$, qui à la suite $(d_i)_{0\leq i\leq N}$, associe le réel $\sum_{i=0}^{N} d_i\rho^i$. En vertu du Lemme 1 et du fait que $d_0 = 0$, nous avons

$$\sum_{i=0}^{N} d_i\rho^i = n\rho + pm$$

où $n = \sum_{i=0}^{N} d_i U_i$ et $m = \sum_{i=1}^{N} d_i U_{i-1}$. Comme ρ est irrationnel, g est injective.

Nous pouvons donc voir $L(U)$ comme un sous ensemble de $\mathbb{Z}[\rho]$ et la loi "$\circ$" comme la multiplication usuelle dans $\mathbb{Z}[\rho]$, et on a un théorème équivalent au Théorème 2.

THÉORÈME 3. *La loi $\circ$ est associative si et seulement si l'ensemble $g(L(U))$ est stable par multiplication.*

P r e u v e . Soit $d_N \dots d_{r+1} \underbrace{0\dots0}_{r}$ un mot, $d_i \in \mathbb{N}$, et r assez grand pour que $d_N \dots d_{r+1} \underbrace{0\dots0}_{r}$ soit normalisable. Appliquer l'algorithme de normalisation à ce mot est équivalent à représenter le réel $\sum_{i=r+1}^{N} d_i\rho^i$ en base ρ, avec des chiffres dans $L(U)$, dans le sens que si $\overline{d_N \dots d_{r+1} \underbrace{0\dots0}_{r}} = \varepsilon_M \dots \varepsilon_0$ où $\varepsilon_M \dots \varepsilon_0 \in L(U)$, alors $\sum_{i=r+1}^{N} d_i\rho^i = \sum_{i=0}^{M} \varepsilon_i\rho^i$. Cela provient du fait que l'algorithme de normalisation utilise des propriétés de la suite (U_n) qui dépendent uniquement du polynôme minimal de ρ. Par conséquent, en vertu du Théorème 2, nous avons le résultat. $\square$

Notons par $\overline{g(L(U))}$ la fermeture topologique de $g(L(U))$ dans $\mathbb{R}$. Nous avons

$$\overline{g(L(U))} = \left\{ \sum_{i=0}^{+\infty} d_i\rho^i \mid \forall N \in \mathbb{N} \quad (d_i)_{0\leq i\leq N} \in L(U) \right\} .$$

COROLLAIRE 1. *La loi $\circ$ est associative si et seulement si $\overline{g(L(U))}$ est stable par multiplication.*

P r e u v e . L'implication directe est évidente. Supposons que $\overline{g(L(U))}$ est stable par multiplication. Soient $(d_i)_{0\le i\le N}$ et $(e_j)_{0\le j\le M} \in L(U)$, donc

$$\sum_{i=0}^{N} d_i\rho^i \times \sum_{j=0}^{M} e_j\rho^j = \sum_{r=0}^{+\infty} c_r\rho^r$$

où pour tout $L \in \mathbb{N}$, $(c_r)_{0\le r\le L} \in L(U)$. D'autre part, on a $\sum_{i=0}^{N} d_i\rho^i \times \sum_{j=0}^{M} e_j\rho^j \in \mathbb{Z}^+[\rho] = \left\{ \sum_{i=0}^{N} a_i\rho^i \;\mid\; a_i \ge 0,\;\; N \in \mathbb{N}\right\}$, et ρ est le conjugué d'un nombre de Pisot réel dont le polynôme minimal est à coefficients entiers strictement positifs et décroissant. Pour cette classe de nombre, il a été démontré [13] que $\mathbb{Z}^+[\rho] = \mathrm{Fin}[\rho]$ où $\mathrm{Fin}[\rho]$ est l'ensemble des réels positifs ayant un développement fini en base ρ avec des chiffres dans $L(U)$. Il existe donc une suite $(a_i)_{t\le i\le L} \in L(U)$ telle que

$$\sum_{r=0}^{+\infty} c_r\rho^r = \sum_{i=t}^{L} a_i\rho^i . \tag{1}$$

Considérons maintenant la suite $\rho^{-k} \sum_{i=l}^{k}(c_i - a_i)\rho^i$, $k \in \mathbb{N}$ où $l = \min(0,t)$ tel que $a_i = 0$ pour $i > L$ et $i < t$ et $c_i = 0$ si $i < 0$. A cause de l' égalité (1), cette suite ne prend qu'un nombre fini de valeurs (voir [21], [22]). Pour k fixé, il existe un entier p que l'on peut choisir assez grand tel que

$$\rho^p \sum_{i=l}^{k}(c_i - a_i)\rho^i = \sum_{i=l}^{k+p}(c_i - a_i)\rho^i .$$

En développant les deux termes de l'égalité, et en utilisant le fait que deux éléments de $\mathrm{Fin}[\rho]$ de développements différents en base ρ ne peuvent pas être égales, on obtient $a_i = c_i$ pour tout $l \le i \le p+l-1$. En prenant p assez grand, on obtient $c_r = 0$ pour tout $r > L$. Ce qui achève la preuve. □

Remarque. Le Corollaire 1 est vrai pour toutes les suites (G_n) et (H_n).

Maintenant, nous sommes en mesure d'étudier la loi $\circ$.

P r e u v e d u T h é o r è m e 1 .

Premier cas: $p = 1$

Soit $(d_i)_{0\le i\le N} \in L(U)$. Comme $\rho \in \left]-1,0\right[$ et $d_0 = 0$, nous avons

$$-1-\rho = (k-1)\rho + k\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{2i+1} < \sum_{i=1}^{N} d_i\rho^i < k\sum_{i=1}^{\infty} \rho^{2i} = -\rho .$$

Par ailleurs, d'après le Lemme 1, nous avons $\sum_{i=0}^{N} d_i\rho^i = n\rho + p_n$ où $n = \sum_{i=0}^{N} d_iU_i$ et $p_n = \sum_{i=1}^{N} d_iU_{i-1}$. L'irrationalité de ρ implique que la suite $(n\rho + p_n)_{n\in\mathbb{N}}$ est dense dans l'ensemble $[-1-\rho, -\rho]$. Par conséquent

$$\overline{g\big(L(U)\big)} = [-1-\rho, -\rho].$$

Comme $-\rho \in]0,1[$, l'ensemble $[-1-\rho, -\rho]$ est stable par multiplication si et seulement si $(-1-\rho)^2 \leq -\rho$, c' est-à-dire

$$-3-\sqrt{5} \leq k - \sqrt{k^2+4} \leq -3+\sqrt{5},$$

et cela n'est vrai que si $k = 1$ ou 2.

Deuxième cas: $p > 1$

Soit $(d_i)_{0\leq i\leq N} \in L(U)$, on a

$$\frac{k\rho}{1-\rho^2} - \rho = (k-1)\rho + k\sum_{i=1}^{+\infty} \rho^{2i+1} < \sum_{i=1}^{N} d_i\rho^i < k\sum_{i=1}^{+\infty} \rho^{2i} = \frac{k\rho^2}{1-\rho^2}.$$

Les deux réels $k\rho^2/(1-\rho^2)$ et $k\rho/(1-\rho^2) - \rho$ appartiennent à $\overline{g\big(L(U)\big)}$ et vérifient:

$$\begin{aligned}\frac{k\rho^2}{1-\rho^2} - \left(\frac{k\rho}{1-\rho^2} - \rho\right) &= \frac{-k\rho+\rho+\rho^2}{1+\rho}\\ &= \frac{p+\rho}{1+\rho} > p > 1,\end{aligned}$$

Il en découle que $\overline{g\big(L(U)\big)}$ ne peut pas être stable par multiplication. □

COROLLAIRE 2. *Nous avons*

$$s_m = 2 \iff p = 1 \;\&\; k \in \{1,2\}.$$

Calcul de $m \circ n$. Soient $n = \sum_{i=0}^{N} d_iU_i$ et $m = \sum_{j=0}^{M} e_jU_j$ où $(d_i), (e_j) \in L(U)$. Alors

$$n \circ m = kmn + nl(m) + ml(n),$$

où $l(n) = \sum_{i=1}^{N} d_iU_{i-1}$ et $l(m) = \sum_{j=1}^{M} e_jU_{j-1}$. Dans le cas où $p = 1$, nous avons $l(n) = \big[-(n+1)\rho\big]$ et $l(m) = \big[-(m+1)\rho\big]$.

2.3. Cas où $s = 3$.

Notons par (V_n) la suite définie par $V_0 = V_1 = 0$, $V_2 = 1$, $V_{n+2} = kV_{n+1} + pV_n$, $n \geq 1$ où $k \geq p \geq 1$.

THÉORÈME 4. *Si $p = 1$, alors pour tout $k \in \mathbb{N}^*$ la loi $\circ_V$ associée à la suite (V_n) est associative.*

Preuve. Nous avons $\overline{g(L(V))} = \rho \times \overline{g(L(U))} = [-\rho^2, -\rho - \rho^2]$. Il suffit donc de montrer que: $\rho^4 < -\rho - \rho^2 < 1$.

Nous avons $1 < \sqrt{k^2+4} = \tau - \rho$. En multipliant les deux membres de l'inégalité par $-\rho$, nous obtenons $0 < -\rho - \rho^2 < 1$.

D'autre part,

$$\forall k \geq 1 \qquad 2 < \sqrt{k^2+4} = \tau - \rho \leq \tau - k\rho .$$

Comme $\rho^2 = k\rho + 1$, nous avons $\rho^2 < \tau - 1$, d'où en multipliant les deux membres de l'inégalité par ρ^2, nous obtenons $\rho^4 < -\rho - \rho^2$. □

COROLLAIRE 3. *Si $p = 1$ et $k \in \mathbb{N} - \{1,2\}$ alors $s_m = 3$.*

Remarque. Nous avons $m \circ_V n = mn + [-\rho + m\tau][-\rho + n\tau]$. C'est "presque" la généralisation de la multiplication de Porta et Stolarsky [9] (loi de composition interne sur $\mathbb{N}$ définie par $m \star n = mn + [m\beta][n\beta]$ où β est le nombre d'or), dans le sens que pour $\tau = \beta$, ces deux lois coincident en une infinité de couples (m, n).

Considérons maintenant la suite (W_n) définie par $W_0 = 0$, $W_1 = 1$, $W_{n+2} = kW_{n+1} + pW_n$ où $-k + 2 \leq p \leq -1$. Nous avons $(d_i)_{0 \leq i \leq N} \in L(W) \iff 0 \leq d_i \leq k - 1 \;\&\; d_N \ldots d_0 \leq_{\text{lex}} (k-1)\underbrace{(k+p-1)\ldots(k+p-1)}_{N \text{ fois}}$ (pour $L(W)$, voir [13]). En appliquant le même raisonnement que ci-dessus, nous obtenons la proposition suivante.

THÉORÈME 5. *Pour tout $k \geq 3$, la loi $\circ_W$ est associative si et seulement si $p = -1$.*

Remarque. Il serait intérressant de trouver s_m dans le cas $p \neq 1$ pour les suites où $k \geq p \geq 1$, et dans le cas où $p \neq -1$ pour les suites où $-k + 2 \leq p \leq -1$.

3. Etude de la loi associée à (G_n) dans le cas $d = 2$ et de la suite de Tribonacci

3.1. Cas où $d = 2$.

Considérons la suite (G_n) définie dans l'introduction. Supposons que $d = 2$, alors on a le théorème suivant:

THÉORÈME 6. *Si $p = 1$ alors pour tout $k \geq p$, on a $s_m = 2$.*

Preuve. Soit (G_n) la suite définie par $G_{n+2} = kG_{n+1} + G_n$ pour $n \geq s$, et $G_0 = \cdots = G_{s-1} = 0$, $G_s = 1$ et $G_{s+1} = k+1$. En vertu de la Proposition 1, il suffit de montrer que $\circ$ est associative pour $s = 2$.

Supposons que $s = 2$. Soit $d_N \dots d_2 00 \in L(G)$, on a $-\rho^2 < \sum_{i=2}^{N} d_i \rho^i < -\rho$ où $\rho = \left(k - \sqrt{k^2+4}\,\right)/2$. Soit $d'_M \dots d'_2 00 \in L(G)$, on a $\sum_{i=2}^{N} d_i \rho^i \sum_{i=2}^{M} d'_i \rho^i \in \mathrm{Fin}[\rho]$. D'où $\sum_{i=2}^{N} d_i \rho^i \sum_{i=2}^{M} d'_i \rho^i = \sum_{i=r}^{L} e_i \rho^i$ où $e_L \dots e_r 00 \in L(G)$ et $e_r > 0$. Pour avoir l'associativité, il suffit de montrer que $r \geq 2$. Supposons que $r < 2$. Si r est pair, on a

$$(e_r - 1)\rho^r - \rho^{r+1} < \sum_{i=2}^{L} e_i \rho^i < e_r \rho^r - \rho^{r+1}\,.$$

Or $-\rho \leq (e_r - 1)\rho^r - \rho^{r+1}$. D'où $-\rho \leq \sum_{i=r}^{L} e_i \rho^i$, ce qui est impossible, car l'ensemble $\left]-\rho^2, -\rho\right[$ est stable par multiplication. De même, on aboutit à une contradiction quand r est impair. □

Remarque. Si $p \neq 1$, nous pouvons montrer que pour $s = 2$, la loi $\circ$ n'est pas associative pour certaines valeurs de k. Néanmoins nous conjecturons que pour tout entier $p > 1$, il existe un entier $k_0 \geq p$ tel que pour tout $k \geq k_0$, on a $s_m = 2$.

3.2. Suite de Tribonacci.

Soit s un entier supérieur ou égal à 2. Notons par $\left(R_n^{(s)}\right)$ la suite égale à (H_n) où $d = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$. $\left(R_n^{(s)}\right)$ est appelée suite de Tribonacci.

Notons par $\circ_s$ la loi associée à la suite $\left(R_n^{(s)}\right)$.

Remarque. Le développement d'un entier en base (G_n) et (H_n) dans le cas où $d = 3$ et $a_1 = a_2 = a_3 = 1$ est le même.

CONJECTURE (P. ARNOUX). *La loi $\circ_3$ est associative.*

La loi $\circ_3$ est associative si et seulement si l'ensemble $\mathcal{E} = \left\{ \sum_{i=3}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \;\; \varepsilon_i = 0, 1,\; \varepsilon_i \varepsilon_{i+1} \varepsilon_{i+2} = 0 \right\}$ est stable par multiplication complexe. Cet [illegible]n-semble est appelé “fractal de Rauzy”. Il posséde plus[illegible]eurs propriét[illegible] c[illegible]t [illegible]n ensemble compact, connexe, à intérieur simplement connexe et à fr[illegible]nt[illegible] f[illegible]c-tale et il induit un pavage périodique du plan complexe (voir [26], [21], [22], [2[illegible]], [28], [29], [19]).

THÉORÈME 7. *La loi $\circ_9$ est associative.*

Pour la preuve nous avons besoin du Lemme 2 et de la Proposition 1.

LEMME 2. *Soit $N \in \mathbb{Z}$ et $z = \sum_{k=N}^{+\infty} \varepsilon_k \alpha^k$ où $\varepsilon_k = 0, 1$ et $\varepsilon_k \varepsilon_{k+1} \varepsilon_{k+2} = 0$ pour tout k. Alors*

$$\frac{\log|z|}{\log|\alpha|} - \frac{\log\left(|1+\alpha| - \frac{|\alpha^3|}{1-|\alpha^3|}\right)}{\log|\alpha|} \leq N \leq \frac{\log|z|}{\log|\alpha|} + \frac{\log(1-|\alpha^3|)}{\log|\alpha|}.$$

P r e u v e. Soit $z = \sum_{k=N}^{+\infty} \varepsilon_k \alpha^k$ tel que $\varepsilon_N = 1$. D'où $z = \sum_{k=0}^{+\infty} \alpha^{N+3k} y_k$ où $y_k \in S = \{0, 1, \alpha, \alpha^2, 1+\alpha, 1+\alpha^2, \alpha+\alpha^2\}$. Comme $\alpha \sim -0,419 - 0,606i$, il est facile de vérifier que $\max\{|u|;\ u \in S\} = 1$. D'où

$$|z| \leq \frac{|\alpha|^N}{1-|\alpha^3|}.$$

Par ailleurs

$$|z| \geq |\alpha^N y_0| - \left|\sum_{k=1}^{+\infty} \alpha^{N+3k} y_k\right|$$

où $y_0 = 1 + \varepsilon_1 \alpha + \varepsilon_2 \alpha^2$. On a $\min\{1, |1+\alpha|, |1+\alpha^2|\} = |1+\alpha|$, donc $|z| \geq |\alpha^N||1+\alpha| - |\alpha|^{N+3}/(1-|\alpha^3|)$. Par conséquent:

$$|\alpha^N|\left(|1+\alpha| - \frac{|\alpha^3|}{1-|\alpha^3|}\right) \leq |z| \leq \frac{|\alpha|^N}{1-|\alpha^3|}.$$

En passant au logarithme, nous obtenons le résultat. □

PROPOSITION 2. *Nous avons*

$$\mathcal{E} \times \mathcal{E} \subset \alpha^{-6}\mathcal{E}.$$

P r e u v e. Soit $z \in \mathcal{E}$, alors $|z| \leq \frac{|\alpha^3|}{1-|\alpha^3|} \sim 0,669$. Par ailleurs, nous avons $|\alpha| \sim 0,737$, $\log|\alpha| \sim -0,305$, $\log(1-|\alpha^3|) \sim -0,5108$ et $\log\left(|1+\alpha| - \frac{|\alpha^3|}{1-|\alpha^3|}\right) \sim -1,77$.

Soit z' un autre élément de $\mathcal{E}$, nous avons $|zz'| \leq \left(\frac{|\alpha^3|}{1-|\alpha^3|}\right)^2 \sim 0,45$. Supposons que $zz' = \sum_{i=N}^{+\infty} \varepsilon_i \alpha^i$, alors en utilisant le Lemme 2, nous obtenons que $-3,16 \leq N$, d'où $N \geq -3$ ce qui implique que $zz' \in \alpha^{-6}\mathcal{E}$. □

P r e u v e d u T h é o r è m e 7. La loi $\circ_9$ est associative si et seulement si l'ensemble

$$\left\{\sum_{i=9}^{\infty} \varepsilon_i \alpha^i \mid \varepsilon_i = 0,1,\ \varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0\right\} = \alpha^6\mathcal{E}$$

est stable par multiplication complexe. Or $\alpha^6\mathcal{E} \times \alpha^6\mathcal{E} = \alpha^{12}(\mathcal{E} \times \mathcal{E}) \subset \alpha^{12} \times \alpha^{-6}\mathcal{E} = \alpha^6\mathcal{E}$. Ce qui termine la preuve. □

Qu'en est-il de la conjecture de P. Arnoux? Une série de calculs par ordinateur laisse à penser que la conjecture est vraie. Peut être une étude plus détaillée du fractal de Rauzy donnera-t-elle la réponse.

Remarques.
1. La loi $\circ_s$ a été aussi étudiée dans [14]. Il a été démontré par une autre méthode que la loi $\circ_9$ est associative.
2. En utilisant la même technique, nous montrons dans le cas de la suite (G_n) où $d = 4$ et $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 1$ que la loi $\circ$ est associative pour $s \geq 10$.

Un lien de la loi $\circ$ associée à la suite de Tribonacci, avec le système dynamique symbolique, qui provient de la substitution de Tribonacci est donné dans la section suivante.

4. Interprétation dynamique de la loi associée à la suite de Tribonacci

Soit s un entier tel que la loi $\circ$ associée à la suite (R_n^s) est associative. Notons (R_n^s) par (R_n). Il est connu que tout entier naturel n s'écrit d'une façon unique comme $n = \sum_{i=s}^{N} \varepsilon_i R_i$, où pour tout $i \geq s$, $\varepsilon_i = 0$ ou 1 et $\varepsilon_i\varepsilon_{i+1}\varepsilon_{i+2} = 0$.

Par ailleurs, soit A l'ensemble $\{0,1,2\}$, A^* l'ensemble des mots finis sur A. Nous appelons substitution de Tribonacci (voir [1], [4]) l'application σ de A dans A^* définie par:

$$\sigma(0) = 01, \quad \sigma(1) = 02, \quad \sigma(2) = 0.$$

Nous étendons σ en une application de $A^{\mathbb{N}}$ dans $A^{\mathbb{N}}$ par concaténation et nous la noterons aussi par σ, c'est à dire pour tout $(a_n) \in A^{\mathbb{N}}$ on a

$$\sigma(a_0 a_1 \ldots a_n \ldots) = \sigma(a_0)\sigma(a_1)\ldots\sigma(a_n)\ldots.$$

σ est contractante pour la métrique naturelle sur $A^{\mathbb{N}}$, elle a donc un seul point fixe que l'on notera $u = (u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ (pour les substitutions, voir [25]).

Nous notons Ω l'adhérence de l'orbite de u par le décalage $T\colon \Omega \to \Omega$ qui à (x_n) associe (y_n) définie par $y_n = x_{n+1}$. Le triplet (Ω, σ, T) est appelé système dynamique symbolique associé à la substitution σ (voir [17], [18], [25]).

Il est connu ([22], [25]) que le système dynamique (Ω, T) est uniquement ergodique. Notons m son unique mesure invariante par T.

D'autre part, il existe un isomorphisme métrique f entre le système dynamique (Ω, T, m) et un échange de trois morceaux sur l'ensemble $\alpha^{s-3}\mathcal{E}$ (voir [26], [21], [22]) dont le quotient est une rotation R_α d'angle α^{s-1} sur le tore Π^2. L'isomorphisme métrique est défini de la manière suivante: à un élément $T^n(u)$, nous associons $\sum\limits_{i=s}^{N} \varepsilon_i \alpha^i$ où $n = \sum\limits_{i=s}^{N} \varepsilon_i R_i$, puis nous étendons f à l' adhérence de l'orbite de u par continuité [22]. L'associativité de la loi $\circ$ associée à la suite (R_n) est équivalente à la stabilité par multiplication de l'orbite de 0 sous la rotation. Plus précisément, pour tout entier m et n nous avons

$$R_\alpha^n(0).R_\alpha^m(0) = R_\alpha^{n\circ m}(0).$$

En vertu de la relation $f(T^n u) = R^n(0)$, nous avons $f(T^n u).f(T^m u) = f(T^{n\circ m} u)$.

Remarque. Il serait intéressant d'étudier les propriétés dynamiques de la loi $\circ$ associée aux suites (H_n).

REFERENCES

[1] ARNOUX, P.: *Un exemple de semi-conjugaison entre un échange d'intervalles et une rotation sur le tore*, Bull. Soc. Math. France **116** (1988), 489–500.

[2] ARNOUX, P.: *Some remarks about Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. **2** (1989), 319–320.

[3] BRAUER, A.: *On algebraic equations with all but one root in the interior of the unit circle*, Math. Nachr. **4** (1951), 250–257.

[4] CHEKHOVA, N.—HUBERT, P.—MESSAOUDI, A.: *Propriétés combinatoires, ergodiques et arithmétiques de la substitution de Fibonacci.* Preprint de l'Institut de mathématiques de Luminy.

[5] DUMONT, J. M.: *Formules sommatoires et systèmes de numération liés aux substitutions.* Sém. Théor. Nombres Bordeaux (2), Univ. Bordeaux I, Talence, 1987-88.

[6] DUMONT, J. M.—THOMAS, A.: *Systèmes de numération et fonctions fractales relatifs aux substitutions*, Theor. Comput. Sci. **65** (1989), 153–169.

[7] DUMONT, J. M.—THOMAS, A.: *Digital sum problems and substitution on a finite alphabet.* Preprint.

[8] FRAENKEL, A. S.: *Systems of numeration*, Amer. Math. Monthly **92** (1985), 105–114.

[9] FRAENKEL, A. S.—PORTA, H. A.—STOLARSKY, K. B.: *Some arithmetical semi groups.* In: Proc. International Conf. on Analytic Number Theory (B. Berndt et al., eds.), Birkauser, Boston, 1990, pp. 255–264.

[10] FROUGNY, C.: *Representation of numbers and finite automata*, Math. Systems Theory **25** (1992), 37–60.

[11] FROUGNY, C.: *How to write integers in non-integer base.* In: Latin 92, Sao Paulo, Vol. 583. Lecture Notes in Comput. Sci., Springer, New York, 1992, pp. 154–164.

[12] FROUGNY, C.: *Fibonacci representations and Finite automata*, IEEE Trans. Inform. Theory **37** (1991), 393–399.

[13] FROUGNY, C.—SOLOMYAK, B.: *Finite Beta-expansions*, Ergodic Theory Dynam. Systems **12** (1992), 713–723.

[14] GRABNER, J.—PETHO, A.—TICHY, R. F.—WOEGINGER, J.: *Associativity of Recurrence Multiplication*, Appl. Math. Lett. **7** (1994), 85–90.

[15] GRABNER, P. J.—TICHY, R. F.: *Contributions to digit expansions with respect to linear recurrences*, J. Number Theory **36** (1990), 160–169.

[16] GRABNER, P. J.—TICHY, R. F.: *α expansions, linear recurrences and the sum of digits functions*, Manuscripta Math. **70** (1991), 311–324.

[17] HEDLUND, G. A.—MORSE, M.: *Symbolic dynamics*, Amer. J. Math. **60** (1938), 815 866.

[18] HEDLUND, G. A.—MORSE, M.: *Symbolic dynamics, part II: Sturmian trajectories*, Amer. J. Math. **62** (1940), 1–42.

[19] ITO, S.—KIMURA, M.: *On the Rauzy fractal*, Japan J. Indust. Appl. Math. **8** (1991), 461–486.

[20] KNUTH, D. E.: *Fibonacci multiplication*, Appl. Math. Lett. **1**, 57–60.

[21] MESSAOUDI, A.: *Autour du fractal de Rauzy.* Thèse d'Université, Aix-Marseille II, 96.

[22] MESSAOUDI, A.: *Propriétés arithmétiques et dynamiques du fractal de Rauzy*, J. Théor. Nombres Bordeaux **10** (1998), 135–161.

[23] MESSAOUDI, A.: *Frontière du fractal de Rauzy et système de numération complexe*, Acta Arith. (To appear) [Prépublication de l'Institut de mathématiques de Luminy, numéro 97–25].

[24] PETHO, A.—TICHY, R. F.: *On digit expansions with respect to linear recurrences*, J. Number Theory **33** (1989), 243–256.

[25] QUEFFELEC, M.: *Substitution Dynamical Systems-Spectral Analysis.* Lecture Notes in Mathematics 1294, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[26] RAUZY, G.: *Nombres algébriques et substitutions*, Bull. Soc. Math. France **110** (1982), 147–178.

[27] SIRVENT, V.: *Properties of Geometrical Realisations of Substitutions Associated to a Family of Pisot Numbers.* Thèse, Mars 93.

[28] SIRVENT, V.: *Relationships between the dynamical systems associated to the Rauzy substitutions*, Theoret. Comput. Sci. **164** (1996), 41–57.

[29] SIRVENT, V.: *On some dynamical subsets of the Rauzy fractal*, Theoret. Comput. Sci. **180** (1997), 363–370.

[30] ZECKENDORF, E.: *Représentation des nombres naturels par une somme de nombres de Fibonacci ou de nombres de Lucas*, Bull. Soc. Roy. Sci. Liège **41** (1972), 179–182.

Received October 26, 1998

Instituto de Matematica - UFRJ
Caixa Postal 68530
21945-970, Rio de Janeiro - RJ
BRAZIL

E-mail: messaoud@acd.ufrj.br