Mathematica Slovaca

Emil Slatinský
Die Operationen in der Klasse komplementärer Verbände

Mathematica Slovaca, Vol. 44 (1994), No. 1, 35--38

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136600

Math. Slovaca, **44** (1994), No. 1, 35–38

Mathematica Slovaca

DIE OPERATIONEN IN DER KLASSE KOMPLEMENTÄRER VERBÄNDE

EMIL SLATINSKÝ

(*Communicated by Tibor Katriňák*)

ABSTRACT. In this paper, there are formulated necessary and sufficient conditions on which the lexicographic sum of ordered sets is a complementary lattice and a Boolean algebra respectively.

In der Literatur (siehe z. B. [1], [2], [3], [4]) werden verschiedene Operationen zwischen geordneten Mengen studiert (Kardinalsumme, Kardinalprodukt, Kardinalpotenz, Ordinalsumme, Ordinalprodukt, Ordinalpotenz, lexikographische Summe, lexikographisches Produkt). In der Arbeit [5] wird eine Definition der sogenannten arithmetischen Operation für geordnete Mengen gegeben, in der alle angeführten Operationen als Spezialfälle enthalten sind. Dabei entsteht eine natürliche Frage (z. B. in [3], [6]): Sei $\mathcal{K}$ eine Klasse geordneter Mengen und sei eine Operation auf der Klasse aller geordneten Mengen gegeben. Welche sind die Bedingungen dafür, daß das Resultat dieser Operation, die auf Elemente der Klasse $\mathcal{K}$ angewendet wird, wieder ein Element aus $\mathcal{K}$ väre? In diesem Artikel untersuchen wir die Abgeschlossenheit der Klasse komplementärer Verbände in Bezug auf die Operation der lexikographischen Summe (siehe Satz 8).

1. Bezeichnung. In der ganzen Arbeit werden wir eine Ordnung auf einer beliebigen Menge mit dem Symbol $\leq$ bezeichnen. Ferner werden wir eine geordnete Menge $(A, \leq)$ kurz mit dem Symbol A bezeichnen. Das größte (kleinste) Element einer nach oben (nach unten) beschränkten geordneten Menge A bezeichnen wir als $g(A)$ ($l(A)$). Mit $\prec$ bezeichnen wir die Nachbarschaftsrelation (d.h. $a \prec b$ dann und nur dann, wenn $a < b$ und wenn es kein x mit $a < x < b$ gibt). Sind a, b unvergleichbare Elemente, so schreiben wir $a \parallel b$.

AMS Subject Classification (1991): Primary 06C15.
Key words: Boolean algebra, Complementary lattice, Lexicographic sum, Ordinal product, Ordinal sum.

2. LEMMA. *Sei* $\sum_{\iota\in G} M_\iota$ *eine Darstellung eines komplementären Verbandes in der Form einer lexikographischen Summe. Dann ist* G *ein komplementärer Verband oder eine Kette mit höchstens drei Elementen.*

B e w e i s . Bezeichnen wir $S = \sum_{\iota\in G} M_\iota$, $l(S) = (\iota_0, o)$, $g(S) = (\iota_1, i)$. Für ein beliebiges Element $\iota \in G$ und ein beliebiges Element $c \in M_\iota$ ist $(\iota, c) \in S$ und gilt $(\iota_0, o) \leq (\iota, c) \leq (\iota_1, i)$, woraus $\iota_0 \leq \iota \leq \iota_1$ folgt, also existieren Elemente $l(G) = \iota_0$, $g(G) = \iota_1$.

Sei $\iota_2 \in G$ ein beliebiges Element, $a \in M_{\iota_2}$ ein beliebiges Element mit $(\iota_2, a) \neq (\iota_0, o)$, $(\iota_2, a) \neq (\iota_1, i)$. Bezeichnen wir mit (ι_3, b) ein Komplement von (ι_2, a) in S. Dann gilt $(\iota_2, a) \parallel (\iota_3, b)$.

Zuerst setzen wir voraus, daß $\iota_2 = \iota_1$. Dann ist $a < i$, $\iota_3 = \iota_1$, $a \parallel b$ und es gilt $(\iota_0, o) = (\iota_2, a) \wedge (\iota_3, b) = (\iota_1, a) \wedge (\iota_1, b)$. Ist M_{ι_1} eine nach unten gerichtete Menge, dann ist $\iota_1 = \iota_0$, also ist G eine Menge mit genau einem Element. Ist M_{ι_1} eine nicht nach unten gerichtete Menge, dann existiert ein Element $\iota_4 \in G$ mit $\iota_4 \prec \iota_1$ nach [6; Satz 8] und es gilt $(\iota_0, o) = \big(\iota_4, g(M_{\iota_4})\big)$, also ist $\iota_0 \prec \iota_1$, d.h. G ist eine Kette mit genau zwei Elementen. Aus der Voraussetzung $\iota_2 = \iota_0$ bekommt man ein ähnliches Resultat.

Jetzt nehmen wir an, daß $\iota_0 < \iota_2 < \iota_1$. Sichtlich ist entweder $\iota_2 \parallel \iota_3$ oder $\iota_2 = \iota_3$. Setzen wir nun voraus, daß $\iota_2 \parallel \iota_3$. Aus den Beziehungen $(\iota_2, a) \wedge (\iota_3, b) = (\iota_0, o)$ und $(\iota_2, a) \vee (\iota_3, b) = (\iota_1, i)$ folgt $\iota_2 \wedge \iota_3 = \iota_0$, $\iota_2 \vee \iota_3 = \iota_1$. Also ist G ein komplementärer Verband. Setzen wir schließlich voraus $\iota_2 = \iota_3$. Dann ist $a \parallel b$ und M_{ι_2} ist eine nicht nach oben und nicht nach unten gerichtete Menge. Der Arbeit [6; Satz 8] zufolge bekommen wir $\iota_0 \prec \iota_2 \prec \iota_1$, d.h. G ist eine Kette mit genau drei Elementen. Damit ist das Lemma bewiesen.

3. B e m e r k u n g . Jede geordnete Menge läßt sich als eine Ordinalsumme mit nur einem Summanden ausdrücken.

4. B e m e r k u n g . Jede geordnete Menge S mit dem kleinsten Element o und mit dem größten Element i, wo $o \neq i$ ist, läßt sich als eine Ordinalsumme auf alle von folgenden Fälle ausdrücken:

(a) $S = \{o\} \oplus \big(S - \{o\}\big)$,
(b) $S = \big(S - \{i\}\big) \oplus \{i\}$,
(c) $S = \{o\} \oplus \big(S - \{o, i\}\big) \oplus \{i\}$, wenn $S - \{o, i\} \neq \emptyset$ gilt.

5. DEFINITION. *Eine Darstellung einer geordneten Menge mit einem größten und einem kleinsten Element in der Form einer Ordinalsume nennen wir trivial, wenn sie die in der Bemerkung* 3 *und* 4 *beschriebene Form hat.*

6. DEFINITION. *Eine Darstellung einer geordneten Menge* $\sum_{\iota \in G} M_\iota$ *in der Form einer lexikographischen Summe nennen wir trivial, wenn sie eine triviale Darstellung in der Form einer Ordinalsumme hat. Jede andere Darstellung einer lexikographischen Summe nennen wir nicht trivial.*

7. LEMMA. *Sei* $S = \sum_{\iota \in G} M_\iota$ *eine nicht triviale Darstellung eines komplementären Verbandes in der Form einer lexikographischen Summe. Dann hat* G *ein größtes und ein kleinstes Element und* $M_{g(G)}$, $M_{l(G)}$ *sind Mengen mit genau einem Element.*

B e w e i s . Der erste Teil der Behauptung folgt aus dem Lemma 2. Bezeichnen wir $l(S) = (\iota_0, o)$, $g(S) = (\iota_1, i)$. Sei $\iota_2 \in G$ ein beliebiges Element mit $\iota_2 \neq \iota_0$, $\iota_2 \neq \iota_1$. Sei $a \in M_{\iota_2}$ ein beliebiges Element. Bezeichnen wir mit (ι_3, b) ein Komplement von (ι_2, a) in S. Bezüglich der Voraussetzung von Lemma folgt $\iota_2 \parallel \iota_3$. Aus der Voraussetzung, daß S ein Verband ist, folgt nach [6; Satz 8], daß $M_{\iota_2 \wedge \iota_3}$ nach oben und $M_{\iota_2 \vee \iota_3}$ nach unten beschränkte Mengen sind. Daraus folgt $(\iota_0, o) = (\iota_2, a) \wedge (\iota_3, b) = \big(\iota_2 \wedge \iota_3, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_3})\big) = \big(\iota_0, g(M_{\iota_0})\big)$, d.h. $o = g(M_{\iota_0})$. Zugleich ist $o = l(M_{\iota_0})$ in Bezug auf $l(S) = (\iota_o, o)$. Also ist M_{ι_o} eine Menge mit genau einem Element. Ähnlich bekommen wir, daß M_{ι_1} eine Menge mit genau einem Element ist.

8. SATZ. *Sei* S *eine geordnete Menge mit einem größten und einem kleinsten Element, sei* $S = \sum_{\iota \in G} M_\iota$ *ihre nicht triviale Darstellung in der Form einer lexikographischen Summe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) S *is ein komplementärer Verband.*

(ii) S *ist ein Verband,* G *ist ein komplementärer Verband,* $M_{l(G)}$ *und* $M_{g(G)}$ *sind Mengen mit genau einem Element.*

B e w e i s . Die Behauptung (ii) folgt einfach aus (i) nach 2, 5, 6, 7. Es gelte (ii). Es genügt zu beweisen, daß ein beliebiges Element $(\iota_2, a) \in S$ mit $(\iota_2, a) \neq (\iota_0, o)$, $(\iota_2, a) \neq (\iota_1, i)$ ein Komplement in S hat. Die Fälle $\iota_2 = \iota_0 = l(G)$ oder $\iota_2 = \iota_1 = g(G)$ sind unmöglich in Bezug auf die Voraussetzung von dem Satz. Es ist also $\iota_0 < \iota_2 < \iota_1$. Bezeichnen wir mit ι_3 ein Komplement von ι_2 in G. Dann gilt $\iota_3 \parallel \iota_2$ und für ein beliebiges Element $b \in M_{\iota_3}$ haben wir nach [6; Satz 8] einerseits $(\iota_2, a) \wedge (\iota_3, b) = \big(\iota_2 \wedge \iota_3, g(M_{\iota_2 \wedge \iota_3})\big) = \big(\iota_0, g(M_{\iota_0})\big) = (\iota_0, o)$, anderseits $(\iota_2, a) \vee (\iota_3, b) = \big(\iota_2 \vee \iota_3, l(M_{\iota_2 \vee \iota_3})\big) = \big(\iota_1, l(M_{\iota_1})\big) = (\iota_1, i)$. Also ist (ι_3, b) ein Komplement von (ι_2, a) in S.

9. FOLGERUNG. *Seien* G, M *geordnete Mengen. Das Ordinalprodukt* $G \circ M$ *ist ein komplementärer Verband genau dann, wenn* G *und* M *komplementäre Verbände sind und* $\operatorname{card} G = 1$ *oder* $\operatorname{card} M = 1$ *gilt.*

Aus [6; Satz 17] und Satz 8 folgen sofort folgende Behauptungen:

10. FOLGERUNG. *Sei S eine geordnete Menge mit einem größten und einem kleinsten Element. Sei $S = \sum_{\iota \in G} M_\iota$ ihre nicht triviale Darstellung in der Form einer lexikographischen Summe. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(i) *S ist eine Boolesche Algebra.*

(ii) *G ist eine Boolesche Algebra und M_ι ist eine Menge mit genau einem Element für jedes $\iota \in G$.*

11. FOLGERUNG. *Seien G, M geordnete Mengen. Das Ordinalprodukt $G \circ M$ ist eine Boolesche Algebra genau dann, wenn G und M Boolesche Algebren sind und $\operatorname{card} G = 1$ oder $\operatorname{card} M = 1$ gilt.*

12. Bemerkung. Ein komplementärer Verband (eine Boolesche Algebra) läßt sich als eine Ordinalsumme genau dann ausdrücken, wenn er (sie) eine triviale Darstellung in der Form einer lexikographischen Summe hat.

REFERENCES

[1] BIRKHOFF, G.: *An extended arithmetic*, Duke Math. J. **3** (1937), 315–316.

[2] BIRKHOFF, G.: *Generalized arithmetic*, Duke Math. J. **9** (1942), 283–302.

[3] BIRKHOFF, G.: *Lattice Theory* (3rd ed.), Amer. Math. Soc., Providence R.I., 1967.

[4] DAY, M. M.: *Arithmetic of ordered systems*, Trans. Amer. Math. Soc. **58** (1945), 1–43.

[5] KOPEČEK, O.: *Die arithmetischen Operationen für geordnete Mengen*, Spisy PF UJEP v Brně **4** (1968), 157–174.

[6] SLATINSKÝ, E.: *Die Abgeschlossenheit der lexikographischen Summe in der Klasse distributiver Verbände*, Arch. Math. (Brno) **21** (1985), 105–112.

Received April 13, 1990

Revised October 1, 1992

Institute of Mathematics
and Descriptive Geometry
FAST VUT
Žižkova 17
CZ-602 00 Brno
Czech Republic