Mathematica Slovaca

Georges Grekos

Suites équivalentes

Mathematica Slovaca, Vol. 43 (1993), No. 3, 265--276

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136581

Math. Slovaca, **43** (1993), No. 3, 265–276

Mathematica Slovaca

SUITES EQUIVALENTES

GEORGES GREKOS

(*Communicated by Oto Strauch*)

ABSTRACT. For a strictly increasing sequence $A = (a_n)_{n\ge1}$ of positive integers and for each real number $x \ge 1$, let $A(x) = \mathrm{Card}\, A\cap(1,x)$. We prove that among the following equivalence relations defined between sequences:

$$\begin{array}{llll} A\mathcal{R}_1B & \text{if and only if} & A(x) = B(x) + o(x)\,, & x \to +\infty\,, \\ A\mathcal{R}_2B & \text{if and only if} & A(x)/B(x) \to 1\,, & x \to +\infty\,, \\ A\mathcal{R}_3B & \text{if and only if} & b_n/a_n \to 1\,, & n \to +\infty\,, \\ A\mathcal{R}_4B & \text{if and only if} & a_n = b_n + o(n)\,, & n \to +\infty\,, \end{array}$$

$\mathcal{R}_1$ is the weakest one.

For a given sequence A, let $\mathcal{D}(A)$ be the set of ordered pairs

$$\Big(\limsup_{x\to+\infty} C(x)/x,\ \liminf_{x\to+\infty} C(x)/x\Big)\,,$$

where C is a subsequence of A. We prove that under the hypothesis $A\mathcal{R}_1B$, the equality $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ holds. We also discuss about the converse statement.

Remarque préliminaire

Tout au long de cet article, le terme "suite" désigne *une suite infinie strictement croissante d'entiers positifs.* Une suite sera *confondue* avec l'ensemble de ses valeurs. On désigne par S l'ensemble des suites.

RÉSUMÉ. *Soit* $A = (a_n)_{n\ge1}$ *une suite. Pour* x *réel,* $x \ge 1$, *on pose* $A(x) = \mathrm{Card}\, A \cap [1,x]$. *Nous comparons les quatre relations d'équivalence définies dans*

AMS Subject Classification (1991): Primary 11B05.
Key words: Sequence, Density.

l'ensemble S des suites par

$$\begin{array}{llll} A\mathcal{R}_1 B & ssi & A(x) = B(x) + o(x)\,, & x \to +\infty\,; \\ A\mathcal{R}_2 B & ssi & \dfrac{A(x)}{B(x)} \to 1\,, & x \to +\infty\,; \\ A\mathcal{R}_3 B & ssi & \dfrac{b_n}{a_n} \to 1\,, & n \to +\infty\,; \\ A\mathcal{R}_4 B & ssi & a_n = b_n + o(n)\,, & n \to +\infty\,. \end{array}$$

Nous démontrons également que chacune des relations ci-dessus implique que la distribution des densités des sous-suites de A coïncide avec la distribution des densités des sous-suites de B.

1. Paragraphe introductif

On définit les *densités supérieure et inférieure* d'une suite $A = (a_n)_{n \geq 1}$ par

$$\overline{d}A = \limsup_{n \to +\infty} \frac{n}{a_n}\,, \qquad \underline{d}A = \liminf_{n \to +\infty} \frac{n}{a_n}\,.$$

On note $D(A) = (\overline{d}A, \underline{d}A)$ le couple des deux densités; c'est un élément de

$$T = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\,;\ \ 0 \leq x \leq 1\,,\ \ 0 \leq y \leq x\}\,.$$

Pour une suite donnée A, on pose

$$\mathcal{D}(A) = \{D(C) \in T\,;\ \ C \subset A\}\,.$$

Cet ensemble est décrit dans [1] comme étant une partie convexe et fermée de T (Figure 1).

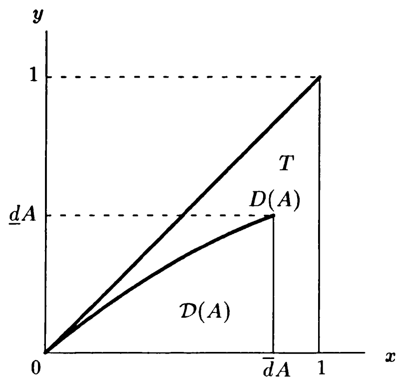

Figure 1.

D'autres propriétés relatives à $\mathcal{D}(A)$ ont été établies dans [3], tandis que dans [2] on montre qu'un ensemble du même type apparaît quand on étudie les limites, supérieure et inférieure, des valeurs moyennes des fonctions définies sur $\mathbb{R}_+$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$.

Intuitivement deux suites A et B, suffisamment "proches" l'une à l'autre, auront les mêmes ensembles de densités:

$$\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B). \tag{1}$$

Afin de définir la proximité entre deux suites A et B, j'ai été amené à considérer les relations $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_4$ (cf. Résumé) et à les comparer; c'est $\mathcal{R}_1$ qui est la moins fine des quatre: elle contient les autres. Les résultats de la comparaison sont présentés dans le paragraphe 2. Je démontre ensuite (paragraphe 3) que $\mathcal{R}_1$ entraîne (1). Le texte finit (paragraphe 4) par quelques remarques.

A noter que la condition $D(A) = D(B)$, conséquence évidente de $\mathcal{R}_1$, n'implique pas, elle seule, la validité de (1). Ce résultat fait partie du contenu de l'article [3].

Soient A une suite, x et y deux réels tels que $1 \leq x < y$. On pose

$$A(x,y) = \operatorname{Card} A \cap]x,y].$$

On a

$$A(x,y) = A(y) - A(x),$$

où

$$A(z) = \operatorname{Card} A \cap [1,z].$$

On a aussi

$$A(x,y) < y - x + 1.$$

On vérifie aisément que

$$\overline{d}A = \limsup_{x \to +\infty} \frac{A(x)}{x} = \limsup_{n \to +\infty} \frac{A(n)}{n},$$

n étant entier et x réel, ainsi que les égalités analogues pour la densité inférieure $\underline{d}A$.

2. Comparaison des quatre relations.

On constate facilement que chacune des relations $\mathcal{R}_1$ à $\mathcal{R}_4$ (cf. Résumé) est une relation d'équivalence. On identifie une relation $\mathcal{R}$ avec l'ensemble des couples (A,B) tels que $A\mathcal{R}B$. Par la suite, quand $A\mathcal{R}B$ entraîne $A\mathcal{R}'B$, nous écrirons indifféremment $\mathcal{R} \Longrightarrow \mathcal{R}'$ ou $\mathcal{R} \subset \mathcal{R}'$.

THÉORÈME 1. *Les relations $\mathcal{R}_1$, $\mathcal{R}_2$, $\mathcal{R}_3$, $\mathcal{R}_4$ vérifient les inclusions de la Figure 2. Toutes ces inclusions sont strictes.*

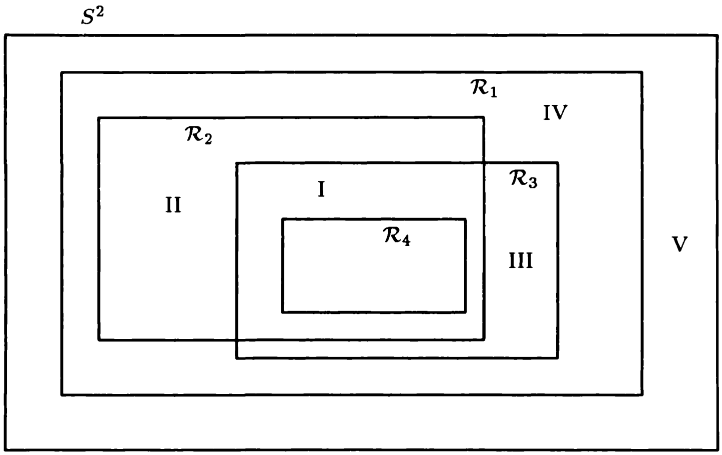

Figure 2.

Démonstration des inclusions.

$\mathcal{R}_4 \Longrightarrow \mathcal{R}_3$:

Ceci résulte de la relation

$$\frac{b_n - a_n}{a_n} = \frac{b_n - a_n}{n}\frac{n}{a_n}, \qquad \text{où} \quad 0 < \frac{n}{a_n} \leq 1. \tag{2}$$

$\mathcal{R}_4 \Longrightarrow \mathcal{R}_2$:

Etablissons la propriété suivante.

LEMME 1. *Si $b_n \leq x < b_{n+1}$, alors*

$$|A(x) - B(x)| \leq \max\{|a_n - b_n|, |a_{n+1} - b_{n+1}|\}.$$

Démonstration. On pose $d_i = |a_i - b_i|$. On en déduit que $a_n \leq b_n + d_n \leq x + d_n$ et $x - d_{n+1} < b_{n+1} - d_{n+1} \leq a_{n+1}$. Donc

$$A(x) = A(x - d_{n+1}) + A(x - d_{n+1}, x) < n + d_{n+1} + 1, \quad \text{et}$$
$$A(x) = A(x + d_n) - A(x, x + d_n) > n - d_n - 1.$$

Puisque $B(x) = n$, on obtient

$$|A(x) - B(x)| < 1 + \max\{d_n, d_{n+1}\}.$$

Du fait que les expressions en présence dans cette inégalité sont des entiers, la relation du lemme en découle.

Montrons que $\mathcal{R}_4$ entraîne $\mathcal{R}_2$. Nous supposons $A\mathcal{R}_4B$. Soit $\varepsilon > 0$. Il existe $n_0 = n_0(\varepsilon)$ tel que, pour $n \geq n_0$, $\left|\frac{a_n - b_n}{n}\right| \leq \varepsilon$. Nous appliquons l'inégalité du Lemme 1 avec $x \geq b_{n_0}$ et n tel que $b_n \leq x < b_{n+1}$; cette inégalité implique

$$|A(x) - B(x)| \leq (n+1)\max\left\{\left|\frac{a_n - b_n}{n}\right|, \left|\frac{a_{n+1} - b_{n+1}}{n+1}\right|\right\}, \quad \text{d'où}$$
$$|A(x) - B(x)| \leq (n+1)\varepsilon,$$

et, puisque $B(x) = n$, $\left|\frac{A(x)}{B(x)} - 1\right| \leq \left(1 + \frac{1}{B(x)}\right)\varepsilon$. Il en résulte que

$$\limsup_{x\to+\infty}\left|\frac{A(x)}{B(x)} - 1\right| \leq \varepsilon.$$

Ceci étant vrai quel que soit $\varepsilon > 0$, la relation $A\mathcal{R}_2B$ en découle.

$\mathcal{R}_2 \implies \mathcal{R}_1$:

Ceci est une conséquence de

$$\frac{A(x) - B(x)}{x} = \frac{A(x) - B(x)}{B(x)} \cdot \frac{B(x)}{x}, \quad \text{où} \quad 0 < \frac{B(x)}{x} \leq 1, \qquad (x \geq b_1). \tag{3}$$

$\mathcal{R}_3 \implies \mathcal{R}_1$:

Commençons par établir la propriété suivante.

Lemme 2. *Si $a_n \leq x < a_{n+1}$, alors*

$$|A(x) - B(x)| < 1 + x\max\left\{\left|\frac{b_n}{a_n} - 1\right|, \left|\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - 1\right|\right\}.$$

Démonstration. On pose $\varepsilon_n = \left|\frac{b_n}{a_n} - 1\right|$, $\varepsilon_{n+1} = \left|\frac{b_{n+1}}{a_{n+1}} - 1\right|$.

On en déduit que

$$b_n \leq a_n(1 + \varepsilon_n) \leq x(1 + \varepsilon_n),$$

et

$$a_{n+1}(1 - \varepsilon_{n+1}) \leq b_{n+1},$$

d'où
$$x\,(1-\varepsilon_{n+1}) < b_{n+1}\,.$$
Il vient que
$$B(x) = B(x+x\varepsilon_n) - B(x, x+x\varepsilon_n) > n - x\varepsilon_n - 1\,,$$
et
$$B(x) = B(x-x\varepsilon_{n+1}) + B(x-x\varepsilon_{n+1},\, x) < n + x\varepsilon_{n+1} + 1\,,$$
d'où l'on obtient
$$-x\varepsilon_n - 1 < B(x) - n < x\varepsilon_{n+1} + 1\,.$$
Du fait que $A(x) = n$, la relation énoncée en découle, ce qui achève la démonstration du Lemme 2.

L'implication $\mathcal{R}_3 \Longrightarrow \mathcal{R}_1$ résulte facilement de ce lemme.

Exemples qui montrent que les inclusions sont strictes.

Les exemples sont numérotés I, II, III, IV suivant la désignation des régions dans la Figure 2.

Exemple I. ($\mathcal{R}_2$ et $\mathcal{R}_3$) $\not\Longrightarrow \mathcal{R}_4$.
$$a_n = n^2\,, \qquad b_n = n^2 + n\,.$$

Exemple II. $\mathcal{R}_2 \not\Longrightarrow \mathcal{R}_3$.
$$a_n = n!\,, \qquad b_n = 2a_n\,.$$

Exemple III. $\mathcal{R}_3 \not\Longrightarrow \mathcal{R}_2$.

A et B sont constituées de blocs d'entiers consécutifs. Les blocs de A sont de la forme
$$m!+1,\, m!+2,\, \dots, m!+2^m$$
et ceci pour $m = 3,4,5,\dots$. B est constituée des blocs
$$m!+2^m+1,\, m!+2^m+2,\, \dots, m!+2\cdot 2^m, \qquad (m = 3,4,5,\dots)\,.$$
On constate aisément que $\dfrac{b_n}{a_n} \to 1$ $(n \to +\infty)$, car $m!$ l'emporte sur 2^m, tandis que
$$\frac{A(m!+2^m)}{B(m!+2^m)} \to 2\,, \qquad (m \to +\infty)\,.$$

Exemple IV. $\mathcal{R}_2 \not\Longrightarrow$ ($\mathcal{R}_1$ ou $\mathcal{R}_3$).
$$a_n = 3^n\,, \qquad b_n = 2^n\,.$$
On a $A(x) = \left[\dfrac{\log x}{\log 3}\right]$, $B(x) = \left[\dfrac{\log x}{\log 2}\right]$ et on constate facilement que A, B vérifient la relation $\mathcal{R}_2$ mais pas la relation $\mathcal{R}_1$ ni la relation $\mathcal{R}_3$.

3. Densités des sous-suites

THÉORÈME 2. *Si* $A(x) = B(x) + o(x)$, *alors* $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

Démonstration. L'hypothèse $A(x) = B(x) + o(x)$ implique que $\overline{d}A = \overline{d}B$ et $\underline{d}A = \underline{d}B$. Si $\overline{d}A = 0$, on a $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B) = \{(0,0)\}$. Supposons $\overline{d}A > 0$. Soit $w \in \left]0, \overline{d}A\right[$. Il existe des sous-suites C de A avec densité supérieure $\overline{d}C = w$ et telles que la densité inférieure $\underline{d}C$ soit maximale. Une telle sous-suite, introduite dans [1], est définie par récurrence de la façon suivante.

On convient à ce que $C(0) = 0$ et, pour $n = 1, 2, 3, \ldots$ successivement, n appartiendra à C si et seulement si les deux conditions ci-dessous soient vérifiées:

$$n \in A, \tag{C1}$$

$$C(n-1) + 1 \leq wn. \tag{C2}$$

De façon analogue on définit une sous-suite D de B avec $\overline{d}D = w$ et $\underline{d}D$ maximale.

Pour établir l'égalité (1), il suffit de montrer que $\underline{d}C = \underline{d}D$. Ceci est une conséquence de la relation $D(x) - C(x) = o(x)$ que nous allons établir. Pour cela, considérons un réel $\varepsilon > 0$. Il faut montrer qu'il existe $x_0 = x_0(\varepsilon)$ tel que, pour tout $x \geq x_0$, $|D(x) - C(x)| \leq \varepsilon x$. Pour des raisons de symétrie, il suffit de prouver qu'il existe $x_1 = x_1(\varepsilon)$ tel que, pour tout $x \geq x_1$, $D(x) - C(x) \leq \varepsilon x$. Il suffit également de prouver qu'il existe un entier naturel $n_1 = n_1(\varepsilon)$ tel que, pour tout entier $n \geq n_1$, $D(n) - C(n) \leq \varepsilon n$.

Pour chaque entier $n \geq n_0$, nous désignons par $k = k(n)$ l'unique entier vérifiant

(i) $k \leq n$,
(ii) $k \in A \setminus C$,
(iii) k maximal.

On choisit comme n_0 un entier $k_0 \in A \setminus C$.

Puisque $k \in A \setminus C$, on a

$$C(k-1) + 1 > wk \quad \text{et} \quad C(k) = C(k-1) \leq w(k-1) < wk,$$

d'où

$$wk - 1 < C(k) < wk.$$

On en déduit que

$$\begin{aligned} D(n) - C(n) &= D(k) + D(n) - D(k) - \left[C(k) + A(n) - A(k)\right] \\ &\leq D(k) - C(k) + B(n) - B(k) - A(n) + A(k) \\ &\leq wk - wk + 1 + B(n) - A(n) + A(k) - B(k). \end{aligned}$$

Choisissons n_2 tel que, pour tout $n \geq n_2$, $n \geq \frac{3}{\varepsilon}$ et $\left|\frac{A(n) - B(n)}{n}\right| \leq \frac{\varepsilon}{3}$. Soit n_1 tel que $k(n_1) \geq n_2$. Alors, pour tout $n \geq n_1$, on obtient $D(n) - C(n) \leq 1 + \frac{\varepsilon n}{3} + \frac{\varepsilon n}{3} \leq \varepsilon n$. Ainsi s'achève la démonstration du Théorème 2.

Le referee de l'article a demandé de préciser dans quels cas la réciproque du Théorème 2 est valable et dans quels cas elle ne l'est pas. En d'autres termes, sous quelles conditions la relation $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$ entraîne:

$$\lim_{x \to \infty} \frac{A(x) - B(x)}{x} = 0 .$$

Dans le cas où $\mathcal{D}(A)$ (et $\mathcal{D}(B)$ qui lui est égal) est un triangle isocèle, c'est-à-dire quand le point extrême $D(A) = (\overline{d}A, \underline{d}A)$ de $\mathcal{D}(A)$ se trouve sur la première bissectrice, la réciproque est vraie: si x tend vers $+\infty$, alors $\frac{A(x) - B(x)}{x}$ tend vers $d - d = 0$, où d désigne la densité, inférieure et supérieure, de A et de B.

L'exemple ci-dessous montre que la réciproque au Théorème 2 n'est pas vraie en général. Nous posons, pour tout $n \geq 1$, $a_n = (n!)^2$ et $b_n = (n+1)a_n$. Soit

$$A = \bigcup_{n=1}^{+\infty} \{a_n + 1, a_n + 2, \ldots, b_n\} .$$

Nous avons $\frac{A(a_n)}{a_n} < \frac{b_{n-1}}{a_n} = \frac{1}{n}$, et ce dernier membre tend vers 0, d'où $\underline{d}A = 0$. Egalement, $\frac{A(b_n)}{b_n} > \frac{b_n - a_n}{b_n} = \frac{n}{n+1}$, qui tend vers 1, d'où $\overline{d}A = 1$. Il en résulte que $\mathcal{D}(A)$ est le segment de base du triangle T (Figure 1):

$$\mathcal{D}(A) = \{(x,0) \in T ;\ \ 0 \leq x \leq 1\} .$$

Soit $B = \mathbb{N}^* \setminus A$ le complémentaire de A dans $\mathbb{N}^*$. Nous avons

$$\overline{d}B = 1 - \underline{d}A = 1 , \qquad \underline{d}B = 1 - \overline{d}A = 0 ,$$

et par conséquent $\mathcal{D}(B) = \mathcal{D}(A)$. La relation $A(x) = B(x) + o(x)$ n'est pas vérifiée car l'expression

$$\frac{A(b_n) - B(b_n)}{b_n} = \frac{A(a_n) + b_n - a_n - B(a_n)}{(n+1)a_n} = \frac{1}{n+1} \frac{A(a_n) - B(a_n)}{a_n} + \frac{n}{n+1}$$

tend vers 1 (tenir compte de l'inégalité $|A(a_n) - B(a_n)| \leq a_n$).

Pour répondre de façon plus complète à la question posée, je suis obligé dans la démonstration de me référer à l'une des deux constructions (légèrement différentes) présentées respectivement dans [1] et dans [3], où l'on construit des suites A ayant une région donnée comme ensemble $\mathcal{D}(A)$.

Relativement à deux suites A et B (quelconques), posons:

$$L_1 = \limsup_{x \to +\infty} \frac{A(x) - B(x)}{x}, \qquad L_2 = \liminf_{x \to +\infty} \frac{A(x) - B(x)}{x}.$$

Nous avons toujours

$$\underline{d}A - \overline{d}B \leq L_2 \leq L_1 \leq \overline{d}A - \underline{d}B.$$

Le Théorème 2 dit que $L_1 = L_2 = 0$ entraîne $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$.

La propriété que nous allons énoncer et démontrer, nous dit que même dans l'hypothèse $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$, la quantité $\dfrac{A(x) - B(x)}{x}$ peut osciller aussi largement que permet l'inégalité précédente. Il n'est pas nécessaire d'exiger que $\mathcal{D}(A) = \mathcal{D}(B)$. Nous supposerons seulement que les sommets extrêmes (supérieurs droits) coïncident.

THÉORÈME 3. *Soit* (β, α) *un point de* T: $0 \leq \alpha \leq \beta \leq 1$. *Soient* S_1, S_2 *deux parties de* T *vérifiant, pour* $i = 1$ *et* $i = 2$, *les trois propriétés ci-dessous:*

a) S_i *contient le triangle de sommets* $(0,0)$, $(\beta, 0)$, (β, α) *et est contenue dans le trapèze de sommets* $(0,0)$, $(\beta, 0)$, (β, α), (α, α);

b) S_i *est convexe;*

c) S_i *est fermée.*

Alors il existe deux suites A *et* B *telles que*

$$\mathcal{D}(A) = S_1, \quad \mathcal{D}(B) = S_2, \quad \textit{et}$$
$$\alpha - \beta = L_2 \leq L_1 = \beta - \alpha.$$

D é m o n s t r a t i o n. Je me réfère à la construction explicitée dans [3]. Il sera commode pour le lecteur d'avoir sous les yeux la Figure 3, page 136, de l'article cité. Je me bornerai ici de traiter le cas $0 < \beta < 1$. Le cas $\beta = 0$ est trivial; le cas $\beta = 1$ nécessiterait une démonstration analogue. Dans [3], on construit une suite A avec $\mathcal{D}(A) = S_1$ d'une manière que je résume ci-dessous.

Connaissant $A \cap [1, a_n]$ telle que $|A(a_n) - \beta a_n| \leq 1$, on construit $A \cap]a_n, a_n u_n]$ pour un certain *réel* $u_n > 1$. Le choix de la suite réelle $(u_n)_{n \geq 1}$, ainsi que le choix des entiers de l'intervalle $]a_n, a_n u_n]$ qui appartiennent à A, sont eux qui feront que la frontière de $\mathcal{D}(A)$, entre $(0,0)$ et (β,α), coïncidera avec la partie supérieure de la frontière de S_1, à condition de respecter, de $a_n u_n$ jusqu'à a_{n+1}, la règle suivante: mettre d'abord dans A un bloc (ensemble d'entiers consécutifs) de $a_n u_n$ jusqu'à un certain b_n tel que $|A(b_n) - \beta b_n| \leq 1$ (ceci est bien possible car on a $A(x) < \beta x$, pour tout $x \in \,]a_n, a_n u_n]$); ensuite, de b_n jusqu'à un certain a_{n+1} *aussi grand que l'on veut*, on construit $A \cap \,]b_n, a_{n+1}]$ avec densité "locale" proche de β; c'est-à-dire, pour tous x, y avec $b_n \leq x \leq y \leq a_{n+1}$, on a

$$|A(x,y) - (y-x)\beta| \leq 1 .$$

Le fait que a_{n+1} peut être choisi arbitrairement grand, permet de construire, parallèlement à A et avec le même mécanisme, une suite B telle que $\mathcal{D}(B) = S_2$ et pour laquelle les suites correspondantes (a'_n), (b'_n) vérifient

$$\cdots < a_n < a_n u_n < b_n < a'_n < a'_n u'_n < b'_n < a_{n+1} < a_{n+1} u_{n+1} < b_{n+1} < \cdots .$$

Une des conséquences du choix des u_n, u'_n ([3, p.137]) est que

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{A(a_n u_n)}{a_n u_n} = \alpha = \liminf_{n\to+\infty} \frac{B(a'_n u'_n)}{a'_n u'_n} .$$

Le Théorème 3 résulte de cette propriété et du fait que $|B(a_n u_n) - \beta a_n u_n| \leq 1$ et $|A(a'_n u'_n) - \beta a'_n u'_n| \leq 1$. On a en effet

$$\liminf_{n\to+\infty} \frac{A(a_n u_n) - B(a_n u_n)}{a_n u_n} = \liminf_{n\to+\infty} \frac{A(a_n u_n)}{a_n u_n} - \lim_{n\to+\infty} \frac{B(a_n u_n)}{a_n u_n} = \alpha - \beta$$

et

$$\limsup_{n\to+\infty} \frac{A(a'_n u'_n) - B(a'_n u'_n)}{a'_n u'_n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{A(a'_n u'_n)}{a'_n u'_n} - \liminf_{n\to+\infty} \frac{B(a'_n u'_n)}{a'_n u'_n} = \beta - \alpha .$$

COROLLAIRE. *La réciproque du Théorème 2 n'est valable que si* $\underline{d}A = \overline{d}A$.

4. Quelques remarques

Considérons la partition suivante de S:

$$S = S_0 \cup S_{01} \cup S_1 \tag{4}$$

où

$$\begin{aligned} S_0 &= \{A \in S\,;\ \overline{d}A = 0\}\,, \\ S_{01} &= \{A \in S\,;\ 0 = \underline{d}A < \overline{d}A\}\,, \\ S_1 &= \{A \in S\,;\ \underline{d}A > 0\}\,. \end{aligned}$$

Cette partition est compatible avec la relation $\mathcal{R}_1$: si $A\mathcal{R}_1B$, alors A et B appartiennent au même ensemble de la partition (4). Cela signifie que si, sur la Figure 2, on remplace S par S_0 ou par S_{01} ou par S_1, on observe les mêmes inclusions. Mais ces inclusions restent-elles strictes ?

Cas de S_0 : La région V (Figure 2) est vide. D'après les exemples du paragraphe 2, toutes les autres régions sont non vides. La numérotation des régions (Figure 2) correspond à la numérotation des exemples (§2).

Cas de S_{01} : Il s'agit d'un problème ouvert. Probablement toutes les régions sont non vides.

Cas de S_1 : On a $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3 \subset \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1 \subset S_1^2$, les inclusions étant strictes. Les égalités $\mathcal{R}_4 = \mathcal{R}_3$ et $\mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_1$ résultent des relations (2) et (3) respectivement. Voici un exemple qui montre que $\mathcal{R}_2$ n'entraîne pas $\mathcal{R}_3$.

Exemple II bis: $\mathcal{R}_2 \not\Rightarrow \mathcal{R}_3$.

Soit

$$A = \bigcup_{m \geq 2} [2^{m-1},\, 3 \cdot 2^{m-2} - 1]\,,$$

où $[a,b]$ désigne l'ensemble des *entiers* h, $a \leq h \leq b$. Ensuite on perturbe la suite A en enlevant le plus grand élément de chaque bloc et en ajoutant un élément au début du bloc qui suit:

$$B = \{2,4\} \cup \left(\bigcup_{m \geq 4} [2^{m-1} - 1,\, 3 \cdot 2^{m-2} - 2] \right).$$

$B(x)$ est égal soit à $A(x)$ soit à $A(x) - 1$, d'où la validité de $A\mathcal{R}_2B$. Mais $\mathcal{R}_3$ n'est pas valable:

$$\frac{3 \cdot 2^{m-2} - 1}{2^m - 1} \to \frac{3}{4}\,, \qquad (m \to +\infty)\,.$$

Enfin soit d un réel, $0 < d \leq 1$; considérons le sous-ensemble $S_{1,d}$ de S_1 constitué des suites qui possèdent une densité égale à d:

$$S_{1,d} = \{A \in S\,;\ \underline{d}A = \overline{d}A = d\} \subset S_1\,.$$

La relation $\mathcal{R}_1$ est compatible avec $S_{1,d}$: si $A\mathcal{R}_1B$ et $A \in S_{1,d}$, alors $B \in S_{1,d}$. Si dans la Figure 2 on remplace S par $S_{1,d}$, on a

$$\mathcal{R}_1 = \mathcal{R}_2 = \mathcal{R}_3 = \mathcal{R}_4 = S_{1,d}^2 .$$

En d'autres termes, les régions I, II, III, IV et V sont vides. En effet, supposons $\underline{d}A = \overline{d}A = \underline{d}B = \overline{d}B = d > 0$.

On a:

$$\frac{A(x)}{B(x)} = \frac{A(x)/x}{B(x)/x} \to \frac{d}{d} = 1,$$

ce qui signifie que III, IV et V sont vides. Puis, la relation

$$\frac{b_n}{a_n} = \frac{n/a_n}{n/b_n}$$

donne

$$\frac{\underline{d}A}{\overline{d}B} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \le \limsup_{n\to\infty} \frac{b_n}{a_n} \le \frac{\overline{d}A}{\underline{d}B} .$$

Dans le cas de $S_{1,d}$, le premier et le dernier membre de cet encadrement valent 1, et la validité de $\mathcal{R}_3$ en résulte; il vient que II est vide. La région I est vide, comme pour S_1.

REFERENCES

[1] GREKOS, G.: *Répartition des densités des sous-suites d'une suite d'entiers*, J. Number Theory **10** (1978), 177–191.

[2] GREKOS, G.: *Moyennes limites et convexité*, Period. Math. Hungar. **22** (1990), 159–166.

[3] GREKOS, G.—VOLKMANN, B.: *On densities and gaps*, J. Number Theory **26** (1987), 129–148.

Received October 7, 1991

Revised October 7, 1992

Faculté de Sciences et Techniques
23 rue du Dr Paul Michelon
F-42023 Saint-Etienne Cédex
France