Evgenij Ivanovich Moiseev; Mária Barnovská

О безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора первого порядка в пространствах вектор—функций

Mathematica Slovaca, Vol. 40 (1990), No. 3, 325--336

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136514`

Math. Slovaca 40, 1990, No. 3, 325—336

О БЕЗУСЛОВНОЙ БАЗИСНОСТИ СИСТЕМЫ СОБСТВЕННЫХ И ПРИСОЕДИНЕННЫХ ФУНКЦИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА ПЕРВОГО ПОРЯДКА В ПРОСТРАНСТВАХ ВЕКТОР—ФУНКЦИЙ

Е. И. МОИСЕЕВ[1]—М. БАРНОВСКА

ABSTRACT. With using the explicit form of boundary conditions the question of the absolute basisness of the system of eigenfunctions and adjoint functions of the first order differential operator $Lu = u' + q(x)u$ is studied. The operator L with the matrix complex-valued potential is considered on the space $L_2(G)$ of vector functions on a finite interval $(-R, R)$.

В настоящей работе изучается вопрос о безусловной базисности системы собственных и присоединенных функций дифференциального оператора первого порядка

$$Lu = u' + q(x)u, \tag{1}$$

рассматриваемого на конечном интервале $(-R, R)$, где $u = (u^1, \ldots, u^n)$ — n-мерный вектор-столбец, $q(x)$ — матрица $n \times n$, причем элементы матрицы $q_{ij} \in L_2(-R, R)$.

В работе устанавливается необходимое и достаточное условие безусловной базисности в $L_2(-R, R)$ системы собственных и присоединенных функций, которое формулируется в терминах, не использующих явный вид граничных условий.

Целесообразность рассматриваемого в работе вопроса мотивирована тем, что во многих случаях можно свести обобщенную здачу о собственных значениях в пространстве скалярных и векторных функций (т.е. задачу, в которой коэффициенты в дифференциальном выражении и краевые условия содержат параметр) к некоторой обычной задаче о соб-

AMS Subject Classification (1980): Primary 47E05, Secondary 34B25.
Key Words: Eigen functions, Absolute basisness.

[1] Совместная работа возникла во время пребывания проф. Е. И. Моисеева в Братиславе в рамках плану сотрудничества между Московским университетом им. Ломоносова и Братиславским университетом им. Коменского.

ственных значениях в пространстве вектор—функций (см. пример в [1], стр. 111).

Перейдем к формулировке полученных результатов.

Под собственной функцией оператора (1), отвечающей собственному значению λ, будем понимать любую неравную тождественно нулю комплекснозначную функцию $\overset{\circ}{u}(x)$, которая абсолютно непрерывна, имеет первую производную суммируемую с квадратом в интервале $(-R, R)$ и удовлетворяет почти влюду в $(-R, R)$ уравнению $L\overset{\circ}{u} - \lambda\overset{\circ}{u} = 0$.

Аналогично под присоединенной функцией этого оператора порядка $l = 1, 2, \ldots$, соответствующей тому же λ и собственной функции $\overset{\circ}{u}(x)$, будем понимать любую комплекснозначную функцию $\overset{l}{u}(x)$, которая абсолютно непрерывна в $(-R, R)$, имеет первую производную суммируемую с квадратом и удовлетворяет почти всюду в интервале $(-R, R)$ уравнению $L\overset{l}{u} - \lambda\overset{l}{u} = \overset{l-1}{u}$.

Рассмотрим совершенно произвольную полную и минимальную в $L_2(-R, R)$ систему $\{u_k(x)\}$, состоящую из понимаемых в указанном выше смысле собственных и присоединенных функций оператора (1), причем будем требовать, чтобы вместе с каждой присоединенной порядка $l \geqq 1$ функцией оператора (1) эта система обязательно содержала все присоединенные функции порядка меньше l и собственную функцию, по которой были построены присоединенные. Это означает, что любая фнкция $u_k(x)$ абсолютно непрерывна в $(-R, R)$, имеет первую производную суммируемую с квадратом и удовлетворяет почти влюду в $(-R, R)$ уравнению $Lu_k - \lambda_k u_k = \theta_k u_{k-1}$, где число θ_k равно либо нулю (в этом случае u_k называется собственной функцией), либо единице (в етом случае u_k называется присоединенной функцией).

Из полноты и минимальности в $L_2(-R, R)$ системы $\{u_k\}$ вытекает существование системы $\{v_k\}$, биоорогонально сопряженной в $L_2(-R, R)$ к системе $\{u_k\}$.

Теорема. *Пусть* $\{u_k(x)\}$*-произвольная полная и минимальная в* $L_2(-R, R)$ *система, состоящая из понимаемых в указанном выше смысле собственных и присоединенных функций оператора* (1) *и пусть выполнены следующие условия*:

1. существует постоянная M_1, такая, что для всех k справедливо неравенство

$$|\operatorname{Re}\lambda_k| \leqq M_1; \tag{2}$$

2. существует постоянная M_2 *такая, что для всех* $t \geqslant 0$ *справедливо неравенство*

$$\sum_{t \leqq |\lambda_k| \leqq t+1} 1 \leqq M_2;$$

3. биоортогонально сопряженная в $L_2(-R, R)$ система $\{v_k\}$ к системе $\{u_k\}$ *состоит из понимаемых в указанном выше смысле собственных и присоединенных функций дифференциального оператора**)

$$L^* v = -v' + q^*(x) v,$$

т.е. каждый элемент $v_k(x)$ абсолютно непрерывен в интервале $(-R, R)$, *имеет первую производную суммируемую с квадратом и почти всюду в* $(-R, R)$ *удовлетворяет уравнению*

$$L^* v_k - \bar{\lambda}_k v_k = \theta_{k+1} v_{k+1}.$$

При выполнении этих условий необходимым и достаточным условием безусловной базисности в $L_2(-R, R)$ *является существование постоянной* $C > 0$ *такой, что для всех* k *выполняется неравенство*

$$\|u_k\|_{L_2(-R, R)} \|v_k\|_{L_2(-R, R)} \leqq C, \tag{3}$$

где под нормой понимаем следующее

$$\|u\|^2_{L_2(-R, R)} = \sum_{j=1}^{n} \int_{R}^{R} |u^j|^2 \, dx.$$

Требуется доказать только достаточность, так как необходимость условия (3) известна (см. [2], стр. 372). Схема доказательства в основном следует работе В. А. Ильина [3] с использованием оценок, бизких к работам И. С. Ломова [4] и В. В. Тихомирова [5].

Для доказательства достаточности приведем вначале некоторые вспомогательные формулы, сформулированные и доказанные в следующих леммах.

Лемма 1. *Пусть* $u(x)$ *абсолютно непрерывна в* $(-R, R)$ и удовлетворяет уравнению

$$u' = \lambda u + f, \tag{4}$$

где $f \in L_2(-R, R)$. *Тогда для любой точки* $x \in [-R, R]$ и *любого* $\eta > 0$ *такого, что* $x + \eta \in [-R, R]$, *справедлива формула*

$$u(x + \eta) = \exp(\lambda \eta) u(x) + \int_0^{\eta} \exp[\lambda(\eta - t)] f(x + t) \, dt. \tag{5}$$

---

*) Оператор L^* является формально сопряженным к оператору (1), причем $q^*(x) = \overline{q^T(x)}$; число θ_{k+1} равно либо 0 (в этом случае мы называем v_k собственной функцией оператора L^*), либо единице (в этом случае мы требуем, чтобы $\lambda_k = \lambda_{k+1}$, и называем v_k присоединенной функцией оператора L^*).

Доказательство. Известно, что любое абсолютно непрерывное решение уравнения (4) можно записать в виде

$$u(x) = A\exp(\lambda x) + \int_0^\eta \exp[\lambda(x-t)]\,f(t)\,\mathrm{d}t,$$

где A — постоянный вектор.

Используя этот общий вид, сразу убеждаемся в справедливости формулы (5). Лемма доказана.

Сладствие 1. *Пусть u_k удовлетворяет почти всюду уравнению $u_k' + q$-$u_k = \lambda_k u_k + u_{k-1}$, тогда справедлива формула*

$$u_k(x+\eta) = u_k(x)\exp(\lambda_k\eta) - \int_0^\eta q(x+t)\,u_k(x+t)\exp[\lambda_k(\eta - t)]\,\mathrm{d}t + \\ + \int_0^\eta u_{k-1}(x+t)\exp[\lambda_k(\eta-t)]\,\mathrm{d}t. \tag{6}$$

В частности, если $u_k(x)$ — собственная функция, то

$$u_k(x+\eta) = u_k(x)\exp(\varkappa_k\eta) - \int_0^\eta q(x+t)\,u_k(x+t)\exp[\varkappa_k(\eta-t)]\,\mathrm{d}t, \tag{7}$$

Следствие 2. *Пусть u_k удовлетворяет почти всюду уравнению $u_k' + {}$ $+ qu_k = \lambda_k u_k + u_{k+1}$, а u_{k-1} удовлетворяет почти всюду уравнению $u_{k-1}' + qu_{k-1} = \lambda_k u_{k-1} + u_{k-2}$, тогда имеет место формула*

$$u_k(x+\eta) = u_k(x)\exp(\lambda_k\eta) - \int_0^\eta q(x+t)\,u_k(x+t)\exp[\lambda_k(\eta-t)]\,\mathrm{d}t + \\ + \eta u_{k-1}(x)\exp(\lambda_k\eta) - \int_0^\eta (\eta - z)\,u_{k-1}(x+z)\,q(x+z)\,. \\ .\exp[\lambda_k(\eta-z)]\,\mathrm{d}z + \int_0^\eta (\eta-z)\,u_{k-2}(x+z)\exp[\lambda_k(\eta-z)]\,\mathrm{d}z. \tag{8}$$

Формула (8) следует из формулы (6) путем подстановки в (6) значения $u_{k-1}(\,+t)$, найденного по формуле (6), т.е.

$$u_{k-1}(x+t) = u_{k-1}(x)\exp(\lambda_k t) - \int_0^t q(x+z)\,u_{k-1}(x+z)\,. \\ .\exp[\lambda_k(t-z)]\,\mathrm{d}z + \int_0^t u_{k-2}(x+z)\exp[\lambda_k(t-z)]\,\mathrm{d}z.$$

Действительо, подставляя это выражение в (6) и меняя порядки интегрирования, найдем

$$u_k(x+\eta) = u_k(x)\exp(\lambda_k\eta) - \int_0^\eta q(x+t)\,u_k(x+t)\exp[\lambda_k(\eta-t)]\,\mathrm{d}t +$$

$$+\ \eta\exp[(\lambda_k\eta)\,u_{k-1}(x) - \int_0^\eta q(x+z)\,u_{k-1}(x+z)\,.$$

$$.\exp[\lambda_k(\eta-z)]\,\mathrm{d}z\int_z^\eta \mathrm{d}t + \int_0^\eta u_{k-2}(x+z)\exp[\lambda_k(\eta-z)]\,\mathrm{d}z\int_z^\eta \mathrm{d}t,$$

откуда легко вытекает (8).

Примечание 1. В дальнейшем мы будем обозначать буквой C ради упрощения записи без индексов некоторые хотя и различные по значению постоянные

Лемма 2. *Для интегралов*

$$I_0(x,\ \eta,\ u) = \int_0^\eta q(x+z)\,u(x+z)\exp[\lambda(\eta-z)]\,\mathrm{d}z,$$

$$I_1(x,\ \eta,\ u) = \int_0^\eta (\eta-z)\,q(x+z)\,u(x+z)\exp[\lambda(\eta-z)]\,\mathrm{d}z$$

справедливы следующие оценки при $\eta = \delta \to 0$:

$$\|I_0(x,\ \delta,\ u)\|_{L_2(a,b)} \leqq o(1)\|u\|_{L_2(a,b+\delta)}, \tag{9}$$

$$\|I_1(x,\ \delta,\ u)\|_{L_2(a,b)} \leqq o(\delta)\|u\|_{L_2(a,b+\delta)}, \tag{10}$$

где $(a,\ b+\delta) \subset (-R, R)$.

Доказательство. Заметим, что

$$\|I_0 x,\ \delta,\ u)\|^2_{L_2(a,b)} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left|\int_0^\delta \sum_{j=1}^n q_{ij}(x+z)\,u^j(x+z)\exp[\lambda(\delta-z)]\,\mathrm{d}z\right|^2 \mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \int_a^b \sum_{i=1}^n \left(\int_0^\delta \sum_{j=1}^n |q_{ij}(x+z)|\,|u^j(x+z)|\exp[\operatorname{Re}\lambda(\delta-z)]\,\mathrm{d}z\right)^2 \mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq C\sum_{i,j=1}^n \int_a^b \mathrm{d}x\left(\int_0^\delta |q_{ij}(x+z)|\,|u^j(x+z)|\,\mathrm{d}z\right)^2 \leqq$$

$$\leqq C\sum_{i,j=1}^n \int_a^b \mathrm{d}x\int_0^\delta |q_{ij}(x+z)|^2\,\mathrm{d}z\int_0^\delta |u^j(x+z)|^2\,\mathrm{d}z \leqq$$

$$\leqq Co(1)\|u\|^2_{L_2(a,b+\delta)},$$

где $o(1) \to 0$ при $\delta \to 0$.

Далее рассмотрим

$$\|I_1(x, \delta, u)\|_{L_2(a,b)} = \int_a^b \sum_{i=1}^n \left| \int_0^\delta \sum_{j=1}^n q_{ij}(x+z)\, u^j(x+z) \exp[\lambda(\delta - z)]\,(\delta - z)\,\mathrm{d}z \right|^2 \mathrm{d}x \leqq$$

$$\leqq \delta^2 \int_0^b \sum_{i=1}^n \left(\int_0^\delta \sum_{j=1}^n |q_{ij}(x+z)|\,|u^j(x+z)|\,. \right.$$

$$.\exp[\operatorname{Re}\lambda(\delta - z)]\,\mathrm{d}z)^2\,\mathrm{d}x \leqq C\delta^2 o(1)\|u\|_{L_2(a, b-\delta)},$$

откуда следует (10).

Лемма 3. *Пусть функция* u_k *— присоединенная к* u_{k-1}, а u_{k-1} *— присоединенная к* u_k *и пусть выполнены неравенства*

$$\|u_{k-1}\|_{L_2(-R,R)} \leqq C\|u_k\|_{L_2(-R,R)}, \tag{11}$$

$$\|u_k\|_{L_2(-R,R)} \leqq C\|u_k\|_{L_2(-R,R-\delta)} \tag{12}$$

и выполнено условие 1. *теоремы. Тогда существует такая постоянная* C', *что для всех* k *и всех достаточно малых* $\delta > 0$ *справедливы следующие неравенства*

$$\|u_k\|_{L_2(-R,R)} \leqq C'\|u_{k+1}\|_{L_2(-R,R)}, \tag{13}$$

$$\|u_{k+1}\|_{L_2(-R,R)} \leqq C'\|u_{k+1}\|_{L_2(-R,R,-\delta)}. \tag{14}$$

Доказательство. Докажем сначала (13). Пусть $x \in (-R, R-\delta)$, а $\eta = \delta$. Применим формулу (8) для функции u_{k+1}**):

$$m^2\delta^2|u_k(x)|^2 \leqq |\delta u_k(x)\exp(\lambda_k\delta)|^2 \leqq C\Big[|u_{k+1}(x+\delta)|^2 + |u_{k+1}(x)|^2\,.$$

$$.\,|\exp(\lambda_k\delta)|^2 + |I_0(x,\,\delta,\,u_{k+1})|^2 + |I_1(x,\,\delta,\,u_k)|^2 +$$

$$+ \left|\int_0^\delta (\delta - z)\,u_{k-1}(x+z)\exp(\lambda_k(\delta - z))\,\mathrm{d}z\right|^2\Big],$$

где число $m^2 = \inf_k |\exp(\lambda_k\delta)|^2 = \inf_k |\exp\operatorname{Re}\lambda_k\delta| \geqq |\exp(-M_1\delta)|^2$, а M_1 — постоянная из неравенства (2).

Интегрируя полученное неравенство по $x \in (-R, R-\delta)$ и используя (9), (10), получим

$$m^2\delta^2\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq C[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} + \exp(2M_1\delta)\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} +$$

**) Под $|u_k|^2$ понимаем выражение $\sum_{j=1}^n |u_k^j|^2$.

$$+ o(1)\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} + o^2(\delta)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R)} +$$

$$+ o^2(\delta)\|u_{k-1}\|^2_{L_2(-R,R)}],$$

причем последнее слагаемое в этом неравенстве также получено с помощью формулы (10) для интеграла $I_1(x,\ \delta,\ u_{k-1})$ с матрицей q, равной единичной.

Используя оценку (11), последнее неравенство перепишем в виде

$$m^2\delta^2\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq C_1[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} + o^2(\delta)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R)}].$$

С помощью оценки (12) неравенство преобразуем так

$$m^2\delta^2\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq C_2[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} + o^2(\delta)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)}],$$

или

$$m^2\delta^2\left(1 - \frac{o^2(\delta)}{m^2\delta^2}\right)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq C_2\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)}.$$

Учитывая, что $\dfrac{o^2(\delta)}{\delta^2} = \left(\dfrac{o(\delta)}{\delta}\right)\left(\dfrac{o(\delta)}{\delta}\right) \to 0$ при $\delta \to 0$, то при достаточно малом δ будем иметь $\dfrac{o^2(\delta)}{m^2\delta^2} < \dfrac{1}{2}$, т.е.

$$\frac{m^2\delta^2}{2}\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq m^2\delta^2\left(\left(1 - \frac{o^2(\delta)}{m^2\delta^2}\right)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq\right.$$

$$\leqq C_2\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)}.$$

Используя снова неравенство (12), получим

$$\frac{m^2\delta^2}{2}\|u_k\|^2_{L_2(-R,R)} \leqq \frac{m^2\delta^2}{2}C\|u_k\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq$$

$$\leqq CC_2\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)}.$$

Неравенство (13) доказано с постоянной $C' = \dfrac{2CC_2}{m^2\delta^2}$.

Докажем теперь неравенство (14). Пусть $x \in (-R,\ R-\delta)$ и $\eta = \delta$. Применим в этом случае формулу (6) для u_{k+1}, тогда получим

$$|u_{k+1}(x+\delta)|^2 \leqq C\Bigg[|u_{k+1}(x)|^2 + |I_0(x,\ \delta,\ u_{k+1})|^2 +$$

$$+ \left|\int_0^\delta u_k(x+t)\exp[\lambda_k(\delta - t)]\,\mathrm{d}t\right|^2\Bigg].$$

Интегрируя по $x \in (-R, R-\delta)$ и используя оценки (9) и (13), получим

$$\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)} \leqq C[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} + o(1)\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)} + o(1)\|u_k\|^2_{L_2(-R,R)}] \leqq$$
$$\leqq C[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} + o(1)\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R)}] \leqq$$
$$\leqq C_1'[\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} + o(1)\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)},$$

или

$$\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)}(1 - C_1' o(1)) \leqq C_1'\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)}.$$

Если δ достаточно мало, то $(1 - C_1' o(1)) \geqq \dfrac{1}{2}$ и

$$\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)} \leqq C\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)}. \tag{15}$$

Если теперь обозначить через $t = -x$, то функция $w_k(t) = u_k(-t)$ удовлетворяет уравнению $w_k' - q(-t)w_k + \lambda_k w_k = 0$, т.е. тому же уравнению, что и функция $u_k(x)$ только с потенциалом — $q(-t)$ и собственные значения меняют знак. Поэтому будут справедливы для $w_k(t)$ формулы (6) и (8), а также и формулы (13) и (14) и последнее полученное неравенство

$$\|w_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)} \leqq C\|w_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)}.$$

Вспомнив теперь, что $t = -x$, а $w_k(t) = u_k(-t)$, это неравенство в переменной x будет иметь вид

$$\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R,R-\delta)} \leqq C\|u_{k+1}\|^2_{L_2(-R+\delta,R)}.$$

С учетом неравенства (15) сразу получаем требуемое неравенство (14).

Лемма 3 доказана.

Примечание 2. В леммах 4, 5, 6 тоже предполагается выполнение условия 1. теоремы, поэтому выступающие там постоянные не зависят от k.

Лемма 4. *Для собственной функции* u_{k-1} *имеет место оценка* (12), *т.е.*

$$\|u_{k+1}\|_{L_2(-R,R)} \leqq C\|u_{k+1}\|_{L_2(-R,R-\delta)},$$

причем ввиду примечания 2 постоянная C не зависит от k.

Доказательство этого дословно повторяет доказательство неравенства (14).

Лемма 5. *Если* u_{k+m} — *присоединенная функция* к u_{k+m-1}, *то справедливо неравенство*

$$\|\theta_{k+m} u_{k+m-1}\|_{L_2(-R,R)} \leqq C\|u_{k+m}\|_{L_2(-R,R)}, \tag{16}$$

где постоянная C независит от k.

Доказательство. Пусть u_{k+m}, u_{k+m-1} находится в одной цепочке с собственной функцией u_k. Собственную функцию u_k можно рассматривать как присоединенную к функции $\tilde{u}_k \equiv 0$. Тогда, очевидно, выполнено неравенство (11), а выполнение неравенства (12) следует из леммы 4. Поэтому в силу леммы 3 будут выполнены неравенства (13) и (14). Повторяя так рассуждения, за m шагов докажем неравенство (16). Лемма 5 доказана.

Лемма 6. *Для любой функции u_k справедливо неравенство*

$$\sup_{x \in (-R, R)} |u_k(x)| \leqq C \|u_k\|_{L_2(-R, R)}, \tag{17}$$

причем постоянная C не зависит от k (см. примечание 2).

Доказательство. Из формулы (6) имеем для $x \in [-R, R-\delta]$, $\eta \in (0, \delta)$

$$\begin{aligned} m^2 |u_k(x)|^2 &\leqq |u_k(x) \exp(\lambda_k \eta)|^2 \leqq C[|u_k(x+\eta)|^2 + \\ &+ \left| \int_0^\eta q(x+t) u_k(x+t) \exp[\lambda_k(\eta - t) \, \mathrm{d}t \right|^2 + \\ &+ \left| \int_0^\eta u_{k-1}(x+t) \exp[\lambda_k(\eta - t)] \, \mathrm{d}t \right|^2 \leqq \\ &\leqq C[|u_k(x+\eta)|^2 + \|u_k\|^2_{L_2(-R, R)} + \|u_{k-1}\|^2_{L_2(-R, R)}]. \end{aligned}$$

Интергрируя полученное неравенство по $\eta \in [0, \delta]$ и испольуя неравенство (16), получаем для $x \in [-R, R-\delta]$

$$m^2 \delta |_k(x)|^2 \leqq C \|u_k\|^2_{L_2(-R, R)}, \tag{18}$$

Положим в формуле (6) $x = R - \delta$, а $\eta \in [0, \delta]$. Тогда

$$\begin{aligned} |u_k(R - \delta + \eta)| &\leqq |u_k(R-\delta)| \, |\exp(\lambda_k \eta)| + \\ &+ \left| \int_0^\eta q(R - \delta + t) u_k(R - \delta + \eta) \exp[\lambda_k(\eta - t)] \, \mathrm{d}t \right| + \\ &+ \left| \int_0^\eta u_{k-1}(R - \delta + t) \exp[\lambda_k(\eta - t)] \, \mathrm{d}t \right|. \end{aligned}$$

Используя неравенство (18) и применяя неравенство Коши—Буняковского, с учетом (16) получаем

$$|u_k(R - \delta + \eta)| \leqq C[\|u_k\|_{L_2(-R, R)}]$$

для $\eta \in [0, \delta]$. Лемма 6 доказана.

Доказательство теоремы. Достаточно доказать (см. [3], стр. 1051), что

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(u_k, f)|^2}{\|u_k\|^2} < \infty \quad \text{и} \quad \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{|(v_k, f)|^2}{\|v_k\|^2} < \infty$$

для любой комплекснозначной вектор-функции $f \in L_2(-R, R)$, при этом достаточно проверить это условие для u_k.

Полагая в (6) $x = 0$ и меняя порядок интегрирования, вычислим

$$(u_k, f) = \int_{-R}^{R} u_k(\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta = \int_{-R}^{R} u_k(0)\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta -$$

$$- \int_{-R}^{R}\left(\int_{0}^{\eta} q(t)\,u_k(t)\exp[\lambda_k(\eta - t)]\,dt\right)\overline{f(\eta)}\,d\eta +$$

$$+ \int_{-R}^{R}\left(\int_{0}^{\eta} u_{k-1}(t)\exp[\lambda_k(\eta - t)]\,dt\right)\overline{f(\eta)}\,d\eta =$$

$$= u_k(0)\int_{-R}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta - \int_{0}^{R} q(t)\,u_k(t)\exp(-\lambda_k t) \times$$

$$\times \left(\int_{t}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right)dt - \int_{-R}^{0} q(t)\,u_k(t)\exp(-\lambda_k t) \times$$

$$\times \left(\int_{-R}^{t}\exp(\lambda_k\eta)\,\overline{f(\eta)}\,d\eta\right)dt + \int_{0}^{R} u_{k-1}(t)\exp(-\lambda_k t) \times$$

$$\times \left(\int_{t}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right)dt + \int_{-R}^{0} u_{k-1}(t)\exp(-\lambda_k t) \times$$

$$\times \left(\int_{-R}^{t}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right)dt.$$

С помощью неравенств (2), (16), (17) и неравенства Коши—Буняковского оценим $|(u_k, f)|$

$$|(u_k, f)|^2 \leqq C\Bigg\{|u_k(0)|^2\left|\int_{-R}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right|^2 +$$

$$+ \sup_{(-R,R)}|u_k(t)|^2\int_{0}^{R}\left|\int_{t}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right|^2 dt +$$

$$+ \sup_{(-R,R)}|u_k(t)|^2\int_{-R}^{R}\left|\int_{-R}^{t}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right|^2 dt +$$

$$+ \sup_{(-R,R)}|u_{k-1}(t)|^2\int_{0}^{R}\left|\int_{t}^{R}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right|^2 dt +$$

$$+ \sup_{(-R,R)}|u_{k-1}(t)|^2\int_{-R}^{0}\left|\int_{-R}^{t}\exp(\lambda_k\eta)\overline{f(\eta)}\,d\eta\right|^2 dt\Bigg\} \leqq$$

$$\leqq C_0 \|u_k\|^2_{L_2(-R,R)} \left\{ \left| \int_{-R}^{R} \exp(\lambda_k \eta) \overline{f(\eta)} \, \mathrm{d}\eta \right|^2 + \right.$$

$$\left. + \int_0^R \left| \int_t^R \exp(\lambda_k \eta) \overline{f(\eta)} \, \mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}t + \int_{-R}^{0} \left| \int_{-R}^{t} \exp(\lambda_k \eta) \overline{f(\eta)} \, \mathrm{d}\eta \right|^2 \mathrm{d}t \right\}.$$

Поэтому достаточно доказать оценку

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-t}^{t} \overline{f(\eta)} \exp(\lambda_k \eta) \, \mathrm{d}\eta \right|^2 \leqq C \|f\|^2_{L_2(-R,R)}$$

для $t \in [0, R]$.

Для доказателства этого свойства заметим, что ввиду условий 1., 2. теоремы числа $\{\lambda_k\}$ не имеют конечных точек сгущения, мы можем их занумеровать в порядке неубывания $|\lambda_k|$ и последовательность $\{\lambda_k\}$ можем расслоить на конечно много p последовательностей $\{\lambda_k^j\}, j = 1, \ldots, p$ таких, что для каждого $j = 1, \ldots, p$ и каждого k в полосе

$$\frac{\pi k}{R} \leqq \operatorname{Im} \lambda_k \leqq \frac{\pi(k+1)}{R}$$

содержится лишь один член последовательности $\{\lambda_k^j\}$, т.е. некоторое λ_k, представимое в виде

$$\lambda_k = \frac{\mathrm{i}\pi k}{R} + \delta_k, \qquad \mathrm{i} = \sqrt{-1},$$

где $|\delta_k| \leqq C$. Достаточно провести доказательство для одной такой подпоследовательности. Интегрируя по частям, а затем используя элементарное неравенство

$$|a - b|^2 \leqq 2(|a|^2 + |b|^2),$$

справедливое для любых комплексных чисел a, b, неравенства Коши—Буняковского и Бесселя и органоченность величин δ_k, $\exp(\delta_k \eta)$, имеем

$$\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-t}^{t} \overline{f(\eta)} \exp(\lambda_k \eta) \, \mathrm{d}\eta \right|^2 = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-t}^{t} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k \eta}{R}\right) \overline{f(\eta)} \exp(\delta_k \eta) \, \mathrm{d}\eta \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \int_{-t}^{t} \exp(\delta_k \eta) \, \mathrm{d}\left[\int_{-t}^{\eta} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k \tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau \right] \right|^2 =$$

$$= \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left| \exp(\delta_k t) \int_{-t}^{t} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k \tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau - \right.$$

$$
\left. - \int_{-t}^{t} \delta_k \exp(\delta_k \eta)\left(\int_{-t}^{\eta} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k\tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}\eta \right|^2 \leqq
$$

$$
\leqq 2\left[\sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\int_{-t}^{t} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k\tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau\right|^2 |\exp(\delta_k t)|^2 + \right.
$$

$$
\left. + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left|\int_{-t}^{t} \delta_k \exp(\delta_k \eta)\left(\int_{-t}^{\eta} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k\tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau\right) \mathrm{d}\eta\right|^2\right] \leqq
$$

$$
\leqq 2\left[C\,\|f\|^2_{L_2(-R,R)} + \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_{-t}^{t} (\delta_k \exp(\delta_k \eta))^2 \mathrm{d}\eta \times \right.
$$

$$
\left. \times \int_{-t}^{t} \left|\int_{-t}^{\eta} \overline{f(\tau)} \exp\left(\frac{\mathrm{i}\pi k\tau}{R}\right) \mathrm{d}\tau\right|^2 \mathrm{d}\eta\right] \leqq 2C\|f\|^2_{L_2(-R,R)}.
$$

Итак, теорема доказана.

Авторы выражают глубокую благодарность доктору М. Тврдому, кандидату физико-математических наук, за ценные замечания к работе, которые помогли уточнить формулировки утверждений и их доказательства.

ЛИТЕРАТУРА

[1] НАЙМАРК, М. А.: Линейные дифференциальные операторы. М., «Наука», 1969.

[2] ГОХВЕРГ, И. Ц.; КРЕЙН, М. Г.: Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов в гильбертовом пространстве. М., «Наука», 1965.

[3] ИЛЬИН, В. А.: О безусловной базисности на замкнутом интервале систем собственных и присоединенных функций дифференциального оператора 2-го порядка. ДАН СССР, т. 273, № 5, 1983, 1048—1053.

[4] ЛОМОВ, И. С.: Некоторые свойства собственных и присоединенных функций оператора Штурма—Лиувилля. Диффер. уравнения, т. 18, № 10, 1982, 1684—1694.

[5] ТИХОМИРОВ, В. В.: Точные оценки регулярных решений одномерного уравнения Шредингера со спектральным параметром. ДАН СССР, т. 273, № 4, 1983, 807—812.

Received September 16, 1987

Кафедра общей математики
Факультет ВМИК
В-234 Ленинские горы МГУ
117 234 *Москва*

Katedra matematickej analýzy
MFF UK
Mlynská dolina
842 15 Bratislava