Mathematica Slovaca

Vladimír Čorný

Характеризация операторно полуустройчивых распределений

Mathematica Slovaca, Vol. 39 (1989), No. 1, 99--104

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136484

Terms of use:

© Mathematical Institute of the Slovak Academy of Sciences, 1989

Institute of Mathematics of the Academy of Sciences of the Czech Republic provides access to digitized documents strictly for personal use. Each copy of any part of this document must contain these *Terms of use*.

This paper has been digitized, optimized for electronic delivery and stamped with digital signature within the project *DML-CZ: The Czech Digital Mathematics Library* http://project.dml.cz

Math. Slovaca 39, 1989, No. 1, 99—103

ХАРАКТЕРИЗАЦИЯ ОПЕРАТОРНО ПОЛУУСТРОЙЧИВЫХ РАСПРЕДЕЛЕНИЙ

ВЛАДИМИР ЧОРНЫ

Операторно полуустойчивые распределения являются многомерным аналогом полуустойчивых распределений на прямой. Пусть $\mathscr{V}$ — конечномерное евклидово пространство. Вероятностная мера μ на $\mathscr{V}$ называется операторно полуустойчивой, если существуют: независимые одинаково распределенные случайные векторы $\{X_n\}$ со значениями в $\mathscr{V}$, линейные операторы $\{A_n\}$ в $\mathscr{V}$, векторы $\{a_n\}$ из $\mathscr{V}$ и строго возрастающая последовательность натуральных чисел $\{k_n\}$, $\lim k_n/k_{n+1} = c$ такие, что последовательность нормированных сумм

$$S_n = A_n \sum_{i=1}^{k_n} X_i - a_i \tag{1}$$

сходится по распределению к μ. Будем рассматривать лишь полные вероятностные меры на $\mathscr{V}$, т.е. такие, которые не сосредоточены ни на одной из гиперповерхностей пространства $\mathscr{V}$. Как показано в работах [4, 6], операторно полуустройчивая мера μ является безгранично делимой. Пусть $\hat{\mu}(y)$, $y \in \mathscr{V}$ обозначает ее характеристическую функцию. Если $t > 0$, то $\hat{\mu}^t(y)$ также является характеристической функцией безгранично делимого распределения μ^t. В [2] показано, что полная вероятностная мера μ полуустойчива тогда и только тогда, если существуют: линейный оператор B, число r, $0 < r < 1$ и вектор $b \in \mathscr{V}$ такие, что

$$\mu^r = r^B \mu * \delta_b, \tag{2}$$

где $r^B = \exp\{B \ln r\} = \Sigma (B \ln r)^k/k!$, $r^B\mu(\cdot) = \mu(r^{-B}\cdot)$ и δ_b — вероятностная мера, сосредоточенная в точке b. Линейный оператор B называется экспонентой операторно полуустойчивой меры μ, число r — ее степенью.

Важным подклассом операторно полуустойчивых распределений являются операторно устойчивые меры. Они также являются предельными для сумм вида (1), но с той разницей, что последовательность $\{k_n\}$ пробегает множество всех натуральных чисел. Основные свойства операторно устойчивых распределений рассмотрены в [3]. Там показано, что полная вероятностная мера μ является операторно устойчивой тогда и только тогда, если существуют: линейный оператор B и векторозначная функция $b(r)\colon (0, \infty) \to \mathscr{V}$ такие, что

$$\mu^r = r^B \mu * \delta_{b(r)}, \tag{3}$$

для любого $r > 0$. Для операторно устойчивых распределений понятие степени теряет смысл, поскольку любое положительное число может быть их степенью.

Мы охарактеризуем характеристические функции операторно полуустойчивых распределений как решения функционального уравнения, которое мы сейчас рассмотрим.

Пусть $\varkappa$ — конечная мера, определенная на σ-алгебре борелевских подмножеств отрезка $[0, 1]$ и B — линейный оператор в $\mathscr{V}$ такой, что вещественные части корней его минимального многочлена больше нуля. Будем исследовать следующее уравнение:

$$\ln \hat{\mu}(y) = \int_0^1 \ln \hat{\mu}(c^B y)\, \varkappa(dc). \tag{4}$$

Уравнение (4) является обобщением уравнения для одномерных характеристических функций, рассмотренного Р. Шимицу в [7]. Уравнение (4) имеет смысл для любой характеристической функции в некоторой окрестности начала координат. В этом смысле мы будем понимать, что функция удовлетворяет (4).

Поскольку мера $\varkappa$ конечна, то за исключением тривиального случая $\operatorname{Supp}(\varkappa) = \{1\}$, существует единственное δ такое, что

$$\int_0^1 c^\delta \varkappa(dc) = 1. \tag{5}$$

Решение уравнения (4) зависит также от строения множества $S(\varkappa) = \operatorname{Supp}(\varkappa)$. Возможны следующие варианты строения этого множества:

(А) для любого ϱ, $0 < \varrho < 1$, $S(\varkappa) \not\subset \{\varrho^k;\ k = 0, 1, \ldots\}$,

(Б) $S(\varkappa) = \{\varrho^{k_1}, \ldots, \varrho^{k_n}, \ldots\}$, $0 < \varrho < 1$.

Напомним еще, что мера μ называется симметричной, если $\mu(E) = \mu(-E)$, и обозначим B^* сопряженный к B оператор. Теперь мы в состоянии сформулировать основной результат данной работы.

Теорема 1. Пусть μ — полная симметричная вероятностная мера на $\mathscr{V}$. Далее, пусть δ выбрано согласно (5), $\delta > 0$, и $\hat{\mu}(y)$ удовлетворяет (4), тогда:

1) Если строение множества $S(\varkappa)$ соответствует случаю (А), то μ — операторно устойчивая мера с экспонентой B^*/δ,

2) Если стройение множества $S(\varkappa)$ соответствует случаю (Б), то μ — операторно полуустойчивая мера с экспонентой B^*/δ и степенью ϱ^δ.

Доказательство. Пусть $S = \{\Theta \in \mathscr{V},\ \|\Theta\| = 1\}$, определим множество $\mathscr{T}$ соотношением

$$\mathscr{T} = \{\Theta \in S;\ \|c^B\Theta\| > 1 \text{ для всех } c > 1\}.$$

Любой вектор $y \in \mathscr{V}$ представим единственным образом в виде $y = c^B\Theta$, $c > 0$, $\Theta \in \mathscr{T}$ (см. [8], с. 6). Мы покажем, что для любых $c > 0$ и $\Theta \in \mathscr{T}$

$$\hat{\mu}(c^B\Theta) = \exp\{-c^\delta K_\Theta(\ln c)\}, \tag{6}$$

где $K_\Theta(v)$ — константа при фиксированном Θ, если строение множества $S(\varkappa)$ соответствует случаю (А) и $K_\Theta(v)$ — периодическая по v функция с периодом $\ln 1/\varrho$, в противном случае. Отсюда, как нетрудно проверить, будет следовать утверждение теоремы.

Определим функцию распределения G на $[0, \infty)$ следующим образом:

$$G(u) = \int_{e^{-u}}^{1} c^\delta \varkappa(dc).$$

Тогда функция

$$H(u) = e^{-(\delta+1)u}\int_0^{e^{-u}} \ln\hat{\mu}(t^B\Theta)\,dt,$$

при фиксированном $\Theta \in \mathscr{T}$, удовлетворяет уравнению

$$H(u) = \int_0^\infty H(u+v)\,dG(v).$$

Кроме этого функция $H(u)$ неотрицательна, непрерывна и для нее справедливо соотношение

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant v} H(u+t) \leqslant e^{(\delta+1)v} H(u).$$

Как следует из работы [7], функция $H(u)$, в силу вышесказанного, является ограниченной, периодической функцией, причем каждая точка роста функции $G(v)$ является ее периодом. Из этого следует, что $H(u)$ либо константа, либо периодическая функция с периодом $\ln 1/\varrho$, в зависимости от строения множества $S(\varkappa)$. Замечая, что $K_\Theta(t) = (\delta+1)H(t) - H'(t)$, мы получаем, что соотношение (6) действительно справедливо, но лишь в окрестности Q начала координат, в которой $\hat{\mu}(y) \neq 0$. Покажем, что $\hat{\mu}(y) \neq 0$ для всех $y \in \mathscr{V}$. Фиксируем $\Theta \in \mathscr{T}$ и предположим, что $\hat{\mu}(c_0^B\Theta) = 0$ и $\hat{\mu}(c^B\Theta) \neq 0$ при $0 < c < c_0$. На интервале $(0, c_0)$ для $\hat{\mu}(c^B\Theta)$ справедливо представление (6), в силу вышесказанного. Но поскольку $\hat{\mu}(y)$ — непрерывна, то устремляя $c \in (0, c_0)$ к c_0 приходим к противоречию. Теорема доказана.

Следствие. Пусть μ — полная, операторно полуустойчивая вероятностная мера на $\mathcal{V}$ с экспонентой B и показателем r, тогда для всех $\Theta \in \mathcal{T}^*$ и $c > 0$ справедливо соотношение

$$|\hat{\mu}(c^{B^*}\Theta)| = \exp\{-cK_\Theta(\ln c)\},$$

где $K_\Theta(u)$ — положительная, периодическая по u функция с периодом $\ln 1/r$, множество $\mathcal{T}^*$ определено соотношением

$$\mathcal{T}^* = \{\Theta \in S;\ \|c^{B^*}\Theta\| > 1 \text{ для всех } c > 1\}.$$

Если, более того, μ — операторно устойчива, то $K_\Theta(u) \equiv K_\Theta = \text{const}$ при фиксированном Θ.

Доказательство. Пусть $\bar{\mu} = \mu * \nu$, где $\nu(E) = \mu(-E)$. Мера $\bar{\mu}$ симметрична, операторно полуустойчива и $\hat{\bar{\mu}}(y) = |\hat{\mu}(y)|^2$. Используя (2), получим

$$|\hat{\mu}(y)| = |\hat{\mu}(r^{B^*}y)|^{1/r}. \tag{7}$$

Следовательно, $|\hat{\mu}(y)|$ удовлетворяет уравнению (4) с мерой $\varkappa$, сосредоточенной в точке r. Причем, $\varkappa(\{r\}) = 1/r$, поэтому $\delta = 1$.

Для доказательства утверждения о операторно устойчивых вероятностных мерах достаточно заметить, что тогда соотношение (7) выполняется для любого r и $|\hat{\mu}(y)|$ удовлетворяет уравнению (4), где $\varkappa$ совпадает с мерой Лебега на [0, 1]. Заметим также, что из симметрии меры μ следует, что $K_\Theta(u) = K_{-\Theta}(u)$.

К уравнению типа (4) приводят некоторые характеризационные задачи математической статистики. Мы приведем решение одной из них с помощью теоремы 1. Рассмотрим задачу равнораспределенности одночлена и линейной статистики, образованной относительно группы преобразований пространства $\mathcal{V}$ вида $\{c^B,\ c > 0\}$. Эта задача рассматривалась в [2], с. 618—622, для одномерных случайных величин. Некоторые многомерные варианты подобных задач рассмотрены в [5].

Итак, пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые одинаково распределенные случайные векторы со значениями в $\mathcal{V}$. Задача состоит в описании распределений вышеуказанных векторов, если известно, что для некоторых $c, c_1, \ldots, c_n > 0$ и линейного оператора B одночлен c^BX_1 и статистика $y = c_1^BX_1 + \ldots + c_n^BX_n$ равнораспределены.

Будем также предполагать, что корни минимального многочлена оператора B имеют положительные вещественные части. Обозначим также $r_i = c_i/c$, $i = 1, \ldots, n$, и заметим, что случайный вектор называется собственным, если его распределение является полной вероятностной мерой на $\mathcal{V}$.

Теорема 2. Пусть $X_1, \ldots, X_n$ — независимые, симметричные, собственные одинаково распределенные векторы. Пусть c^BX_1 и Y равнораспределены, тогда

1) $r_i < 1$, при всех $i = 1, \ldots, n$.

2) Если числа $\{r_i\}$ несоизмеримы, т.е. не существует ϱ, $0 < \varrho < 1$, такое что $r_i = \varrho^{k_i}$, то X_i имеют операторно устойчивое распределение.

3) Если числа $\{r_i\}$ соизмеримы, то X_i распределены согласно операторно полуустойчивому закону распределения.

Доказательство. Обозначим через $\hat{\mu}(y)$ характеристические функции случайных векторов X_i. Тогда равнораспределенность $c^B X_1$ и Y означает, что

$$\hat{\mu}(c^B y) = \hat{\mu}(c_1^B y) \ldots \hat{\mu}(c_n^B y),$$

для всех $y \in \mathscr{V}$. Отсюда, полагая $r_i = c_i / c$, $i = 1, \ldots, n$, получим

$$\hat{\mu}(y) = \prod_{i=1}^{n} \hat{\mu}(r_i^B y). \tag{8}$$

Покажем, что $r_i < 1$, $i = 1, \ldots, n$. Если для некоторого i, $r_i = 1$, то из (8) непосредственно вытекает $\hat{\mu}(y) \equiv 1$, для всех $y \in \mathscr{V}$, что противоречит тому, что векторы X_i собственны. Если же $r_i > 1$, то из (8) непосредственно вытекает $\hat{\mu}(y) \geqslant \hat{\mu}(r_i^B y)$, откуда, полагая $r = 1/r_i$, получим

$$\hat{\mu}(y) \geqslant \hat{\mu}(r^B y) \geqslant \ldots \geqslant \hat{\mu}([r^n]^B y) \to 1,$$

при $n \to \infty$, т.к. $r^n \to 0$, что также приводит к противоречию.

Следовательно, $r_i < 1$, для всех $i = 1, \ldots, n$. Тогда уравнение (8) является частным случаем уравнения (4). Условия теоремы 1 выполнены, и утверждения 2) и 3) вытекают непосредственно из этой теоремы.

ЛИТЕРАТУРА

[1] КАГАН, А. М.—ЛИННИК, Ю. В.—РАО, С. Р.: Характеризационные задачи математической статистики. Наука, Москва 1972.
[2] ЧОРНЫ, В.: Операторно полуустойчивые распределения на R^d. Теория вероятностей и ее применения, т. 31, вып. 4, 1986, 795—797.
[3] HUDSON, W. N.—MASON, J. D.: Operator-stable laws. J. of Multivar. Analysis, v. 11, 1981, 434—447.
[4] JAJTE, R.: Semi-stable probability measures on R^N. Studia mathematica, v. 16, 1977, 29—39.
[5] KAKOSYAN, A. V.—KLEBANOV, L. B.—MELAMED, J. A.: Characterization of distributions by the method of intensively monotone operators. Lect. Notes in Math. 1088, Springer, Berlin 1984.
[6] LUCZAK, A.: Operator-semistable probability measures on R^N. Colloq. Math., v. 45, 1981, 287—300.
[7] SHIMIZU, R.: Solutions to a functional equation and its application to some characterization problems. Sankhya, Ser. A, v. 40, 1978, 319—332.
[8] YAMAZATO, M.: OL distributions on euclidean spaces. Teorija verojatnostej i jeje primenenija, t. 29, 1984, 3—18.

Received January 27, 1987

Ústav výpočtovej techniky
vysokých škôl UK,
Mlynská dolina
842 43 Bratislava