Idris Assani; Radko Mesiar

Sur la convergence de polynômes $P_n(T)$

Mathematica Slovaca, Vol. 36 (1986), No. 2, 111--118

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136418`

Math. Slovaca 36, 1986, No. 2, 111—118

SUR LA CONVERGENCE DE POLYNÔMES $P_n(T)$

ASSANI IDRIS, RADKO MESIAR

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un espace de Riesz c'est à dire un espace de Banach réticulé tel que $|x| \leq |y| \Rightarrow \|x\| \leq \|y\|$. On suppose que E possède une norme continue pour l'ordre. Pour les notions sur ces espaces voir [1]. Le théorème suivant est un critère permettant d'obtenir la convergence faible d'une suite de polynômes de T à coefficients positifs.

Théoreme I.1. *Soit E un espace de Riesz séparable ayant une norme continue pour l'ordre. Considérons un opérateur positif T de $E \to E$ et une famille $P_n(T)$ de polynômes de T à coefficients positifs de plus grand exposant T^{n-1} tels que*

(*i*) $\forall x \in E \quad \{P_n(T)(x),\, n \in N\}$ *est relativement faiblement compact.*

(*ii*) *il existe* $f\colon N \to R_+$ *telle que* $f(n) \underset{n}{\to} 1$ *et* $P_{n+1}(T) \geq f(n) P_n(T)$.

(*iii*) $\forall x \in E \quad \|(P_{n+1}(T) - TP_n(T))(x)\| \underset{n}{\to} 0$.

(*iv*) $\sup_n \|P_n(T)\| < +\infty$.

Alors $\forall x \in E \quad P_n(T)(x)$ *converge faiblement.*

Démonstration. Elle s'appuie sur celle du premier théorème de [2]. Il suffit de montrer que de la suite (n) on peut extraire une sous suite $(n_k)_k$ telle que $P_{n_k}(T)(.)$ converge faiblement pour tout $x \in E$ vers un opérateur limite $L(n)$ vérifiant les relations $L(n) \circ T = T \circ L(n) = L((n)+1) \geq L(n)$.

Celles ci sont des conséquences de (*ii*) et (*iii*) une fois l'existence de l'opérateur limite est démontrée. Nous prouvons maintenant cette existence.

Soit $(y_i)_i$ une suite dense dans B_E, boule unité du dual de E muni de la topologie $\sigma(E', E)$. Considérons $\{(P_n(T))^*(y_i),\, i \in N\}$. La condition (*iv*) entraîne l'existence d'un réel positif M tel que

$$\sup_n \|P_n(T)\| = \sup_n \|(P_n(T))^*\| \leq M < +\infty .$$

Donc les $(P_n(T))^*(y_i)$ appartiennent à une partie compact métrisable de E' pour

$\sigma(E', E)$. On peut extraire par un procédé diagonal de la suite (n) une sous suite (n_k) telle que

$$\forall x \in E \quad \langle x, (P_{n_k}(T))^*(y_i)\rangle$$

converge lorsque k tend vers l'infini pour tout i. Autrement dit

$$\forall x \in E \quad \langle P_{n_k}(T)(x), y_i\rangle$$

converge pour tout i lorsque k tend vers l'infini. Il nous reste à montrer que cette relation subsiste pour tout $y \in B_{E'}$. Pour cela nous allons prouver que la suite $\{P_{n_k}(T)(x)\}$ admet pour tout x une seule valeur d'adhérence.

Cette suite en admet au moins une compte tenu de (i), appelons la $\alpha(x)$. On a

$$\langle \alpha(x), y\rangle = \lim_j \langle P_{n_{kj}}(T)(x), y\rangle \quad \forall y \in B_{E'}$$

Si $\alpha'(x)$ est une autre valeur d'adhérence on a

$$\langle \alpha'(x), y\rangle = \lim_{j'} \langle P_{n_{kj'}}(T)(x), y\rangle \quad \forall y \in B_{E'}$$

en particulier

$$\langle \alpha(x), y_i\rangle = \langle \alpha'(x), y_i\rangle \quad \forall i.$$

La suite (y_i) séparant les points de E on a donc $\alpha(x) = \alpha'(x)$.

On peut donc définir un opérateur limite positif qui vérifiant les relations indiquées nous permet de conclure que $P_n(T)(x)$ converge faiblement. □

Corollaire I.2. *Soit E un espace de Riesz séparable ayant une norme continue pour l'ordre, g: $N \to R^+$, g croissante avec $\lim_n g(n) = +\infty$, $\lim_n \frac{g(n+1)}{g(n)} = 1$ et T un opérateur positif tels que*

(i) $\forall x \in E$, $\left\{\frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \dots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)(x);\ n \in N,\ n \geq 2\right\}$ est relativement faiblement compact.

(ii) $\sup_n \left\|\frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \dots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)\right\| = M < \infty$.

Alors $P_n(T) = \frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \dots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)$ converge faiblement pour $\forall x \in E$.

Démonstration. Il suffit de vérifier que les polynômes $P_n(T) = \frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \dots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)$ satisfont aux hypothèses du théorème I.1.

On a $P_{n+1}(T) = \frac{g(n)}{g(n+1)} P_n(T) + \frac{T^n}{g(n+1)n}$ et donc $P_{n+1}(T) \geq \frac{g(n)}{g(n+1)} P_n(T)$ et on peut prendre $f(n)=\dfrac{g(n)}{g(n+1)}$. Il nous reste à montrer que pour $\forall x \in E$, $\|(P_{n+1}(T)-TP_n(T))(x)\| \underset{n}{\rightarrow} 0$. Il suffit de démontrer que

$$\|P_{n+1}(T)-T\,P_n(T)\| \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

Posons $P_n(T)=\dfrac{S_n(T)}{g(n)}$, on a alors

$$P_{n+1}(T)-T\,P_n(T)=\frac{S_{n+1}(T)-T\,S_n(T)}{g(n+1)}-\frac{T\,S_n(T)(g(n+1)-g(n))}{g(n)\,g(n+1)}.$$

Notons le premier terme (A_n) et le deuxième terme (B_n).

On a alors

$$\|(B_n)\|=\left\|T\,P_n(T)\,\frac{g(n+1)-g(n)}{g(n+1)}\right\| \leqslant \|T\|\,M\,\frac{g(n+1)-g(n)}{g(n+1)} \underset{n}{\rightarrow} 0$$

011

$$(A_n)=\frac{I+T+\dfrac{T^2}{2}+\ldots+\dfrac{T^n}{n}-T\left(I+T+\dfrac{T^2}{2}+\ldots+\dfrac{T^{n-1}}{n-1}\right)}{g(n+1)}$$

$$=\frac{I+T}{g(n+1)}-\frac{\dfrac{T^2}{2}+\dfrac{T^2}{6}+\ldots+\dfrac{T^n}{n(n-1)}}{g(n+1)}=$$

$$=\frac{I+T}{g(n+1)}-\frac{(S_3-S_2)+\dfrac{1}{2}(S_4-S_3)+\ldots+\dfrac{1}{n-1}(S_{n+1}-S_n)}{g(n+1)}=$$

$$=\frac{I+T}{g(n+1)}+\frac{S_2-\left(S_3\cdot\dfrac{1}{2}+S_4\cdot\dfrac{1}{6}+\ldots+S_n\cdot\dfrac{1}{(n-2)(n-1)}\right)+S_{n+1}\cdot\dfrac{1}{n-1}}{g(n+1)}$$

donc

$$\|(A_n)\| \leqslant \frac{\|I+T+S_2\|}{g(n+1)}+\frac{M}{g(n+1)}\cdot\sum_{i=3}^{n}\frac{g(i)}{(n-2)(n-1)}+\frac{M}{n-1} \underset{n}{\rightarrow} 0.$$

On obtient donc la convergence faible grâce au théorème I.1. □

Remarques I.3. (*) Si $E=\operatorname{Inv} T \oplus \overline{(I-T)(E)}$, on peut montrer alors que les expressions $P_n(T)=\dfrac{1}{g(n)}\left(I+T+\dfrac{T^2}{2}+\ldots+\dfrac{T^{n-1}}{n-1}\right)$ convergent fortement si $\lim\limits_{n}\dfrac{g(n)}{\log(n)}>0$.

(**) Pour $g(n)=n$, l'hypothèse $\sup_{n\geqslant 2}\left\|\frac{1}{n}\left(I+T+\frac{T^2}{2}+\ldots+\frac{T^{n-1}}{n-1}\right\|\leqslant M<+\infty$ n'implique pas que les moyennes de Césaro de T sont bornées. L'inverse par contre est vrai puisqu'alors $\sup_{n\geqslant 1}\left\|\frac{T^n}{n}\right\|<+\infty$.

II

Deux exemples d'opérateurs positifs pour lesquels

$$\sup_n\left\|\frac{T^n}{n}\right\|<+\infty$$

et

$$\sup_n\left\|\frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}\right\|=+\infty.$$

Exemple II.1. On considère $\Omega=\{1,2\}$ $\mu\{1\}=1=\mu\{2\}$ et T l'opérateur positif sur $L_p(\Omega,\mu)$ défini par la matrice $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

On a $T^n=\begin{pmatrix}1 & 2n\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ donc $\sup_n\left\|\frac{T^n}{n}\right\|<+\infty$.

Mais $M_n(T)=\begin{pmatrix}1 & n-1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ et donc $\sup_n\|M_n(T)\|=+\infty$.

Remarquons que si on pose

$$M_n^{(2)}(T)=\frac{M_1(T)+\ldots+M_n(T)}{n}$$

et plus généralement

$$M_n^{(K)}(T)=\frac{M_1^{(K-1)}(T)+M_2^{(K-1)}(T)+\ldots+M_n^{(K-1)}(T)}{n},$$

on a aussi pour cet exemple

$$\sup_n\|M_n^{(K)}(T)\|=+\infty\ \forall K\geqslant 1.$$

Exemple II.2. L'espace Ω sera consitué d'une suite disjointe d'ensembles finis X_k, $k\geqslant 2$. Chaque espace X_k sera constitué de k points numérotés de 1 à k. Nous définissons une mesure μ sur Ω et une transformation ϕ en posant

$$\mu(j)=\left\{j \text{ pour } 1\leqslant j\leqslant k\right. \quad \text{et} \quad \phi(j)=\begin{cases} k & \text{pour } \ j=1\\ j-1 & \text{pour } \ 1<j\leqslant k\end{cases}$$

sur chaque X_k.

Nous définissons l'opérateur T sur l'espace $L(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ (où $\mathcal{A}$ est la tribu des parties de Ω) par la relation $Tf = f \circ \phi$.

Pour vérifier que $\sup_n \left\| \frac{T^n}{n} \right\|_1 \leq M < +\infty$ il suffit de le montrer sur chaque X_k en prenant la fonction indicatrice d'un élément (j_0). On vérifie que

$$\sup_n \frac{\mu(\phi^{-n}(j_0))}{n\mu((j_0))} \leq 2 \quad \forall (j_0) \in X_k$$

De plus T étant cyclique sur chaque X_k on a

$$\left\| \frac{T^n f}{n} \right\|_1 \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0 \quad \forall f \in L^1(X_k)$$

et donc

$$\left\| \frac{T^n f}{n} \right\|_1 \xrightarrow[n]{} 0 \quad \forall f \in L^1(\Omega, \mathcal{A}, \mu).$$

Il nous reste à montrer que $\sup_n \| M_n(T) \|_1 = +\infty$ $\left(M_n(T) = \frac{I + T + T^2 + \ldots + T^{n-1}}{n} \right)$. Pour cela prenons sur chaque X_k la fonction f_k prenant la valeur 1 au point 1 et zéro ailleurs. On a $\| f_k \|_1 = 1$ et

$$\| M_k(T)(f_k) \|_1 = \frac{1 + 2 + \ldots + k}{k} = \frac{k+1}{2}$$

donc

$$\sup_n \| M_n(T) \|_1 = +\infty$$

Si maintenant nous considérons $L_p(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ avec $1 < p < 2$ on obtient les mêmes conclusions. On a $\| f_k \|_p = 1$ et $\| M_n(T)(f_k) \|_p = \frac{k^{(\frac{2}{p}-1)}}{2^{\frac{1}{p}}} \left(1 + \frac{1}{k} \right)^{\frac{1}{p}}$. Puisque $T(1) = 1$ gracê à l'inégalité de Riesz on a encore $\sup_n \left\| \frac{T^n}{n} \right\|_p \leq 2^{\frac{1}{p}}$.

Remarque II.3. L'idée d'utiliser une décomposition de l'espace X en une somme d'espaces X_k vient de [3].

III

Nous nous plaçons ici dans le cadre d'un espace $L_p(X, \mathcal{X}, \mu)$, μ étant une mesure σ-finie et $1 \leq p < \infty$. La démonstration de la proposition suivante est basée sur une méthode connue pour des contractions [4].

Proposition III.1. *Soit* $(T_n)_{n\in N}$ *une famille d'opérateurs de* $L_p(\mu)\to L_p(\mu)$, $1\leq p<\infty$, *telle que* $\sup_n \|T_n\|_p\leq M<\infty$.

Alors pour $\forall f\in L_p$, $\alpha p>1$ nous avons

$$(1)\quad \left\|\sup_n \frac{T_n f}{n^\alpha}\right\|_p \leq \left\|\sup_n \left|\frac{T_n f}{n^\alpha}\right|\right\|_p \leq M\left(\frac{\alpha p}{\alpha p-1}\right)^\alpha \|f\|_p$$

$$(2)\quad \frac{T_n f}{n^\alpha}\underset{n}{\to} 0,\ p.s.$$

Démonstration. Soit $f\in L_p$. Considérons $x\to \sum_{n=1}^{N}\left|\frac{T_n f}{n^\alpha}(x)\right|^p$, on a

$$(*)\quad \sum_{n=1}^{N}\int\left|\frac{T_n f(x)}{n^\alpha}\right|^p d\mu(x)\leq M^p\|f\|_p^p\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha p}}.$$

En effet [5] exercice 22 p. 532, on a

$$\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{n^{\alpha p}}\leq\left(\frac{\alpha p}{\alpha p-1}\right)^{\alpha p}\times 1.$$

On déduit de (*) que

$$\sum_{n=1}^{\infty}\int\left|\frac{T_n f}{n^\alpha}\right|^p d\mu$$

est définie et donc que

$$\left|\frac{T_n f}{n^\alpha}\right|^p\underset{n}{\to} 0,\ \text{p.s. que donne } \frac{T_n f}{n^\alpha}\underset{n}{\to} 0,\ p.s.$$

D'autre part si on pose $g_N^p(x)=\left[\sup_{1\leq n\leq N}\left|\frac{T_n f(x)}{n^\alpha}\right|\right]^p$.

On a $\int g_N^p\, d\mu\leq\sum_{i=1}^{N}\int\left|\frac{T_n f}{n}\right|^p d\mu$ ce qui prouve (1). □

Remarque III.2. Pour $p=\infty$ on obtient aussi (2) et (1). Pour (1) on a

$$\left\|\sup_n \frac{T^n f}{n^\alpha}\right\|_\infty \leq \left\|\sup_n \left|\frac{T^n f}{n}\right|\right\|_\infty \leq M\|f\|_\infty,\ \alpha>0, f\in L_\infty.$$

Théorème III.3. *Soit* T *un opérateur de* $L_p(\mu)\to L_p(\mu)$, $1\leq p<\infty$, *tel que* $\sup_n\left\|\frac{I+T+\ldots+T^{n-1}}{n}\right\|_p\leq M<\infty$. *Alors*

$$(1)\quad \left\|\frac{1}{g(n)}\left(I+T+\frac{T^2}{2}+\ldots+\frac{T^n}{n-1}\right)\right\|_p\underset{n}{\to} 0 \text{ si } \frac{\log n}{g(n)}\underset{n}{\to} 0$$

$$\forall f \in L_p,\ \alpha p > 1,\ \frac{1}{n^\alpha}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)f \underset{n}{\to} 0,\ p.s. \tag{2}$$

$$\forall f \in L_p,\ \alpha p > 1,\ \left\|\sup_{n \geq 2} \frac{1}{n^\alpha}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)f\right\|_p \leq \left(2 + \frac{2}{\alpha}\right)M\left(\frac{\alpha p}{\alpha p - 1}\right)^\alpha \|f\|_p. \tag{3}$$

Démonstration.

$$\frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right) =$$

$$= \frac{1}{g(n)}\left(R_2\frac{1}{2} + R_3\frac{1}{6} + \ldots + R_{n-1}\frac{1}{(n-2)(n-1)} + R_n\frac{1}{n-1}\right), \tag{1}$$

où nous posons

$$R_n = I + T + \ldots + T^{n-1}.$$

Donc

$$\left\|\frac{1}{g(n)}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)\right\|_p \leq \frac{M}{g(n)}\left(\sum_{i=1}^{n-2}\frac{1}{i} + \frac{n}{n-1}\right) \underset{n}{\to} 0.$$

(2) D'après (1) on a

$$\frac{1}{n^\alpha}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\frac{R_2}{2} + \frac{R_3}{6} + \ldots + \frac{R_{n-1}}{(n-2)(n-1)} + \frac{R_n}{n-1}\right).$$

De la proposition III.1. en prenant $T_n = \frac{R_n}{n}$ on déduit que

$$\frac{R_n}{n^\alpha \times n} f \underset{n}{\to} 0,\ p.s.\ \forall f \in L_p, \text{ donc}$$

$$\frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{R_i}{(i-1)\times i} f = \frac{1}{n^\alpha}\sum_{i=2}^{n-1}\frac{R_i f}{i^\alpha \times i}\,\frac{i^\alpha}{i-1} \underset{n}{\to} 0,\ p.s.$$

et

$$\frac{R_n}{n^\alpha(n-1)} f = \frac{R_n f}{n^\alpha \times n} \cdot \frac{n}{n-1} \underset{n}{\to} 0,\ p.s.$$

(3) on a

$$\sup_{n \geq 2}\left|\frac{1}{n^\alpha}\left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right)f\right|^p \leq$$

$$\leq \sup_{n \geq 2}\left(\frac{1}{n^\alpha}\left(\sum_{i=2}^{n-1}\frac{|R_i f|}{(i-1)i} + \frac{|R_n f|}{n-1}\right)\right)^p \leq$$

$$\leq \sup_{n\geq 2} \frac{|R_n f|}{n^\alpha \times n} \left(\frac{n}{n-1} + \frac{1}{n^\alpha} \sum_{i=2}^{n-1} \frac{i^\alpha}{i-1}\right)\Bigg)^p \leq$$

$$\leq \left(\left(2+\frac{2}{\alpha}\right) \sup_{n\geq 2} \frac{|R_n f|}{n^\alpha \times n}\right)^p .$$

D'après la proposition III.1. on a pour $\forall f \in L^p$

$$\int \left(\left(2+\frac{2}{\alpha}\right) \sup_{n\geq 2} \frac{|R_n f|}{n^\alpha \times n}\right)^p d\mu \leq \left(2+\frac{2}{\alpha}\right)^p \times M^p \left(\frac{\alpha p}{\alpha p - 1}\right)^{\alpha p} \|f\|_p^p ,$$

d'où

$$\left\|\sup_{n\geq 2} \frac{1}{n^\alpha} \left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right) f\right\|_p \leq \left(2+\frac{2}{\alpha}\right) M \left(\frac{\alpha p}{\alpha p - 1}\right)^\alpha \|f\|_p . \ \square$$

REFERENCES

[1] J. LINDENSTRAUSS et L. TZAFRIRI: Classical Banach Spaces. Tome 2, 1979, Springer-Verlag.

[2] H. HEINICH: Convergence en moyenne d'un opérateur positif. C. R. Acad. Sci. Paris, 297, Série I, n°4, 1983, 237—240.

[3] C. RYLL-NARDZEWSKI: On the ergodic theorems I. Studia Math., 12, 1951, 65—73.

[4] A. IONESCU-TULCEA: Ergodic properties of isometries in L_p spaces, $1 < p < \infty$. Bull. Amer. Math. Soc., 70, 1964, 366—371.

[5] N. DUNFORD et J. T. SCHWARTZ: Linear Operators. Part I, 1958, Intersience, New-York.

Recu en 5ème avril 1984

Université Paris VI.
Laboratoire de Probabilités
Tour 56, 3e étage
4, Place Jussieu
75230 Paris CEDEX

Katedra matematiky a d. g.
Stavebná fakulta SVŠT
Radlinského 11
813 68 Bratislava

О СХОДИМОСТИ ПОЛИНОМОВ $P_n(T)$

Idris Assani, Radko Mesiar

Резюме

В работе дается критерий для слабой сходимости полиномов $P_n(T)$ с положительными коэффициентами, где T положительный оператор в пространстве Рисса. Как следствие получаем слабую сходимость полиномов

$$P_n(T) = \frac{1}{g(n)} \left(I + T + \frac{T^2}{2} + \ldots + \frac{T^{n-1}}{n-1}\right).$$

Приводится пример положительного оператора T, для которого T^n/n сильно сходится к нулю, но его средние Чезара не ограничены по норме. Для операторов T в L_p с ограниченными средними Чезара (по норме) полиномы $P_n(T) = (I + T + T^2/2 + \ldots + T^{n-1}/(n-1))/n^\alpha$ сходятся равномерно и почти всюду к нулю для $p\alpha > 1$.