I. I. Mikhailov

Об одном свойстве фигурных чисел

Mathematica Slovaca, Vol. 33 (1983), No. 3, 303--306

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136336

Math. Slovaca 33, 1983, No. 3,303—306

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ФИГУРНЫХ ЧИСЕЛ

И. И. МИХАЙЛОВ

Цель этой заметки – решить уравнение вида

$$P_x^{(3)}+P_y^{(4)}=P_z^{(5)}, \tag{1}$$

то есть выяснит , существуют ли такие треугольные и четырехугольные числа, что их сумма равна пятиугольному числу.

Напомним следующее

Определение. *n-ным k-угольным числом называется число вида*

$$P_n^{(k)}=\tfrac{1}{2}n[(k-2)n-(k-4)],$$

где k и n — натуральные числа, причем $k\geqslant 3$.

Из определения ясно, что числа вида $P_n^{(3)}=\frac{1}{2}n(n+1)$ — треугольные, $P_n^{(4)}=n^2$ — четырехугольные (квадратные), $P_n^{(5)}=\frac{1}{2}(3n-1)$ — пятиугольные и т.д.

Итак, имеем уравнение

$$\tfrac{1}{2}x(x+1)+y^2=\tfrac{1}{2}z(3z-1),$$

которое легко преобразуется к виду

$$(x+z)(x-z+1)=2(z+y)(z-y), \tag{2}$$

откуда согласно [1, стр. 70] имеем:

$$x+z=Aab,\quad x-z+1=Bcd,\quad z+y=ac,\quad z-y=bd, \tag{3}$$

где a, b, c, d, A, B — натуральные числа, причем $AB=2$.

Из формул (3) следует, что

$$x=\tfrac{1}{2}(Aab+Bcd-1),\quad y=\tfrac{1}{2}(ac-bd),\quad z=\tfrac{1}{2}(ac+bd), \tag{4}$$

где $ac>bd$ и $Aab-Bcd+1=ac+bd$. От первого условия легко отказаться, взяв y по модулю, как в уравнение (1) y входит в квадрате. Второе условие представим в более удобном виде

$$(a+d)(b+c)=3ab+1\quad (\text{при } A=2,\ B=1), \tag{5}$$

$$(a-d)(b-c)=3cd-1 \quad (\text{при } A=1, B=2). \tag{6}$$

формулы (4) примут соответственно вид

$$x=\tfrac{1}{2}(2ab+cd-1), \quad y=\tfrac{1}{2}|ac-bd|, \quad z=\tfrac{1}{2}(ac+bd) \tag{7}$$

при условии (5),

$$x=\tfrac{1}{2}(ab+2cd-1), \quad y=\tfrac{1}{2}|ac-bd|, \quad z-\tfrac{1}{2}(ac+bd) \tag{8}$$

при условии (6).

Легко видеть также, что для того, чтобы числа x, y, z были натуральными, необходимо, чтобы в формулах (7) выполнялось условие $cd\equiv 1 \pmod 2$, то есть $c\equiv 1 \pmod 2$ и $d\equiv 1 \pmod 2$. Тогда для a и b имеем две возможности: а) $a\equiv 0 \pmod 2$, $b\equiv 0 \pmod 2$, б) $a\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv 1 \pmod 2$. Пусть в случае а) $a=2\alpha$, $b=2\beta$, $c=2\gamma-1$, $d=2\delta-1$, в случае б) $a=2\alpha-1$, $b=2\beta-1$, $c=2\gamma-1$, $d=2\delta-1$, где α, β, γ, δ — натуральные числа.

В случае а) формулы (7) и условие (5) примут вид

$$\begin{aligned} x&=4\alpha\beta+2\gamma\delta-\gamma-\delta,\\ y&=|2\alpha\gamma-2\beta\delta-\alpha+\beta|,\\ z&=2\alpha\gamma+2\beta\delta-\alpha-\beta, \end{aligned} \tag{9}$$

где

$$(2\alpha+2\delta-1)(2\beta+2\gamma-1)=12\beta+1. \tag{10}$$

Фиксируя α и β, находим возможные значения для γ и δ.

Пример 1. Пусть $\alpha=1$, $\beta=2$. Тогда из (10) имеем условие $(2\delta+1)(2\gamma+3)=25$, откуда $2\delta+1=2\gamma+3=5$, тогда $\delta=2$, $\gamma=1$. Имеем: $x=9$, $y=5$, $z=7$.

В случае б) формулы (7) и условие (5) примут вид

$$\begin{aligned} x&=4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+2\gamma\delta-\gamma-\delta+1,\\ y&=|2\alpha\gamma-\alpha-\gamma-2\beta\delta+\beta+\delta|,\\ z&=2\alpha\gamma-\alpha-\gamma+2\beta\delta-\beta-\delta+1, \end{aligned} \tag{11}$$

где

$$(\alpha+\delta-1)(\beta+\gamma-1)=3\alpha\beta-\tfrac{3}{2}(\alpha+\beta)+1 \quad \text{и} \quad \alpha+\beta\equiv 0 \pmod 2. \tag{12}$$

Фиксируя α и β, находим возможные γ и δ.

Пример 2. Пусть $\alpha=1$, $\beta=3$. Тогда из (12) имеем условие $\delta(\gamma+2)=4$, то есть $\delta=1$, $\gamma=2$. В таком случае $x=6$, $y=1$, $z=4$.

Аналогично в формулах (8) необходимо, чтобы $ab\equiv 1 \pmod 2$, т.е. $a\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv 1 \pmod 2$. Тогда для c и d имеем две возможности: а) $c\equiv 0 \pmod 2$, $d\equiv 0 \pmod 2$, б) $c\equiv 1 \pmod 2$, $d\equiv 1 \pmod 2$. Пусть в случае а) $a=2\alpha-1$, $b=2\beta-1$, $c=2\gamma$, $d=2\delta$, в случае б) $a=2\alpha-1$, $b=2\beta-1$, $c=2\gamma-1$, $d=2\delta-1$, где α, β, γ, δ — натуральные.

В случае а) формулы (8) и условие (6) примут вид

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha\beta + 4\gamma\delta - \alpha - \beta, \\ y &= |2\alpha\gamma - 2\beta\delta - \gamma + \delta|, \\ z &= 2\alpha\gamma + 2\beta\delta - \gamma - \delta, \end{aligned} \tag{13}$$

где

$$(2\alpha - 2\delta - 1)(2\beta - 2\gamma - 1) = 12\gamma\delta - 1. \tag{14}$$

Фиксируя γ и δ, находим возможные значения для α и β.

Пример 3. Пусть $\gamma = 1$, $\delta = 1$. Тогда из (14) имеем условие $(2\alpha - 3)(2\beta - 3) = 11$, откуда $\alpha = 2$, $\beta = 7$ или $\alpha = 7$, $\beta = 2$. В таком случае имеем: $x = 23$, $y = 10$, $z = 16$.

В случае б) формулы (8) и условие (6) примут вид

$$\begin{aligned} x &= 2\alpha\beta - \alpha - \beta + 4\gamma\delta - 2\gamma - 2\delta + 1, \\ y &= |2\alpha\gamma - \alpha - \gamma - 2\beta\delta + \beta + \delta|, \\ z &= 2\alpha\gamma - \alpha - \gamma + 2\beta\delta - \beta - \delta + 1, \end{aligned} \tag{15}$$

где

$$(\alpha - \delta)(\beta - \gamma) = 3\gamma\delta - \tfrac{1}{2}[3(\gamma + \delta) - 1] \quad \text{и} \quad \gamma + \delta \equiv 1 \pmod 2. \tag{16}$$

Фиксируя γ и δ, находим возможные α и β.

Пример 4. Пусть $\gamma = 1$, $\delta = 2$. Тогда из (16) имеем условие $(\alpha - 2)(\beta - 1) = 2$, откуда $\alpha = 4$, $\beta = 2$ или $\alpha = \beta = 3$, Тогда по формулам (15) получаем: $x = 13$, $y = 1$, $z = 8$ или $x = 15$, $y = 5$, $z = 10$.

Замечание 1. Положив в формулах (3) параметры a, b, c, d натуральными числами, мы исключили возможности $y = z$ и $z = x + 1$. Легко убедиться, что к полученным решениям можно добавить тривиальное: $y = z = x + 1$.

Замечание 2. Любопытно, что, потребовав в уравнении (2), чтобы $x - z + 1 = z - y$, $z + x = 2(y + z)$, получаем: $x - z = 2y$, $x - 2z = -y - 1$, откуда при любом натуральном y имеем: $x = 5y + 1$, $z = 3y + 1$.

Полученные формулы доказывают, что уравнение (1) разрешимо для любого натурального числа y. Легко найти несколько первых решений, задаваемых этими формулами. Для тройки (x, y, z) имеем: (6, 1, 4), (11, 2, 7), (16, 3, 10), (21, 4, 13), (26, 5, 16), (31, 6, 19), (36, 7, 22), (41, 8, 25), (46, 9, 28) и т.д.

Нами, таким образом, доказана следующая

Теорема. *Все нетривиальные решения уравнения* (1) *в натуральных числах определяются формулами* (9), (11), (13), (15) *при условиях* (10), (12), (14), (16) *соответственно, причем уравнение* (1) *имеет решение при любом натуральном числе* y.

Замечание 3. Потребуем, чтобы $x = 5y + 1 = f^2$, $y = l^2$, $z = 3y + 1 = m^2$, где f, l, m — натуральные числа. То есть попытаемся найти хотя бы одно решение уравнения вида

$$P_{f^2}^{(3)} + P_{l^2}^{(4)} = P_{m^2}^{(5)} \quad \text{или} \quad f^2(f^2+1) + 2l^4 = m^2(3m^2-1).$$

Имеем: $m^2 + 2l^2 = f^2$, откуда согласно [2, стр. 38]: $m = 2p^2 - q^2$, $l = 2pq$, $f = 2p^2 + q^2$ (p, q-натуральные числа). Тогда из условия $3y + 1 = m^2$ вытекает, что $4p^4 - 15p^2q^2 + q^4 = 1$, откуда $4p^2(p+2q)(p-2q) = (1+q^2)(1+q)(1-q)$. Положив $q = 1$, получим $p = 2$. Тогда $m = 7$, $l = 4$, $f = 9$, из чего следует, что уравнение

$$P_{u^4}^{(3)} + P_{v^4}^{(4)} = P_{w^2}^{(5)} \quad \text{или} \quad u^4(u^4+1) + 2v^8 = w^2(3w^2-1)$$

имеет решение в натуральных числах: $u = 3$, $v = 2$, $w = 7$.

ЛИТЕРАТУРА

[1] SIERPIŃSKI, W.: Elementary theory of numbers. PWN, Warszawa 1964.

[2] СЕРПИНСКИЙ, В.: О решении уравнений в целых числах. Москва 1961.

Поступило 15. 6. 1981

пр. Строителей 32, кв. 83
153038 г. Иваново – 38
СССР