I. I. Mikhailov

Об уравнении $t_x + y^2 = t_z + u^2$

Mathematica Slovaca, Vol. 33 (1983), No. 1, 35--39

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136316`

Math. Slovaca 33, 1983, No. 1, 35—39

ОБ УРАВНЕНИИ $t_x + y^2 = t_z + u^2$

И. И. МИХАЙЛОВ

Рассмотрим уравнение

$$t_x + y^2 = t_z + u^2, \tag{1}$$

где x, y, z, u — натуральные числа, t_x и t_z — треугольные числа с номерами соответственно x и z, определяемые, как известно, формулой $t_i = \frac{1}{2} i(i+1)$, где i — натуральное.

Уравнение (1) легко преобразуется к виду

$$(x+z+1)(x-z) = 2(u+y)(u-y),$$

откуда согласно [1, стр. 70] имеем:

$$x+z+1 = Aab, \quad x-z = Bcd, \quad u+y = ac, \quad u-y = bd,$$

где a, b, c, d, A, B — натуральные числа, причем $AB = 2$. Но в таком случае

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(Aab + Bcd - 1), \quad u = \tfrac{1}{2}(ac + bd), \\ z &= \tfrac{1}{2}(Aab - Bcd - 1), \quad y = \tfrac{1}{2}(ac - bd). \end{aligned} \tag{2}$$

Учитывая, что $AB = 2$, при $A = 2$, $B = 1$ имеем:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(2ab + cd - 1), \quad u = \tfrac{1}{2}(ac + bd), \\ z &= \tfrac{1}{2}(2ab - cd - 1), \quad y = \tfrac{1}{2}(ac - bd). \end{aligned} \tag{3}$$

При $A = 1$, $B = 2$:

$$\begin{aligned} x &= \tfrac{1}{2}(ab + 2cd - 1), \quad u = \tfrac{1}{2}(ac + bd), \\ z &= \tfrac{1}{2}(ab - 2cd - 1), \quad y = \tfrac{1}{2}(ac - bd). \end{aligned} \tag{4}$$

Рассмотрим формулы (3). Ясно, что для натуральности чисел x, y, z, u необходимо, чтобы $cd \equiv 1 \pmod 2$, $ac + bd \equiv 0 \pmod 2$, откуда $c \equiv 1 \pmod 2$, $d \equiv 1 \pmod 2$, при этом: а) $a \equiv 1 \pmod 2$, $b \equiv 1 \pmod 2$, б) $a \equiv 0 \pmod 2$, $b \equiv 0 \pmod 2$.

В случае а) положим $a = 2\alpha - 1$, $b = 2\beta - 1$, $c = 2\gamma - 1$, $d = 2\delta - 1$ (α, β, γ, δ — натуральные числа). Тогда формулы (3) с учетом того, что y входит в (1) в квадрате, примут вид

$$\begin{aligned} x&=4\alpha\beta-2\alpha-2\beta+2\gamma\delta-\gamma-\delta+1, & z&=4\alpha\beta-2\alpha-2\beta-2\gamma\delta+\gamma+\delta,\\ y&=|2\alpha\gamma-\alpha-\gamma-2\beta\delta+\beta+\delta|, & u&=2\alpha\gamma-\alpha-\gamma+2\beta\delta-\beta-\delta+1, \end{aligned} \tag{5}$$

где α, β, γ, δ — натуральные числа, такие, что z — натуральное число.

Аналогично в случае б) при $a=2\alpha$, $b=2\beta$, $c=2\gamma-1$, $d=2\delta-1$ имеем:

$$\begin{aligned} x&=4\alpha\beta+2\gamma\delta-\gamma-\delta, & z&=4\alpha\beta-2\gamma\delta+\gamma+\delta-1,\\ y&=|2\alpha\gamma-\alpha-2\beta\delta+\beta|, & u&=2\alpha\gamma-\alpha+2\beta\delta-\beta, \end{aligned} \tag{6}$$

где α, β, γ, δ — натуральные, такие, что z — натуральное.

Рассмотрим формулы (4). Для того, чтобы числа x, y, z, u были натуральными, необходимо, чтобы $ab\equiv 1 \pmod 2$, $ac+bd\equiv 0 \pmod 2$, откуда ясно, что $a\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv 1 \pmod 2$, но тогда: а) $c\equiv 1 \pmod 2$, $d\equiv 1 \pmod 2$, б) $c\equiv 0 \pmod 2$, $d\equiv 0 \pmod 2$. В случае а) положим, чтобы $a=2\alpha-1$, $b=2\beta-1$, $c=2\gamma-1$, $d=2\delta-1$ (α, β, γ, δ — натуральные числа). Тогда формулы (4) получаем в виде

$$\begin{aligned} x&=2\alpha\beta-\alpha-\beta+4\gamma\delta-2\gamma-2\delta+1, & z&=2\alpha\beta-\alpha-\beta-4\gamma\delta+2\gamma+2\delta-1,\\ y&=|2\alpha\gamma-\alpha-\gamma-2\beta\delta+\beta+\delta|, & u&=2\alpha\gamma-\alpha-\gamma+2\beta\delta-\beta-\delta+1, \end{aligned} \tag{7}$$

где α, β, γ, δ — натуральные, такие, что z — натуральное. В случае б) при $a=2\alpha-1$, $b=2\beta-1$, $c=2\gamma$, $d=2\delta$ имеем:

$$\begin{aligned} x&=2\alpha\beta-\alpha-\beta+4\gamma\delta, & z&=2\alpha\beta-\alpha-\beta-4\gamma\delta,\\ y&=|2\alpha\gamma-\gamma-2\beta\delta+\delta|, & u&=2\alpha\gamma-\gamma+2\beta\delta-\delta, \end{aligned} \tag{8}$$

где α, β, γ, δ — натуральные числа, такие, что z — натуральное.

Нами, таким образом, доказана следующая

Теорема. *Уравнение (1) имеет бесконечное множество решений в натуральных числах x, y, z, u, причем все они определяются формулами (5), (6), (7), (8).*

Пример. Пусть $\alpha=4$, $\beta=3$, $\gamma=2$, $\delta=1$. Тогда по формулам (5) $x=36$, $y=8$, $z=33$, $u=13$, по формулам (6) $x=49$, $y=9$, $z=46$, $u=15$, по формулам (7) $x=20$, $y=8$, $z=14$, $u=13$, по формулам (8) $x=25$, $y=9$, $z=9$, $u=19$.

Доказанная теорема может быть сформулирована и в терминах фигурных чисел.

Теорема. *Существует бесконечно много пар чисел, одно из которых – треугольное, а другое – четырехугольное (квадратное), таких, что сумма чисел одной пары равна сумме чисел другой. Все такие числа находятся с помощью формул (5), (6), (7), (8).*

Замечание. Тривиальная возможность $x=z$, $|y|=|u|$ исключена нами из рассмотрения условием натуральности чисел B, b, c, d.

Потребуем далее, чтобы в уравнении (1) $y=0$. Получим уравнение

$$t_x = t_z + u^2, \tag{9}$$

откуда по формулам (3) имеем:

$$x=\tfrac{1}{2}(2ab+cd-1), \quad z=\tfrac{1}{2}(2ab-cd-1), \quad u=ac,$$

где $ac=bd$, а по формулам (4):

$$x=\tfrac{1}{2}(ab+2cd-1), \quad z=\tfrac{1}{2}(ab-2cd-1), \quad u=ac,$$

где $ac=bd$. Полагая согласно [1, стр. 70] $a=pq$, $c=rs$, $b=ps$, $d=qr$ (p, q, r, s — натуральные числа), получим с одной стороны:

$$x=\tfrac{1}{2}(2p^2qs+qsr^2-1), \quad z=\tfrac{1}{2}(2p^2qs-qsr^2-1), \quad u=pqrs,$$

с другой:

$$x=\tfrac{1}{2}(p^2qs+2qsr^2-1), \quad z=\tfrac{1}{2}(p^2qs-2qsr^2-1), \quad u=pqrs.$$

Легко видеть, что полученные формулы зависят в сущности не от q и s, а от qs. Положим $qs=w$ (w — натуральное число), тогда формулы примут вид:

а) $x=\frac{1}{2}(2p^2w+wr^2-1)$, $z=\frac{1}{2}(2p^2w-wr^2-1)$, $u=prw$, и

б) $x=\frac{1}{2}(p^2w+2wr^2-1)$, $z=\frac{1}{2}(p^2w-2wr^2-1)$, $u=prw$.

В случае а) $wr^2\equiv 1 \pmod 2$, то есть $w\equiv 1 \pmod 2$, $r\equiv 1 \pmod 2$. Пусть $w=2m-1$, $r=2n-1$ (m, n — натуральные числа). Окончательно имеем:

$$\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}\{(2m-1)[2p^2+(2n-1)^2]-1\},\\ z&=\tfrac{1}{2}\{(2m-1)[2p^2-(2n-1)^2]-1\},\\ u&=p(2m-1)(2n-1)\end{aligned} \tag{10}$$

где m, n, p — натуральные такие, что z — натуральное. В случае б) $p^2w\equiv 1 \pmod 2$, т.е. $w\equiv 1 \pmod 2$, $p\equiv 1 \pmod 2$. Пусть $w=2m-1$, $p=2n-1$. Тогда

$$\begin{aligned} x&=\tfrac{1}{2}\{(2m-1)[(2n-1)^2+2r^2]-1\},\\ z&=\tfrac{1}{2}\{(2m-1)[(2n-1)^2-2r^2]-1\},\\ u&=r(2m-1)(2n-1)\end{aligned} \tag{11}$$

где m, n, r — натуральные такие, что z — натуральное.

Доказано

Следствие 1. *Уравнение (9) имеет бесконечно много решений в натуральных числах x, z, u, все они определяются формулами (10) и (11), причем оно имеет решение для любого u.*

Пример. Пусть $m=1$, $n=2$, $p=3$. Тогда по формулам (10): $x=13$, $z=4$, $u=9$. Если $m=1$, $n=2$, $r=1$, то по формулам (11) $x=5$, $z=3$, $u=3$.

Положив в формулах (10) $m=n=1$, $p=k^l$ (k, l — натуральные числа), получаем, что уравнение $t_x=t_z+u^{2l}$ имеет бесконечное множество решений в натуральных числах: $x=k^{2l}$, $z=k^{2l}-1$, $u=k$, где k, l — натуральные числа. Ясно, что в таком случае уравнение имеет решение при любых натуральных числах u и l.

И, наконец, пусть в уравнении (1) $z=0$. Получаем уравнение

$$t_x+y^2=u^2, \tag{12}$$

причем согласно формулам (3) и (4) имеем:

а) $x=cd$, $u=\frac{1}{2}(ac+bd)$, $y=\frac{1}{2}(ac-bd)$,
где $2ab=cd+1$,

б) $x=2cd$, $u=\frac{1}{2}(ac+bd)$, $y=\frac{1}{2}(ac-bd)$,
где $ab=2cd+1$. Ясно, что в случае а) $c\equiv 1 \pmod 2$, $d\equiv 1 \pmod 2$. Пусть $c=2e-1$, $d=2f-1$ (e, f — натуральные числа). Получаем формулы

$$x=(2e-1)(2f-1),\ \ u=\tfrac{1}{2}(2ae-a+2bf-b),\ \ y=\tfrac{1}{2}|2ae-a-2bf+b|, \tag{13}$$

где

$$ab=2ef-r-f+1 \quad \text{и} \quad a+b\equiv 0 \pmod 2), \tag{14}$$

причем, как легко проверить $e+f\equiv 0 \pmod 2$, $e+f\equiv 1 \pmod 4$. Фиксируя e и f, находим возможные значения для a и b. В случае б) $a\equiv 1 \pmod 2$, $b\equiv 1 \pmod 2$. Пусть $a=2e-1$, $b=2f-1$ (e, f — натуральные числа). Тогда имеем:

$$x=2cd,\ \ u=\tfrac{1}{2}(2ec-c+2fd-d),\ \ y=\tfrac{1}{2}|2ec-c-2fd+d|, \tag{15}$$

где

$$cd=2ef-e-f \quad \text{и} \quad c+d\equiv 0 \pmod 2), \tag{16}$$

причем $e+f\equiv 0 \pmod 4$, $e+f\equiv 2 \pmod 4$, $e+f\equiv 1 \pmod 2$. Фиксируя e и f, находим c и d.

Получено

Следствие 2. *Все решения уравнения (12) в натуральных числах x, y, u определяются формулами (13) и (15) при условиях (14) и (16) соответственно, причем уравнение (12) имеет решение при любых x.*

Пример. Пусть $e=3$, $f=1$. Тогда по условию (14) $ab=3$. Если $a=1$, $b=3$, то $x=5$, $u=4$, $y=1$. Если $a=3$, $b=1$, то $x=5$, $u=8$, $y=7$ (по формулам (13)). Пусть $e=2$, $f=1$, тогда по (16) $cd=1$, т.е. $c=d=1$, а тогда по формулам (15) $x=2$, $u=2$, $y=1$.

Очевидны также следующие утверждения.

Следствие 3. *Система уравнений*

$$\begin{cases} t_x + y^2 = u^2 \\ x + y = u \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах.

Следствие 4. *Система уравнений*

$$\begin{cases} t_x = t_z + u^2 \\ x = z + u \end{cases}$$

разрешима для любого натурального z и имеет бесконечно много решений в натуральных числах: $u = 2z + 1$, $x = 3z + 1$.

Следствие 5. *Система уравнений*

$$\begin{cases} t_x + y^2 = u^2 \\ \dfrac{x}{2} + y = u \end{cases}$$

имеет бесконечно много решений в натуральных числах: $x = 2(2y-1)$, $u = 3y - 1$, т.е. для любого натурального числа y разрешима.

Следствие 6. *Система уравнений*

$$\begin{cases} t_x = t_z + u^2 \\ \dfrac{x}{2} = \dfrac{z}{2} + u \end{cases}$$

не имеет решений в натуральных числах.

ЛИТЕРАТУРА

[1] SIERPIŃSKI, W.: Elementary theory of numbers. PWN Warszawa 1964.

Поступило 10. 12. 1980

153038 г. Иваново – 38
пр. Строителей 32, кв. 83
СССР