Mathematica Slovaca

Jiří Rachůnek

Translations des ensembles ordonnés

Mathematica Slovaca, Vol. 31 (1981), No. 4, 337--340

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136273

Math. Slovaca 31, 1981, No. 4, 337–340

TRANSLATIONS DES ENSEMBLES ORDONNÉS

JIŘÍ RACHŮNEK

Dans l'article [3] G. Szász a introduit la notion de translation du demi-treillis de cette manière: Soit $A=(A, \wedge)$ un demi-treillis et soit $\varphi\colon A \to A$ une application. Alors, on dit que φ est une translation de A si $\varphi(x \wedge y)=\varphi(x) \wedge y$ pour tout couple d'éléments de A. Pour des propriétés des translations des demi-treillis et, spécialement, des treillis, voir aussi [1], [4], [5] et, récemment [2].

Dans cette note nous définissons des translations des ensembles ordonnés et nous montrons que certains des résultats de la théorie des translations des demi-treillis admettent aussi une généralisation pour le cas des ensembles ordonnés.

Soit $A=(A, \leqq)$ un ensemble ordonné et soient $x_1, \ldots, x_n \in A$. Notons $L(x_1, \ldots, x_n) = \{z \in A\,;\ z \leqq x_i$ pour tout $i=1, \ldots, n\}$. Soit $\varphi\colon A \to A$ une application. Alors, on dit que φ est une *translation* de l'ensemble ordonné A si on a

$$\forall x, y \in A\,;\ \varphi(L(x, y))=L(\varphi(x), y).$$

Une application $\varphi\colon A \to A$ est appelée *opérateur intérieur* de A si on a

(1) $\forall x, y \in A\,;\ x \leqq y \ \Rightarrow\ \varphi(x) \leqq \varphi(y)$;
(2) $\forall x \in A\,;\ \varphi(x) \leqq x$;
(3) $\forall x \in A\,;\ \varphi(\varphi(x))=\varphi(x)$.

Théorème 1. *Toute translation d'un ensemble ordonné A est un opérateur intérieur de A.*

Démonstration. Soit φ une translation de A.

1. Soient $x, y \in A$, $x \leqq y$. Alors $x \in L(y)=L(y, y)$, d'où $\varphi(x) \in L(\varphi(y)) \bigcap L(y)$. Donc $\varphi(x) \in L(\varphi(y))$, c'est-à-dire $\varphi(x) \leqq \varphi(y)$.

2. Soit $x \in A$. Alors, par 1, (pour $x=y$) $\varphi(x) \in L(x)$.

3. Soit $x \in A$. Alors $\varphi(L(\varphi(x)) = \varphi(L(x, \varphi(x)) = L(\varphi(x), \varphi(x))$, donc $\varphi(x)=\varphi(t)$ pour certain $t \leqq \varphi(x)$. Ceci implique $\varphi(x) \leqq \varphi(\varphi(x))$.

Soit A un ensemble ordonné, $\Phi \neq B \subseteq A$. Alors, on dit que B est un *demi-idéal* de A si

1. $\forall x \in A, b \in B\,;\ x \leqq b \ \Rightarrow\ x \in B$;
2. $\forall x, y \in B$; il existe $x \vee y \ \Rightarrow\ x \vee y \in B$. Pour une application $\varphi\colon A \to A$, notons $I_\varphi = \{x \in A\,;\ \varphi(x)=x\}$.

Théorème 2. *Si A est un ensemble ordonné et si φ est une translation de A, alors I_φ est un demi-idéal de A.*

Démostration. 1. Supposons $x \in A$, $a \in I_\varphi$, $x \leqq a$. Dans ce cas $L(x) = L(\varphi(a), x) = \varphi(L(a, x)) = L(\varphi(x), a) = L(\varphi(x))$. Il s'ensuit que $\varphi(x) = x$.

2. Soient $x, y \in I_\varphi$ et supposons qu'il existe $x \vee y$. Alors $x = \varphi(x) \leqq \varphi(x \vee y)$, $y = \varphi(y) \leqq \varphi(x \vee y)$, donc $x \vee y \leqq \varphi(x \vee y)$. Ainsi, $\varphi(x \vee y) = x \vee y$.

Théorème 3. *Si $(A, \leqq, \wedge)$ est un demi-treillis, alors $\varphi\colon A \to A$ est une translation de l'ensemble ordonné $(A, \leqq)$ si et seulement si φ est une translation du demi-treillis $(A, \wedge)$.*

Démonstration. a) Soient φ une translation de $(A, \leqq)$ et $x, y \in A$. Alors $\varphi(x \wedge y) \leqq \varphi(x)$, $\varphi(x \wedge y) \leqq x \wedge y \leqq y$, c'est-à-dire $\varphi(x \wedge y) \leqq \varphi(x) \wedge y$. D'autre part $\varphi(x) \wedge y \in L(\varphi(x), y) = \varphi(L(x, y)) = L(\varphi(x \wedge y))$, donc $\varphi(x) \wedge y \leqq \varphi(x \wedge y)$.

b) Soient φ une translation de $(A, \wedge)$, $x, y \in A$. Alors $z \in \varphi(L(x, y))$ si et seulement si $z \leqq \varphi(x \wedge y) = \varphi(x) \wedge y$, et cela signifie $\varphi(L(x, y)) = L(\varphi(x), y)$.

Théorème 4. *Soient φ et ψ deux translations d'un ensemble ordonné. Alors $\varphi\psi = \psi\varphi$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Alors $\psi(x) \leqq x$, ainsi $\varphi(\psi(x)) \leqq \varphi(x)$. De plus $\varphi(\psi(x)) \leqq \psi(x)$, et donc, d'après le théorème 2, $\psi(\varphi(\psi(x))) = \varphi(\psi(x))$. Il s'ensuit que $\varphi(\psi(x)) = \psi(\varphi(\psi(x))) \leqq \psi(\varphi(x))$. De la même manière, on a $\psi(\varphi(x)) \leqq \varphi(\psi(x))$.

Note. Deux opérateurs intérieurs de l'ensemble ordonné A ne sont pas en général permutables. Par exemple, soient $A = \{o, a, b, c, d\}$, $o < a < c$, $a < d$, $o < b < d$, $b < c$, $\varphi(o) = \varphi(a) = o$, $\varphi(b) = \varphi(d) = b$, $\varphi(c) = c$, $\psi(o) = \psi(b) = o$, $\psi(a) = \psi(c) = a$, $\psi(d) = d$. Alors φ et ψ sont des opérateurs intérieurs de A, mais ils ne sont pas des translations. (En effet, $\varphi(L(c, d)) \neq L(\varphi(c), d)$, $\psi(L(d, c)) \neq L(\psi(d), c)$.) Néannoins, $\varphi(\psi(c)) = \varphi(a) = o$, $\psi(\varphi(c)) = \psi(c) = a$.

Théorème 5. *Soient φ et ψ deux translations d'un ensemble ordonné $(A, \leqq)$ et soient $I_\varphi = I_\psi = I$. Alors $\varphi = \psi$.*

Démonstration. Soit $x \in A$. Cela signifie que $\varphi(x)$, $\psi(x) \in I$ et ainsi $\varphi(\psi(x)) = \psi(x)$, $\psi(\varphi(x)) = \varphi(x)$. Alors, d'après le théorème 4, $\varphi = \psi$.

Théorème 6. *Soit φ un opérateur intérieur d'un ensemble ordonné $(A, \leqq)$. Alors φ est une translation de $(A, \leqq)$ si et suelement si*

(a) $$\forall x, y \in A\,;\ \varphi(x) = x,\ y \leqq x \Rightarrow \varphi(y) = y.$$

Démonstration. a) Supposons qu'un opérateur intérieur φ satisfait à la condition (a). Soit $z \in L(\varphi(x), y)$. Alors $\varphi(z) = z$. En outre $z \leqq \varphi(x) \leqq x$, et donc

$z \in L(x, y)$. Mais cela signifie que $z = \varphi(z) \in \varphi(L(x, y))$, et ceci implique $L(\varphi(x), y) \subseteq \varphi(L(x, y))$.

Réciproquement, soit u $\in \varphi(L(x, y))$. Alors $u = \varphi(v)$, où $v \leqq x, y$, et $\varphi(v) \leqq \varphi(x)$, $\varphi(v) \leqq v \leqq y$. Donc $u = \varphi(v) \in L(\varphi(x), y)$, c'est-à-dire $\varphi(L(x, y)) \subseteq L(\varphi(x), y)$.

b) L'implication opposée est évidente.

Théorème 7. *Si φ et ψ sont deux translations d'un ensemble ordonné $(A, \leqq)$, alors, $\varphi \geqq \psi$ si et seulement si $\varphi\psi = \psi$.*

Démonstration. Soient $\varphi \geqq \psi$, $x \in A$. Alors $\varphi(\psi(x)) \geqq \psi(\psi(x)) = \psi(x)$. De plus, puisque φ est une translation, $\varphi(\psi(x)) \leqq \psi(x)$. Cela signifie $\varphi\psi = \psi$.

Réciproquement, si $\varphi\psi = \psi$ et $x \in A$, alors $\psi(x) = \varphi(\psi(x)) \leqq \varphi(x)$, c'est-à-dire $\psi \leqq \varphi$.

Théorème 8. *Si φ est une translation d'un ensemble ordonné $(A, \leqq)$ et si $x \in A$, alors $I_\varphi \cap L(x) = L(\varphi(x))$.*

Démonstration. On a $\varphi(x) \leqq x$, $\varphi(\varphi(x)) = \varphi(x)$, ainsi $\varphi(x) \in I_\varphi \cap L(x)$. Supposons $b \in I_\varphi \cap L(x)$. Alors $b \leqq x$, $b = \varphi(b)$, d'où $b \leqq \varphi(x)$. De plus, il est clair que $I_\varphi \cap L(x)$ est un demi-idéal de $(A, \leqq)$. Donc $I_\varphi \cap L(x) = L(\varphi(x))$.

Théorème 9. *Pour un demi-idéal I d'un ensemble ordonné $(A, \leqq)$ les conditions suivantes sont équivalentes:*

a) *Pour tout $x \in A$ il existe $k_x \in I$ tel que $I \cap L(x) = L(k_x)$.*

b) *Il existe une translation φ de $(A, \leqq)$ telle que $I_\varphi = I$.*

Démonstration. 1. Soient $x, y \in A$, $x \leqq y$. Alors $L(x) \subseteq L(y)$, donc $L(k_x) \subseteq L(k_y)$. Cela signifie $k_x \leqq k_y$.

2. Soit $x \in A$. Alors $L(k_x) \subseteq L(x)$, ainsi $k_x \leqq x$.

3. Soit $x \in A$. Alors $I \cap L(k_x) = I \cap (I \cap L(x)) = I \cap L(x) = L(k_x)$, donc $k_{(k_x)} = k_x$.

4. Supposons $x, y \in A$, $k_x = x$, $y \leqq x$. Puisque $x \in I$ et puisque I est un demi-idéal, on a aussi $y \in I$. D'où $I \cap L(y) = L(y)$, c'est-à-dire $L(y) = L(k_y)$. Par suite $y = k_y$.

D'après le théorème 6 une application $\varphi: A \to A$ telle que $\varphi(x) = k_x$ pour tout $x \in A$ est une translation de $(A, \leqq)$, et trivialement, $I_\varphi = I$.

L'implication opposée est, d'après le théorème 8, évidente.

BIBLIOGRAPHIE

[1] KOLIBIAR, M.: Bemerkungen über Translationen der Verbände, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae, Math., 5, 1961, 455—458.

[2] NIEMINEN, J.: Derivations and translations on lattices, Acta Sci. Math. (Szeged), 38, 1976, 359—363.

[3] SZÁSZ, G.: Die Translationen der Halbverbände, Acta Sci. Math. (Szeged), 17, 1956, 165—169.
[4] SZÁSZ, G.: Translationen der Verbände, Acta Fac. Rer. Nat. Univ. Comenianae, Math., 5, 1961, 449—453.
[5] SZÁSZ, G. et SZENDREI, J.: Über die Translationen der Halbverbände, Acta Sci. Math. (Szeged), 18, 1957, 44—47.

Reçu le 26. Mai 1978

Katedra algebry a geometrie
Přírodovědecké fakulty Univerzity Palackého
771 46 Olomouc

ПЕРЕНОСЫ УПОРЯДОЧЕННЫХ МНОЖЕСТВ

Йиржи Рахунек

Резюме

В статье введено понятие переноса упорядоченного множества, которое является обобщением этого понятия из теории полурешёток. Здесь главным образом охарактеризованы переносы в терминах внутренних операторов и полуидеалов упорядоченных множеств.