Mathematica Slovaca

Pavol Híc

О 3-хроматических плоских гиперграфах

Mathematica Slovaca, Vol. 31 (1981), No. 1, 79--82

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136260`

Math. Slovaca 31, 1981, No. 1, 79—82

О 3-ХРОМАТИЧЕСКИХ ПЛОСКИХ ГИПЕРГРАФАХ

ПАВОЛ ХИЦ

В [4] было показано, что всякий плоский гиперграф, содержащий не более двух ребер степени 2, бихроматичен. Из [1, 2] и теоремы Булитка (8] стр.137) вытекает, что всякий плоский гиперграф является 4-хромати еск . В этой статье дается достаточное условие 3-хроматичности гиперграфов Для графов этот вопрос разрешен (см. теорему Грюнбаума [5]).

Определения основных понятий теории гиперграфов и определение пл с ких гиперграфов можно найти в [3, 8]. Основные сведения о плоских тр ан у- ляциях изложены в [7]. Определение хроматического числа гиперграфов дан в [3, 6, 8].

Раскраску вершин гиперграфа H будем называть в этой статье *правилы ои*, если не существует такого ребра, для которого все инцидентные ве ш н ı имели бы один и тот же цвет (см. [6]). Поэтому гиперграф H, хотя бы с нı ı высячим ребром не допускает раскраску в этом смысле. Далее ясно, что голые ребра не влияют на правильность раскраски. Поэтому, под плоским гиперграфом в дальнейшем мы понимаем плоский гиперграф без голых и высячих ребер.

Теорема. *Всякий плоский гиперграф, содержащий не более пяти ребер степени 2, является 3-хроматическим.*

Доказательство. К данному гиперграфу построим плоскую триангул цию с тем же самым множеством вершин, которая содержит ребра степени 2 исходного гиперграфа. Подробно процесс построения этой триангуляции описан в [8] (стр. 138). Теперь можно легко убедиться, что утверждение теоремы эквивалентно следующему:

Вершины всякой плоской триангуляции можно окрасить тремя цветам 1, 2 *и* 3 *так, чтобы концы пяти произвольных заранее отмеченных ребер были окрашены различно и в каждом треугольнике по крайней мере две вершин ı были бы окрашены в разные цвета.*

Раскраску вершин плоской триангуляции, удовлетворяющую предыдущим условиям будем называть *слабо правильной*. Доказательство проведем для случая, когда гиперграф содержит 5 ребер степени 2. Для сучаев, когда гиперграф содержит менее чем 5 ребер степени 2, доказательство можно сделать тем же способом. Пусть a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 – ребра степени два нашего гиперграфа. Они тоже являются ребрами нашей плоской триангуляции. Из теоремы Тэйта–Волынского (см. [7] гл. 6 §48) и из [1, 2] вытекает, что ребра всякой плоской триангуляции с более чем тремя вершинами можно пометить тремя знаками A, B, C так, что у каждой грани знаки трех ее ребер все различны. Могут возникнуть три случая:

(1) Ребра a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обозначены одним и тем же знаком, например A.
(2) Ребра a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обозначены двумя знаками, например A, B.
(5) Ребра a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 обозначены всеми тремя знаками A, B, C.

Если множество ребер в этом случае разобьем на три непересекающихся множества так, что ребра, имеющие один и тот же знак, принадлежат одному классу, один из этих классов, например класс, обозначенный знаком C, содержит точно одно из ребер степени два. Пусть это, например, ребро a_5. Далее, ребра плоской триангуляции обозначим двумя знаками P, T так, что ребра, обозначенные знаками A, B, имеют теперь знак T, а ребра, обозначенные знаком C, имеют теперь знак P. Ясно, что все выбранные ребра в случаях (1) и (2) и ребра a_1, a_2, a_3, a_4 в случае (3) обозначены знаком T и далее, в каждом треугольнике два ребра обозначены знаком T и одно знаком P. Знаки P, T в дальнейшем будем понимать как элементы абелевой группы Γ, которая имеет два элемента P, T и единицу P.

Вершины плоской триангуляции можно теперь раскрасить двумя цветами следующим образом:

(а) Возьмем произвольную вершину x плоской триангуляции и присоединим ей цвет 1.

(б) Пусть вершины x, y — смежные и такие, что вершина x уже раскрашена, а y еще нет. Тогда вершину y раскрасим цветом вершины x (цветом, отличным от цвета вершины x), если ребро xy обозначено знаком P (знаком T).

Из связности плоской триангуляции вытекает, что каждая вершина раскрашена. Далее, из предыдущего вытекает, что край каждой грани содержит вершины обоих цветов и концы пяти ребер a_1, a_2, a_3, a_4, a_5 (кроме a_5 в случае (3)) окрашены различно. Чтобы получить *слабо правильную* раскраску в случае (3), нужно одну из вершин ребра a_5 раскрасить в новый цвет 3. Надо еще убедиться, что каждой вершине плоской триангуляции будет при раскраске двумя цветами в соответствии с (а), (б) присоединен тоько один цвет.

К доказательству этого надо привести несколько определений, которые мы будем употреблять и которые можно найти в [7]. Пусть $L=(X, U)$ — граф с множеством ребер U, а $\boldsymbol{L}_L$ — множество всех суграфов этого графа. Множество $\boldsymbol{L}_L$ относительно операции сложения:

$$(X, U_1)+(X, U_2)=\{X, (U_1\cup U_2)\setminus(U_1\cap U_2)\}$$

образует абелеву группу. В дальнейшем группу $\boldsymbol{L}_L$ будем рассматривать как линейное пространство над полем коэфициентов $D\{0, 1\}$, называемое пространством суграфов данного графа L. Элемент пространства $\boldsymbol{L}_L$ называется квазициклом, если в соответствующем суграфе графа L все вершины обладают четными степенями. Из определений квазицикла и операции сложения в $\boldsymbol{L}_L$ вытекает, что сумма двух квазициклов есть квазицикл, и поэтому множество $\boldsymbol{L}_\mathcal{L}$ всех квазициклов образует в $\boldsymbol{L}_L$ подпространство. Мы будем в соответствии из [7] называть $\boldsymbol{L}_\mathcal{L}$ пространством циклов графа L.

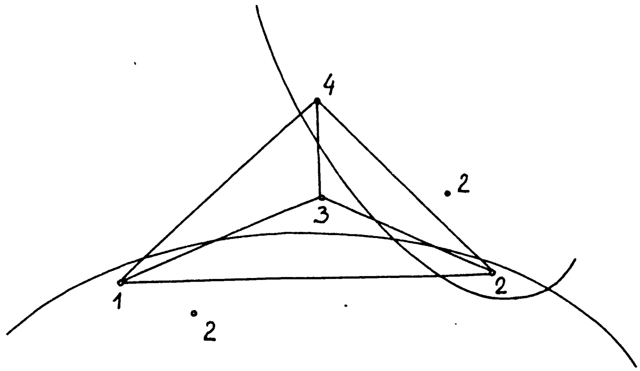

Рис. 1

К завершению нашего доказательства хватит показать, что для произвольного циклического маршрута $\mathscr{C}$ в триангуляции L сумма элементов раньше введенной группы Γ, которые соответствуют ребрам этого маршрута, равна P. Каждому суграфу $L_1 = (X, U_1)$ триангуляции L отнесем сумму элементов, соответствующих ребрам U_1. Это отображение φ: $\boldsymbol{L}_L \to \Gamma$ будет, очевидно, гомоморфизмом. Поскольку край каждой грани переходит в $P + T + T = P$, то принадлежит край каждой грани ядру этого гомоморфизма. Так как из краев граней можно согласно условию Мак—Лэйна (см. [7], гл. 6, §47, доказательство пункта (0) $\Rightarrow$ (1)) составить базис пространства $\boldsymbol{L}_L$, получаем, что $\boldsymbol{L}_L \subseteq \operatorname{Ker} \varphi$.

Пусть теперь $\mathscr{C}$ — циклический маршрут в триангуляции L, и $L_\mathscr{C} = (X, U_\mathscr{C})$ — суграф, порожденный множеством $U_\mathscr{C}$ тех ребер L, каждое из которых фитурирует в $\mathscr{C}$ нечетное число раз. Поскольку маршрут $\mathscr{C}$ — циклический, то степени всех вершин графа $L_\mathscr{C}$ четны и $L_\mathscr{C}$ есть квазицикл графа L, т.е. $L_\mathscr{C} \in \operatorname{Ker} \varphi$. Тем доказательство завершено.

Из примера, показанного на рис. 1, вытекает, что плоский гиперграф, содержащий 6 ребер степени 2, уже не должен быть 3-хроматическим.

ЛИТЕРАТУРА

[1] APPEL, K.—HAKEN., W.: Every planar map is four colorable, Part I: Discharging, Illinois, Math., J. 21, 1977, 429—490.
[2] APPEL, K.—HAKEN. W.—KOCH. J.: Every planar map is four colorable, Part II: Reducibility, Illinois, Math., J. 21, 1977, 491—567.
[3] BERGE, C.: Graphs and hypergraphs, North-Holland, Amsterdam 1973.
[4] БУРШТЕЙН, М. И.: О бихроматичности плоских гиперграфов, Сообщения АН ГССР, 78, №2, 1975, 293—296.
[5] GRÜNBAUM, B.: Grötzsch's theorem on 3-colorings, Michigan Math. J. 10, 1963, 303—310
[6] ERDÖS, P.—HAJNAL, A.: On chromatic number of graphs and set-systems, Acta Math. Acad. Sci. Hung. 17, 1—2, 1966, 61—99.
[7] ЗЫКОВ, А. А.: Теория конечных графов, Наука, Новосибирск 1969.
[8] ЗЫКОВ, А. А.: Гиперграфы, УМХ, 29:1, 1974, 89—154.

Поступило 4. 1 1979

Katedra matematiky
Prevádzkovo-ekonomickej fakulty
Vysokej školy poľnohospodárskej
Mostná 16
949 01 Nitra