Ján Borsík; Jozef Doboš

О функциях, композиция с метрикой которых является метрикой

Mathematica Slovaca, Vol. 31 (1981), No. 1, 3--12

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136257

Math. Slovaca 31, 1981, No. 1, 3—12

О ФУНКЦИЯХ, КОМПОЗИЦИЯ С МЕТРИКОЙ КОТОРЫХ ЯВЛЯЕТСЯ МЕТРИКОЙ

ЯН БОРСИК—ЙОЗЕФ ДОБОШ

При исследовании свойств данного метрического пространства (M, ϱ) часто является пригодными заменить метрику ϱ иной, являющейся с нею равномерно, или топологически эквивалентной. Поскольку метрика является функцией, новую метрику возможно приобрести ее композицией с какой-то функцией $f\colon R_0^+ \to R_0^+$. В литературе известны некоторые достаточные условия: если функция f достигает нуль в нуле и только в нуле, является неубывающей и вогнутой [2, стр. 70]; если функция f приобретает нуль в нуле и только в нуле, является неубывающей и субаддитивной [3, стр. 178], [4, стр. 149]. Для функций, соответствующих этим условиям, известны тоже некоторые результаты о эквивалентности данных метрик: если функция f является непрерывной в точке 0, то метрики $\varrho, f\circ\varrho$ являются равномерно эквивалентными [4, стр. 228], если функция f является непрерывной, то метрики $\varrho, f\circ\varrho$ являются топологически эквивалентными [3, стр. 178]. В первой части работы исследуются некоторые достаточные условия. Необходимое и достаточное условие находится во второй части, в которой исследуется множество $\mathcal{M}$ всех функций, композиция с каждой метрикой которых является метрикой. Третья часть работы исследует отношения метрик $\varrho, f\circ\varrho$ для $f\in\mathcal{M}$.

1. Достаточные условия

1.1. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция $f\colon R_0^+\to R_0^+$ обладает следующими свойствами (где $R_0^+ = \{x\in R\colon x\geqq 0\}$):*

(1) $\forall a\in R_0^+\colon f(a)=0 \Leftrightarrow a=0$,

(2) $\forall a, b\in R_0^+\colon f(a+b)\leqq f(a)+f(b)$,

(3) $\forall a, b\in R_0^+\colon a\leqq b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)$.

Тогда функция $f\circ\varrho$ является метрикой на M.

Доказательство. [4, стр. 149].

1.2. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция $f\colon R_0^+\to R_0^+$ обладает следующими свойствами:*

(1) $\forall a \in R_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$,

(2) $\forall p, q \in R_0^+$, $p + q = 1$ $\forall a, b \in R_0^+ : f(pa + qb) \geqq p \cdot f(a) + q \cdot f(b)$.

Тогда функция $f \circ \varrho$ является метрикой на M.

Доказательство. Пусть $x, y \in R_0^+$, $x < y$. Подставляя в (2) $q = x/y$, $a = 0$, $b = y$, получаем $y \cdot f(x) - x \cdot f(y) \geqq 0$. Положив в (2) $p = x/y$, $a = x$, $b = x + y$ и используя предыдущее неравенство, получаем $f(x+y) \leqq f(x) + f(y) - (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(y - x) \leqq f(x) + f(y)$.

Подставляя в (2) $p = 1/2$, $a = 0$, $b = 2x$, получаем $f(x+x) \leqq f(x) + f(x)$. Следовательно, $\forall x, y \in R_0^+ : f(x+y) \leqq f(x) + f(y)$. Пусть $\exists x, y \in R_0^+$, $x < y$: $f(x) > f(y)$. Положим $z = (y \cdot f(x) - x \cdot f(y))/(f(x) - f(y)) \in R^+$ (где $R^+ = \{x \in R : x > 0\}$). Подставляя в (2) $p = f(y)/f(x)$, $a = x$, $b = z$, получаем $(1 - f(y)/f(x)) \cdot f(z) \leqq 0$, *т. е.* $f(z) \leqq 0$, а это в противоречии с (1). Значит,

$$\forall x, y \in R_0^+ : x \leqq y \Rightarrow f(x) \leqq f(y).$$

Согласно 1.1. $f \circ \varrho$ является метрикой.

1.3. Утверждение. *Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть функция $f : R_0^+ \to R_0^+$ обладает следующими свойствами:*

(1) $f(0) = 0$,

(2) $\exists a \in R^+ \ \forall x \in R^+ : f(x) \in \langle a, 2a \rangle$.

Тогда функция $f \circ \varrho$ является метрикой.

Доказательство. Очевидно, что $f \circ \varrho$ обладает 1. и 2. свойством метрики. Пусть x, y, $z \in M$. Если $x \neq y \neq z \neq x$, то $(f \circ \varrho)(x, y) \leqq 2a = a + a \leqq (f \circ \varrho)(y, x) + (f \circ \varrho)(y, z)$. В остальных случаях неравенство треугольника очевидно выполняется. Следовательно, $f \circ \varrho$ является метрикой.

2. Необходимое и достаточное условие

2.1. Обозначим знаком $\mathcal{M}$ множество всех функций $f : R_0^+ \to R_0^+$ обладающих следующим свойством: для каждого метрического пространства (M, ϱ) $(M, f \circ \varrho)$ тоже является метрическим пространством.

2.2. Утверждение. *$(\mathcal{M}, \circ)$ является моноидом.*

Доказательство. Пусть f, $g \in \mathcal{M}$ и пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Тогда $(M, g \circ \varrho)$ является метрическим пространством. Следовательно, $(M, f \circ (g \circ \varrho)) = (M, (f \circ g) \circ \varrho)$ является метрическим пространством, а это означает, что $f \circ g \in \mathcal{M}$.

2.3. Лемма. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда*

$$\forall a \in R_0^+ : f(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0.$$

Доказательство. Пусть $M = R$, $\varrho(x, y) = |x - y|$ для всех $x, y \in R$. Тогда

$(M, f\circ\varrho)$ является метрическим пространством и $\forall a\in R_0^+: \varrho(a, 0)=a$. Пусть $a\in R_0^+$. Тогда $0=f(a) = (f\circ\varrho)(a, 0) \Leftrightarrow a=0$.

2.4. Лемма. *Пусть $f\in\mathcal{M}$. Тогда*

$$\forall a, b, c\in R_0^+: |a-b|\leqq c\leqq a+b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)+f(c).$$

Доказательство. Пусть $M=R\times R$, $\varrho((x_1, y_1), (x_2, y_2)) = \sqrt{((x_1-x_2)^2 + (y_1-y_2)^2)}$ для всех $x_1, x_2, y_1, y_2\in R$. Пусть $a, b, c\in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, тогда $a + b + c \geqq 0$, $a - b + c \geqq 0$, $a + b - c \geqq 0$, $-a + b + c \geqq 0$. Положим $u = (a/2, 0)$, $v = (-a/2, 0)$, $w = ((c^2-b^2)/(2a), (\sqrt{((a + b + c)\cdot(a + b - c)\cdot(a - b + c)\cdot(-a + b + c))})/(2a))$, если $a\neq 0$ и $w=(b, 0)$, если $a=0$. Из того, что $(M, f\circ\varrho)$ является метрическим пространством, следует $(f\circ\varrho)(u, v) \leqq (f\circ\varrho)(u, w) + (f\circ\varrho)(v, w)$. Значит, $f(a) \leqq f(b) + f(c)$.

2.5. Лемма. *Пусть $f\in\mathcal{M}$. Тогда*

(1) $\forall a, b\in R_0^+: f(a+b)\leqq f(a)+f(b)$,
(2) $\forall a, b\in R_0^+: a\leqq 2b \Rightarrow f(a)\leqq 2\cdot f(b)$.

Доказательство. Пусть $a, b\in R_0^+$. Поскольку $|(a+b)-a| \leqq b \leqq (a+b)+a$, то $f(a+b) \leqq f(a)+f(b)$. Пусть $a, b\in R_0^+$, $a\leqq 2b$. Поскольку $|a-b| \leqq b \leqq a+b$, то $f(a) \leqq f(b) + f(b) = 2\cdot f(b)$.

2.6. Следствие. *Пусть $f\in\mathcal{M}$ и пусть $a\in R_0^+$. Тогда $\forall n\in N: f(a)/2^n \leqq f(a/2^n)$.*

Доказательство. Так как $a\leqq 2\cdot(a/2)$, то $f(a) \leqq 2\cdot f(a/2)$, т. е. $f(a)/2 \leqq f(a/2)$. Пусть $k\in N$ и пусть $f(a)/2^k \leqq (a/2^k)$. Поскольку $a/2^k \leqq 2\cdot(a/2^{k+1})$, то $f(a/2^k) \leqq 2\cdot f(a/2^{k+1})$. Отсюда следует, что $f(a)/2^{k+1} \leqq f(a/2^k)/2 \leqq f(a/2^{k+1})$.

2.7. Теорема. *Пусть f: $R_0^+\to R_0^+$. Тогда для того, чтобы $f\in\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы*

(1) $\forall a\in R_0^+: f(a)=0\Leftrightarrow a=0$,
(2) $\forall a, b, c\in R_0^+: |a-b| \leqq c \leqq a+b \Rightarrow f(a) \leqq f(b)+f(c)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из 2.3. и 2.4., покажем достаточность. Пусть (M, ϱ) является метрическим пространством и пусть x, y, $z\in M$. Тогда $(f\circ\varrho)(x, y) = 0 \Leftrightarrow \varrho(x, y) = 0 \Leftrightarrow x=y$. Положив $\varrho(x, z)=a$, $\varrho(y, y)=b$, $\varrho(y, z)=c$, получим $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, и согласно (2) будем иметь $f(a) \leqq f(b) + f(c)$, т. е. $(f\circ\varrho)(x, z) \leqq (f\circ\varrho)(y, x) + (f\circ\varrho)(y, z)$. Отсюда следует, что $f\in\mathcal{M}$.

2.8. Следствие. *Пусть f: $R_0^+\to R_0^+$. Тогда для того, чтобы $f\in\mathcal{M}$, необходимо и достаточно, чтобы:*

(*i*) $f(0)=0$ & $\exists a\in R^+: f(a)>0$,
(*ii*) $\forall a, b, c\in R_0^+: |a-b|\leqq c\leqq a+b \Rightarrow f(a)\leqq f(b)+f(c)$.

Доказательство. Необходимость вытекает из 2.7, покажем достаточность. Пусть $x \in R^+$. Согласно свойству Архимеда $\exists n \in N: a/2^n \leqq 2x$, из чего следует согласно 2.6, 2.5 (2), что $0 < f(a)/2^n \leqq f(a/2^n) \leqq 2 \cdot f(x)$. Тогда $\forall x \in R_0^+: f(x) = 0 \Leftrightarrow x = 0$ и в силу 2.7 $f \in \mathcal{M}$.

2.9. Теорема. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Следующие утверждения эквивалентны:*

(1) *f является непрерывной,*
(2) *f является непрерывной в точке* 0.
(3) $\forall \varepsilon > 0\ \exists x \in R^+: f(x) < \varepsilon$.

Доказательство. (2) $\Rightarrow$ (1). Пусть $a \in R^+$ и пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \gamma > 0$ $\forall x \in R_0^+,\ x < \gamma: f(x) < \varepsilon$. Положим $\delta = \min\{\gamma/2, a/2\}$. Поскольку $\delta < \gamma$, то $f(\delta) < \varepsilon$. Пусть $x \in R_0^+$, $|x - a| < \delta$. Так как $|x - a| \leqq \delta \leqq x + a$, то согласно 2.4 справедливо $f(x) \leqq f(a) + f(\delta)$, $f(a) \leqq f(x) + f(\delta)$. Значит, $|f(x) - f(a)| \leqq f(\delta) < \varepsilon$. Тогда $\forall a \in R^+\ \forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R_0^+,\ |x - a| < \delta: |f(x) - f(a)| < \varepsilon$, т. е. f является непрерывной на R^+ и согласно предположению следует, что f является непрерывной.

(3) $\Rightarrow$ (2). Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists a \in R^+: f(a) < \varepsilon/2$. В силу 2.5 имеем $\forall x \in R_0^+$, $x \leqq 2a: f(x) \leqq 2 \cdot f(a) < \varepsilon$. Положив $\delta = 2a$, получим $\forall \varepsilon > 0\ \exists \delta > 0\ \forall x \in R_0^+$, $x < \delta: f(x) < \varepsilon$. Таким образом, f является непрерывной в точке 0. То, что (1) $\Rightarrow$ (3), очевидно.

2.10. Следствие. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Пусть f является разрывной. Тогда $\exists \varepsilon > 0$ $\forall x \in R^+: f(x) \geqq \varepsilon$.*

2.11. Утверждение. *Пусть $f, g \in \mathcal{M}$. Тогда $f + g$, $\max(f, g) \in \mathcal{M}$.*

Доказательство. Пусть $a \in R_0^+$. Тогда $(f+g)(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) + g(a) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 \ \& g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$; $(\max(f, g))(a) = 0 \Leftrightarrow \max(f(a), g(a)) = 0 \Leftrightarrow f(a) = 0 \ \& \ g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$.

Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a - b| \leqq c \leqq a + b$. Тогда согласно 2.7 $(f+g)(a) = f(a) + g(a) \leqq f(b) + f(c) + g(b) + g(c) = (f+g)(b) + (f+g)(c)$; $f(a) \leqq f(b) + f(c) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c))$, $g(a) \leqq g(b) + g(c) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c))$, т. е. $(\max(f, g))(a) = \max(f(a), g(a)) \leqq \max(f(b), g(b)) + \max(f(c), g(c)) = (\max(f, g))(b) + (\max(f, g))(c)$. Отсюда в силу 2.7 следует, что $f + g$, $\max(f, g) \in \mathcal{M}$.

2.12. Пример. Пусть $f: R_0^+ \to R_0^+$, $f(x) = 3x - 2 \cdot |x - 1| + |x - 2|$ для всех $x \in R_0^+$. Нетрудно проверить, что $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяет условиям 1.1, является непрерывной и не является вогнутой.

2.13. Пример. Пусть $f: R_0^+ \to R_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = [x] + 2$ для всех $x > 0$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, удовлетворяет условиям 1.1, является разрывной и не является вогнутой.

2.14. Лемма. *Пусть* $f \in C(\langle a, b \rangle)$, где $a, b \in R$, $a < b$. *Пусть* $f(a) = f(b)$. *тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists u,\ v \in \langle a, b \rangle : 0 < |u - v| < \varepsilon\ \&\ f(u) = f(v)$.

2.15. Утверждение. *Пусть* $f \in C(\langle a, b \rangle)$, *где* $a, b \in R$, $a < b$. *Тогда* $\forall \varepsilon > 0\ \exists x,\ y \in \langle a, b \rangle : 0 < |x - y| < \varepsilon\ \&\ (f(x) - f(y))/(x - y) = (f(a) - f(b))/(a - b)$.

Доказательство. Определим $g\colon R \to R$ следующим образом $g(x) = f(x) + (f(a) - f(b)) \cdot (a - x)/(a - b)$ для всех $x \in R$. Тогда $g \in C(\langle a, b \rangle)$, $g(a) = g(b)$ и в силу 2.14 имеем $\forall \varepsilon > 0\ \exists x,\ y \in \langle a, b \rangle : 0 < |x - y| < \varepsilon\ \&\ g(x) = g(y)$. Таким образом, $(f(x) - f(y))/(x - y) = (f(a) - f(b))/(a - b)$.

2.16. Утверждение. *Пусть* $f \in \mathcal{M}$ *и пусть* $d,\ k \in R^+$. *Определим* $g\colon R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = kx$ *для* $x \in \langle 0, d)$, $g(x) = f(x)$ *для* $x \in \langle d, \infty)$. *Тогда для того, чтобы* $g \in \mathcal{M}$, *необходимо и достаточно, чтобы* $f(d) = kd\ \&\ \forall x, y \in \langle d, \infty) : |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x - y|$.

Доказательство. 1. Пусть $g \in \mathcal{M}$. Так как g является непрерывной в точке 0, то согласно 2.9 f является непрерывной на $\langle d, \infty)$. Тогда $f(d) = kd$. Предположим, что $\exists x,\ y \in \langle d, \infty) : |f(x) - f(y)| > k \cdot |x - y|$. Ради определенности предположим $x < y$. Тогда в силу 2.15 $\exists u,\ v \in \langle x, y \rangle : 0 < |u - v| < d\ \&\ (f(u) - f(v))/(u - v) = (f(x) - f(y))/(x - y)$, откуда получим $|f(u) - f(v)| = |u - v| \cdot |f(x) - f(y))/|x - y| > |u - v| \cdot k \cdot |x - y|/|x - y| = k \cdot |u - v|$. Положим $a = u$, $b = v$, $c = |u - v|$, тогда $|a - b| \leqq c \leqq a + b$, $|f(a) - f(b)| > k \cdot c$, т. е. $|g(a) - g(b)| > g(c)$, а это в противоречии с тем, что $g \in \mathcal{M}$. Таким образом, $\forall x,\ y \in \langle d, \infty) : |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x - y|$.

2. Пусть $f(d) = kd\ \&\ \forall x, y \in \langle d, \infty) : |f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x - y|$. Очевидно, что $\forall a \in R_0^+ : g(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Пусть $a,\ b,\ c \in R_0^+$, $|a - b| \leqq c \leqq a + b$.

а. Если $a, b \in \langle 0, d)$, то $c \in \langle 0, 2d)$. Пусть $c \in \langle 0, d)$, тогда $g(a) = ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$. Если $c \in \langle d, 2d)$, то $kd - f(c) = f(d) - f(c) \leqq |f(c) - f(d)| \leqq k \cdot |c - d| = k \cdot (c - d)$, откуда следует $-f(c) \leqq k \cdot (c - 2d)$. Тогда $ka - f(c) \leqq k \cdot (a + c - 2d)$, из чего следует, что $g(a) = ka \leqq f(c) + k \cdot (a + c - 2d) \leqq k \cdot (a + (a + b) - 2d) + f(c) \leqq k \cdot (d + (d + b) - 2d) + f(c) = g(b) + g(c)$.

б. Если $a \in \langle 0, d)$, $b \in \langle d, \infty)$, то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $kd - f(b) = f(d) - f(b) \leqq |f(b) - f(d)| \leqq k \cdot |b - d| = k \cdot (b - d)$, откуда следует, что $-f(b) \leqq k \leqq (b - 2d)$. Тогда $ka - f(b) \leqq k \cdot (a + b - 2d)$, из чего следует $g(a) = ka \leqq f(b) + k \cdot (a + b - 2d) \leqq f(b) + k \cdot (a + (a + c) - 2d) \leqq f(b) + k \cdot (d + (d + c) - 2d) = f(b) + kc = g(b) + g(c)$. Пусть $c \in \langle d, \infty)$. Согласно 2.5 $\forall x \in R_0^+ : d \leqq 2x \Rightarrow f(d) \leqq 2 \cdot f(x)$, значит, $\forall x \in R_0^+ : x \geqq d/2 \Rightarrow f(x) \geqq f(d)/2 = kd/2$. Тогда $g(a) = ka < kd = kd/2 + kd/2 = f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$.

в. Если $a \in \langle d, \infty)$, $b \in \langle 0, d)$ то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $f(a) - kd = f(a) - f(d) \leqq |f(a) - f(d)| \leqq k \cdot |a - d| = ka - kd$, откуда следует, что $f(a) \leqq ka$. Тогда $g(a) = f(a) \leqq ka \leqq kb + kc = g(b) + g(c)$. Если $c \in \langle d, \infty)$, то $f(a) - f(c) \leqq |f(a) - f(c)| \leqq k \cdot |a-c| \leqq kb$. Следовательно, $g(a) = f(a) \leqq kb + f(c) = g(b) + g(c)$.

г. Если $a, b \in \langle d, \infty)$, то $c \in \langle 0, \infty)$. Если $c \in \langle 0, d)$, то $f(a) - f(b) \leqq |f(a) - f(b)| \leqq k \cdot |a-b| \leqq kc$, откуда следует, что $g(a) = f(a) \leqq f(b) + kc = g(b) + g(c)$. Пусть $c \in \langle d, \infty)$, тогда $g(a) = f(a) \leqq f(b) + f(c) = g(b) + g(c)$. Значит, $\forall a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a + b \Rightarrow g(a) \leqq g(b) + g(c)$ и согласно 2.7 $g \in \mathcal{M}$.

2.17. Следствие. *Пусть $f \in \mathcal{M}$. Пусть $k \in R^+$. Пусть g: $R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = kx$ для всех $x \in R_0^+$. Положим $\alpha = \inf \{x \in R^+ : f(x) = kx\}$, и $\beta = \alpha$, если $\alpha \in R^+$, $\beta = 0$, если $\alpha \notin R^+$. Пусть*

(1) $\forall x \in (0, \beta)$: $kx \leqq f(x)$,
(2) $\forall x, y \in \langle \beta, \infty)$: $|f(x) - f(y)| \leqq k \cdot |x-y|$.

Тогда $\min(f, g) \in \mathcal{M}$.

Доказательство. а. Пусть $\alpha \in R^+$. Сначала покажем, что $f(\alpha) = k\alpha$. Пусть $\varepsilon > 0$. Из определения α получим, что $\exists y \in R^+ : f(y) = ky$ & $\alpha \leqq y < \alpha + \varepsilon/(2k)$. Тогда $|f(y) - f(\alpha)| \leqq k \cdot |y-\alpha|$; следовательно, $0 \leqq f(\alpha) - f(y) + k \cdot |y-\alpha| \leqq 2k \cdot |y-\alpha| < \varepsilon$, т. е. $0 \leqq f(\alpha) - k\alpha < \varepsilon$. Тем самым мы показали, что для каждого $\varepsilon > 0$ имеет место $|f(\alpha) - k\alpha| < \varepsilon$, т. е. $f(\alpha) = k\alpha$. Пусть $x \in \langle \alpha, \infty)$. Тогда $f(x) \leqq f(\alpha) + |f(x) - f(\alpha)| \leqq f(\alpha) + k \cdot |x-\alpha| = k \cdot x = g(x)$. Значит, $\forall x \in \langle \alpha, \infty)$: $f(x) \leqq g(x)$. Это показывает, что функция $\min(f, g)$ удовлетворяет условиям утверждениа 2.16, в силу которого $\min(f, g) \in \mathcal{M}$.

б. Пусть $\alpha \notin R^+$. Тогда для каждого $x \in R^+$ справедливо $f(x) = |f(x) - f(0)| \leqq k \cdot |x-0| = kx = g(x)$; значит $\min(f, g) = f \in \mathcal{M}$.

2.18. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $f(x) = 2x$ для $x \in \langle 0, 1)$, $f(x) = 1 + 1\ x$ для $x \in \langle 1, \infty)$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, является непрерывной и не удовлетворяет условиям 1.1. 1.3.

2.19. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $f(0) = 0$, $f(x) = |x-1| + 1$ для $x > 0$. Тогда $f \in \mathcal{M}$, является разрывной и не удовлетворяет условиями 1.1, 1.3.

2.20. Пример. Пусть f: $R_0^+ \to R_0^+$, $g(x) = x$ для $x \in \langle 0, 2\rangle$, $g(x) = 1$ для $x \in (2, \infty)$. Тогда g удовлетворяет условиям 2.5. i $g \in \mathcal{M}$.

2.21. Утверждение. *Пусть $\{f_i\}_{i=1}^{\infty}$ — последовательность функций из $\mathcal{M}$, которая сходится. Пусть*

$$\forall \in R^+ : (\lim_{i \to \infty} f_i)(a) \neq 0. \text{ Тогда } \lim_{i \to \infty} f_i \in \mathcal{M}.$$

Доказательство. Пусть a, b, $c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$. Поскольку $\forall i \in N$: $f_i \in \mathcal{M}$, то $\forall i \in N$: $f_i(a) \leqq f_i(b) + f_i(c)$, и значит

$$(\lim_{i\to\infty} f_i)(a) = \lim_{i\to\infty} (f_i(a)) \leqq \lim_{i\to\infty} (f_i(b) + f_i(c)) =$$
$$= (\lim_{i\to\infty} f_i)(b) + (\lim_{i\to\infty} f_i)(c).$$

согласно 2.7. $\lim\limits_{i\to\infty} f_i \in \mathcal{M}$.

2.22. Следствие. *Пусть*

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i$$

ряд функций из $\mathcal{M}$, *сходящийстя к функции* f. *Тогда* $f \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Пусть $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность частичных сумм ряда

$$\sum_{i=1}^{\infty} f_i.$$

Согласно 2.11. $\forall i \in N$: $s_i \in \mathcal{M}$. Пусть $a \in R^+$, тогда $\forall i \in N$: $f_i(a) > 0$, откуда следует, что

$$\forall n \in N: s_n(a) = \sum_{i=1}^{n} f_i(a) \geqq f_1(a),$$

т. е.

$$f(a) = \lim_{i\to\infty} (s_n(a)) \geqq f_1(a) > 0.$$

Следовательно, согласно 2.21. $f \in \mathcal{M}$.

2.23. Утверждение. *Пусть* $\mathcal{L} \subset \mathcal{M}$, $\mathcal{L} \neq \emptyset$. *Пусть* $\forall x \in R^+$ *множество* $\mathcal{L}_x = \{f(x) : f \in \mathcal{L}\}$ *является ограниченным. Определим функцию* $\sup \mathcal{L}$: $R_0^+ \to R_0^+$, $(\sup \mathcal{L})(x) = \sup \mathcal{L}_x$. *Тогда* $\sup \mathcal{L} \in \mathcal{M}$.

Доказательство. Поскольку $\forall x \in R^+ : \mathcal{L}_x \subset R^+$, то $\sup \mathcal{L}_x > 0$, т. е. $\forall x \in R^+ : (\sup \mathcal{L})(x) = 0$. Отсюда следует, что $\forall a \in R_0^+ : (\sup \mathcal{L})(a) = 0 \Leftrightarrow a = 0$. Пусть $a, b, c \in R_0^+$, $|a-b| \leqq c \leqq a+b$, тогда $\forall f \in \mathcal{S}$: $f(a) \leqq f(b) + f(c) \leqq (\sup \mathcal{L})(b) + (\sup \mathcal{L})(c)$, т. е. $(\sup \mathcal{L})(a) \leqq (\sup \mathcal{L})(b) + (\sup \mathcal{L})(c)$. Согласно 2.7 $\sup \mathcal{L} \in \mathcal{M}$.

3. Отношение метрик ϱ, $f \circ \varrho$

3.1. Определение. *Пусть* (P, ϱ), (Q, σ) *являются метрическими пространствами. Пусть* $a \in P$.

Отображение $f{:}P\to Q$ называется $\varrho-\sigma$-непрерывным в точке a тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x\in P,\ \varrho(x,a)<\delta{:}\ \sigma(f(x),f(a))<\varepsilon.$$

Отображение $f{:}\ P\to Q$ называется $\varrho-\sigma$-непрерывным тогда и только тогда, когда $\varrho-\sigma$-непрерывно в каждой точке.

Отображение $f{:}\ P\to Q$ называется равномерно $\varrho-\sigma$-непрерывным тогда и только тогда, когда

$$\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in P,\ \varrho(x,y)<\delta{:}\ \sigma(f(x),f(y))<\varepsilon.$$

Пусть ϱ, σ — метрики на множестве M. Метрики ϱ, σ называются топологически эквивалентными (равномерно эквивалентными) тогда и только тогда, когда тождественное отображение $\mathrm{id}(M){:}\ M\to M$ является ϱ—σ-непрерывным и $\sigma-\varrho$-непрерывным (равномерно $\varrho-\sigma$-непрерывным и равномерно с — р-непрерывным). ([1], *стр.* 232).

3.2. Лемма. *Пусть (M,ϱ) является метрическим пространством. Пусть $f\in\mathcal{M}$ является непрерывной функцией. Тогда метрики ϱ, $f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $\varepsilon>0$. Из того, что функция f непрерывна в точке 0, следует $\exists\delta>0\ \forall x\in\langle 0,\delta){:}f(x)<\varepsilon$. Пусть $x,y\in M$, $\varrho(x,y)<\delta$. Тогда $f(\varrho(x,y))<\varepsilon$. Значит, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta>0\ \forall x,y\in M, \varrho(x,y)<\delta{:}\ (f\circ\varrho)(x,y)<\varepsilon$, т. е. отображение id $(M){:}\ M\to M$ является равномерно $\varrho-f\circ\varrho$-непрерывным. Пусть $\varepsilon>0$. Согласно 2.5 $\forall x\in R_0^+{:}\,2\varepsilon\ \leqq\ 2x\ \Rightarrow\ f(2\varepsilon)\ \leqq\ 2\cdot f(x)$. Положим $\delta=f(2\varepsilon)/2>0$, тогда $\forall x\in R_0^+{:}\ f(x)\ <\ \delta\ \Rightarrow x\ <\ \varepsilon$. Пусть $x,y\in M$, $(f\circ\varrho)(x,y)<\delta$, тогда $\varrho(x,y)<\varepsilon$. Значит, $\forall\varepsilon>0\ \exists\delta\ >\ 0\ \forall x,y\in M,\ (f\circ\varrho)(x,y)\ <\ \delta{:}\ \varrho(x,y)<\varepsilon$, т. е. отображение id $(M){:}\ M\to M$ является равномерно $f\circ\varrho-\varrho$-непрерывным. Поэтому метрики $\varrho, f\circ\varrho$ равномерно эквивалентны.

3.3. Теорема. *Пусть (M,ϱ) — метрическое пространство. Пусть существует предельная точка a множества M относительно метрики ϱ. Пусть $f\in\mathcal{M}$. Тогда метрики ϱ, $f\circ\varrho$ топологически эквивалентны тогда и только тогда, когда f непрерывна.*

Доказательство. Пусть метрики ϱ, $f\circ\varrho$ топологически эквивалентны. Пусть $\varepsilon>0$. Отображение id $(M){:}\ M\to M$ $\varrho-f\circ\varrho$-непрерывно, поэтому $\exists\delta>0\ \forall x\in M,\ \varrho(x,a)<\delta{:}\ (f\circ\varrho)\ (x,a)<\varepsilon$. Так как $\forall\varepsilon'>0\ \exists x\in M, x\neq a{:}\ \varrho(x,a)<\varepsilon'$, то положив $\varepsilon'=\delta$, получим $\exists x\in M, x\neq a{:}\ \varrho(x,a)<\delta$. Отсюда следует, что $\forall\varepsilon>0\ \exists y\in R^+{:}\ f(y)<\varepsilon$, то-есть согласно 2.9. функция f непрерывна. Если f непрерывна, то в силу 3.2 метрики $\varrho, f\circ\varrho$ топологически эквивалентны.

3.4. Теорема. *Пусть (M,ϱ) — метрическое пространство. Пусть не сущес-*

твует предельная точка множества M относительно метрики ϱ. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики $\varrho, f \circ \varrho$ топологически эквивалентны.

Доказательство. Пусть f разрывна. Согласно 2.10 $\exists \xi \in R^+ \forall y \in R^+$: $f(y) \geqq \xi$. Пусть $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Из условий теоремы следует, что $\exists \delta > 0 \ \forall z \in M$, $z \neq x$: $\varrho(x, z) \geqq \delta$. Это означает, что $\forall z \in M$, $\varrho(x, z) < \delta$: $x = z$, т. е. что $f(\varrho(x, z)) = 0 < \varepsilon$. Таким образом, $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f \circ \varrho)\ (x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение id (M): $M \to M$ $\varrho - f \circ \varrho$-непрерывно.

Пусть $x \in M$, $\varepsilon > 0$. Пусть $\delta < \xi$. Тогда $\forall y \in M$, $f(\varrho(x, y)) < \delta$: $\varrho(x, y) = 0 < \varepsilon$. Следовательно $\forall x \in M \ \forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall y \in M$, $(f \circ \varrho)\ (x, y) < \delta$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$, т. е. отображение id (M): $M \to M$ $f \circ \varrho - \varrho$-непрерывно, и поэтому метрики $\varrho, f \circ \varrho$ топологически эквивалентны. Если f непрерывна, то согласно 3.2 ϱ, $f \circ \varrho$ топологически эквивалентны.

3.5. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть $\forall \varepsilon > 0$ $\exists x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики ϱ, $f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны тогда и только тогда, когда f непрерывна.*

Доказательство. Пусть метрики ϱ, $f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны. Пусть $\varepsilon > 0$. Тогда $\exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f \circ \varrho)\ (x, y) < \varepsilon$. Поскольку $\exists x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) < \delta$, то $f(\varrho(x, y)) < \varepsilon$. Значит, $\forall \varepsilon > 0 \ \exists y \in R^+: f(y) < \varepsilon$, т. е. согласно 2.9. f непрерывна.

Если f непрерывна, то в силу 3.2 ϱ, $f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны.

3.6. Теорема. *Пусть (M, ϱ) — метрическое пространство. Пусть $\exists a > 0$ $\forall x, y \in M$, $x \neq y$: $\varrho(x, y) \geqq a$. Пусть $f \in \mathcal{M}$. Тогда метрики $\varrho, f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны.*

Доказательство. Пусть $f \in \mathcal{M}$ разрывна. Тогда согласно 2.10 $\exists \xi \in R^+ \ \forall x \in R^+: f(x) \geqq \xi$. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = a$. Тогда $\forall x, y \in M$: $\varrho(x, y) < \delta \Rightarrow x = y$, т. е. $f(\varrho(x, y)) = 0 < \varepsilon$. Поскольку $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $\varrho(x, y) < \delta$: $(f \circ \varrho)\ (x, y) < \varepsilon$, то отображение id (M) равномерно $\varrho - f \circ \varrho$-непрерывно. Пусть $\varepsilon > 0$. Положим $\delta = \xi/2$. Тогда $\forall x, y \in M$: $f(\varrho(x, y)) < \delta \Rightarrow \varrho(x, y) = 0 < \varepsilon$. Так как $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \forall x, y \in M$, $(f \circ \varrho)\ (x, y) < \delta$: $\varrho(x, y) < \varepsilon$, то отображение id (M): $M \to M$ равномерно $f \circ \varrho - \varrho$-непрерывно. Поэтому метрики $\varrho, f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны. Если f непрерывна, то согласно 3.2 $\varrho, f \circ \varrho$ равномерно эквивалентны.

3.7. Пример. Пусть $M = \{1/n \colon n \in N\}$, $\varrho(x, y) = |x - y| \ \forall x, y \in M$. Пусть $f \in \mathcal{M}$ разрывна. Согласно 3.4 $\varrho, f \circ \varrho$ топологически эквивалентны и согласно 3.5. не являются равномерно эквивалентными.

ЛИТЕРАТУРА

[1] JARNÍK, V.: Differenciální počet II. Academia, Praha 1976.
[2] KAPLANSKY, I.: Set theory and metric spaces. Allyn and Bacon, Boston 1972.
[3] КЕЛЛИ, И.Л.: Общая топология. Наука Москва 1968.
[4] NAGY, J.: Vybrané partie z moderní matematiky. SNTL, Praha 1976.

Поступило 3. 11 1978

Ян Борсик
Беланскя штврть 550/Б
033 01 Липтовский Хрядок

Йозеф Добош
966 54 Тековскэ Немце 261