Mathematica Slovaca

Milan Gera

Über die Untermengen der Lösungen der Gleichung $x''' + a(t)x" + b(t)x' + c(t)x = 0c(t) \geq 0$

Mathematica Slovaca, Vol. 30 (1980), No. 3, 313--326

Persistent URL: `http://dml.cz/dmlcz/136247`

Math. Slovaca 30, 1980, No. 3, 313—326

ÜBER DIE UNTERMENGEN DER LÖSUNGEN DER GLEICHUNG $x'''+a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=0 \quad c(t)\geqq 0$

MILAN GERA

In dieser Arbeit befassen wir uns mit der Dimension der Untermengen der Lösungen der Differentialgleichung dritter Ordnung

$$Lx \equiv x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0.$$

Ausserdem zeigen wir auch gewisse asymptotische Eigenschaften einiger Teilmengen der Lösungen dieser Gleichung. Weiterhin werden Bedingungen abgeleitet, unter welchen die nichtoszillatorische Differentialgleichung $Lx=0$ eine und nur eine Lösung $w(t)$ (bis auf die lineare Abhängigkeit) mit der Eigenschaft $w(t)w'(t)<0$ im Intervall $I: a<t<+\infty$besitzt. (In der folgenden Arbeit werden wir uns mit diesem Problem auch für die oszillatorische Differentialgleichung $Lx=0$ befassen.)

Über die Koeffizienten $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ der Gleichung $Lx=0$ setzen wir voraus, dass diese stetige Funktionen im Intervall I sind.

Bezeichnungen und Begriffe sind dieselben wie in [1, 2].

$\mathscr{S}^+(J)(\mathscr{S}^-(J))$ bedeutet die Menge nichtnegativer (nichtpositiver) und stetiger Funktionen im Intervall J;

$\mathscr{S}_0^+(J)(\mathscr{S}_0^-(J))$ bedeutet die Menge der Funktionen aus $\mathscr{S}^+(J)(\mathscr{S}^-(J))$, welche in keinem Teilintervall des Intervalls J identisch gleich Null sind;

$$E(t, \tau) = \exp \int_\tau^t a(\eta)\, \mathrm{d}\eta \quad \text{für} \quad (t, \tau) \in I \times I;$$

$$lv \equiv v'' + a(t)v' + b(t)v, \quad l^+v \equiv v'' + a(t)v' + b_+(t)v,$$

wo $b_+(t) = \max\{0, b(t)\}$ für $t \in I$ ist.

Ausserdem:

$\mathscr{D}(J)$ bedeutet die Menge diskonjugierter Differentialgleichungen im Intervall J;

$\mathscr{N}(J)$ bedeutet die Menge nichtoszillatorischer Differentialgleichungen im Intervall J;

$\mathscr{O}(J)$ bedeutet die Menge oszillatorischer Differentialgleichungen im Intervall J;

$l \in \mathscr{D}(J)$ bzw. $L \in \mathscr{O}(J)$ und ähnlich für die anderen Fälle, wo $J \subset I$ ist, bedeutet, dass die Differentialgleichung $lv=0$ diskonjugiert im Intervall J, bzw. die Differentialgleichung $Lx=0$ oszillatorisch in J ist;

$\mathscr{E}$ bedeutet die Menge aller nichttrivialen Lösungen der Differentialgleichung $Lx=0$ im Intervall I;

$$\mathscr{E}^- = \{w(t)\in\mathscr{E}\,|\,\forall_{t\in I} w(t)w'(t)<0\};$$

$$\mathscr{E}_0^- = \{w(t)\in\mathscr{E}^-\,|\,\lim_{t\to+\infty} w(t)=0\};$$

$$\mathscr{E}_1^- = \{w(t)\in\mathscr{E}^-\,|\,w(t)\notin\mathscr{E}_0^-\};$$

$$\mathscr{E}_2^- = \{w(t)\in\mathscr{E}^-\,|\,\forall_{t\in I} w(t)w''(t)>0\};$$

$$\mathscr{E}_1^+ = \{w(t)\in\mathscr{E}\,|\,\exists_{T\in I}\forall_{t\in(T,+\infty)} w(t)w'(t)>0\};$$

$$\mathscr{E}_2^+ = \{w(t)\in\mathscr{E}_1^+\,|\,\exists_{T_1\in[T,+\infty)}\forall_{t\in(T_1,+\infty)} w(t)w''(t)>0\};$$

$\mathscr{E}^0$ bedeutet die Menge aller oszillatorischen Lösungen der Differentialgleichung $Lx=0$ im Intervall I.

Es sei $\emptyset\neq\mathscr{F}\in\mathscr{E}$. $\tilde{\mathscr{F}}$ bedeute den Untervektorraum der Lösungen der Gleichung $Lx=0$ im Intervall I, der durch $\mathscr{F}$ erzeugt ist. Nun führen wir die *Dimension* der Untermenge $\mathscr{F}$ ein, wie folgt:

$$\dim\mathscr{F} := \dim\tilde{\mathscr{F}},$$

d.h. unter $\dim\mathscr{F}$ versteht man die maximale Anhzal von unabhängigen Lösungen von $\mathscr{F}$.

1. Es sei $l\in\mathscr{D}(I)$. Dann hat die Differentialgleichung $lv=0$ eine positive Lösung $v_0(t)$ in I [3] und es ist möglich die Differentialgleichung $Lx=0$ auf folgendes Differentialsystem

$$\begin{aligned} x_1' &= -v_0(t)x_2,\\ x_2' &= -v_0^{-2}(t)E(t_0,t)x_3,\\ x_3' &= -c(t)E(t,t_0)v_0(t)x_1 \end{aligned} \tag{S}$$

zu überführen, wo t_0 eine Zahl aus I ist und $x_1(t)=x(t)$, $x'(t) = -v_0(t)x_2(t)$, $x''(t) = (E(t_0,t)x_3(t) + v_0'(t)x'(t))/v_0(t)$ für $t\in I$ gilt.

Durch Anwendung der Theorie aus dem Kapitel XIV [3, Seite 591—596] auf das System (S) erhalten wir den

Satz 1. *Es sei $l\in\mathscr{D}(I)$ und $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$. Dann gilt $\mathscr{E}^-\neq\emptyset$. Wenn dabei darüber hinaus*

a) $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$ *gilt, so ist* $\mathscr{E}^-=\mathscr{E}_2^-$ $(\dim\mathscr{E}_2^-\leqq 2)$;

b) $L\in\mathscr{O}(I)$ *gilt, so ist* $\mathscr{E}=\mathscr{E}^-\cup\mathscr{E}^0$, $\dim\mathscr{E}^0=3$.

(Die Behauptungen a) und b) folgen aus den Ergebnissen des Artikels [1].)

Hilfssatz 1. *Es sei $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ und $(t_0,\tau_0)\in I\times I$. Dann ist für $w(t)\in\mathscr{E}_2^-$ das Integral*

$$\int_{t_0}^{+\infty} tw''(t)\,\mathrm{d}t \tag{1}$$

konvergent und

$$\lim_{t\to+\infty} tw'(t)=0, \quad \lim_{t\to+\infty} w''(t)E(t, t_0)\int_{\tau_0}^{t} sE(t_0, s)\,ds=0.$$

Beweis. Die Behauptungen, dass $\lim_{t\to+\infty} tw'(t)=0$ und das Integral (1) konvergent ist, folgen aus den Hilfssätzen 2 und 3 [4]. Wir zeigen, dass die letzte Behauptung gilt. Tatsächlich, aus der Gleichheit $Lw=0$ (mit Rücksicht auf die Voraussetzungen über die Koeffizienten $b(t)$, $c(t)$) erhalten wir, dass $w(t)\,(w''(t)\,E(t, t_0))'\in\mathcal{S}_0^-(I)$ ist. Ferner folgt aus der Konvergenz des Integrals (1): zu einer beliebigen Zahl $\varepsilon>0$ existiert eine solche Zahl $T\in I$, dass für alle $t>T$

$$\left|\int_T^t sw''(s)\,ds\right|<\varepsilon$$

gilt. Auf Grund des ersten Satzes über den Mittelwert der Integralrechnung haben wir

$$\int_T^t sw''(s)\,ds=\int_T^t sE(t_0, s)w''(s)E(s, t_0)\,ds=w''(\xi)E(\xi, t_0)\int_T^t sE(t_0, s)\,ds$$
$$(T\leqq\xi\leqq t).$$

Weil $w(t)(w''(t)E(t, t_0))'\in\mathcal{S}_0^-(I)$ ist, ist

$$\varepsilon>\left|\int_T^t sw''(s)\,ds\right|\geqq|w''(t)|E(t, t_0)\int_T^t sE(t_0, s)\,ds \quad \text{für} \quad t>T.$$

Daraus geht hervor, dass

$$\lim_{t\to+\infty} w''(t)E(t, t_0)\int_{\tau_0}^{t} sE(t_0, s)\,ds=0$$

ist.

Folgerung. *Es sei $b(t)\in\mathcal{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathcal{S}_0^+(I)$ und $t_0\in I$. Dann gilt für $w(t)\in\mathcal{E}_2^-$:*

a) $$\lim_{t\to+\infty} w''(t)E(t, t_0)=0;$$

b) $$\lim_{t\to+\infty} t^2w''(t)=0, \quad \textit{wenn} \quad a(t)\in\mathcal{S}^+((t_0, +\infty))$$

und

$$\lim_{t\to+\infty} t^2w''(t)E(t, t_0)=0 \quad \textit{wenn} \quad a(t)\in\mathcal{S}^-((t_0, +\infty)) \quad \textit{ist.}$$

Bemerkung 1. Der Satz 1 ergänzt den Satz 1 [1] und auch der Hilfssatz 1 den Satz 1′ aus [1].

Satz 2. *Es sei $a(t)\in\mathcal{S}^+(I)$, $b(t)\in C^1(I)$, $(2c(t)-b'(t)-a(t)b(t))\in\mathcal{S}^+(I)$ und es sei $(a(t)+2c(t)-b'(t)-a(t)b(t))\in\mathcal{S}_0^+(I)$. Dann existiert eine Lösung $w(t)$ der*

Differentialgleichung $Lx = 0$ ohne Nullstellen in I und für diese Lösung gilt

$$[2w(t)w''(t) - w'^2(t) + b(t)w^2(t)]E(t, t_0) = k_{t_0} + \int_t^{+\infty} a(s)E(s, t_0)w'^2(s)\,\mathrm{d}s +$$
$$+ \int_t^{+\infty} [2c(s) - b'(s) - a(s)b(s)]E(s, t_0)w^2(s)\,\mathrm{d}s$$

in I, wo $t_0 \in I$ und $k_{t_0} \in [0, +\infty)$ ist.

Wenn dabei $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ erfüllt ist, dann bekommt man $w(t) \in \mathscr{E}_2^-$, $w(t)w'''(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $k_{t_0} = 0$ und

$$\lim_{t\to+\infty} b(t)E(t, t_0)w^2(t) = \lim_{t\to+\infty} w'^2(t)E(t, t_0) = 0.$$

Wenn ausserdem

$$\liminf_{t\to+\infty} b(t)E(t, t_0) < 0$$

oder

$$\int_{t_0}^{+\infty} [2c(s) - b'(s) - a(s)b(s)]E(s, t_0)\,\mathrm{d}s = +\infty$$

gilt, dann ist $w(t) \in \mathscr{E}_0^-$.

Der Beweis dieses Satzes kann auf dieselbe Weise wie in [5, Seite 270—271] oder in [6, Seite 381—385; 7, Seite 458—459] durchgeführt werden.

Satz 3. *Es seien γ, λ irgendwelche Zahlen aus dem Intervall I. Es sei $c(t) \in \mathscr{S}^+(I)$ und die Integrale*

$$\int_\gamma^{+\infty} b_+(t) \left(\int_\lambda^t E(t, s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t, \tag{2}$$

$$\int_\gamma^{+\infty} c(t) \left(\int_\lambda^t (t-s)E(t, s)\,\mathrm{d}s\right) \mathrm{d}t \tag{3}$$

seien konvergent. Dann ist $L \in \mathscr{N}(I)$.

B e w e i s. Zuerst zeigen wir, dass unter den gegebenen Voraussetzungen die Differentialgleichung dritter Ordnung

$$L^+x \equiv x''' + a(t)x'' + b_+(t)x' + c(t)x = 0$$

in irgendeinem Intervall $[t_0, +\infty) \subset I$ diskonjugiert ist. Laut Satz 1 [8] genügt es die Existenz einer solchen Zahl $t_0 \in I$ zu zeigen, dass die Lösung $y(t)$ der Differentialgleichung $L^+x = 0$, welche in der Zahl t_0 den Anfangsbedingungen

$$y(t_0) = y'(t_0) = 0, \quad y''(t_0) = 1$$

entspricht, zusammen mit ihrer ersten Ableitung in $(t_0, +\infty)$ positiv ist. Wir zeigen, dass eine solche Zahl t_0 existiert. Zu diesem Zweck untersuchen wir die Funktion

$$Y(t)=y''(t)E(t,t_0), \quad t\geqq t_0>\alpha.$$

Diese Funktion ist die Lösung der Integralgleichung

$$Y(t)=1+\int_{t_0}^{t} R(t,s)Y(s)\,ds,$$

wo

$$R(t,s)=-\int_s^t [b_+(\xi)+(\xi-s)c(\xi)]E(\xi,s)\,d\xi$$

ist. Da $c(t)\in\mathscr{S}^+(I)$, $b_+(t)\in\mathscr{S}^+(I)$ gilt, ist $R(t,s)\leqq 0$ für $t\geqq s\geqq t_0$.

Wählen wir die Zahl $t_0\in I$ $(t_0>0)$ so, dass

$$q_{t_0}=\int_{t_0}^{+\infty}\left[b_+(\xi)\int_{t_0}^{\xi}E(\xi,s)\,ds+c(\xi)\int_{t_0}^{\xi}(\xi-s)E(\xi,s)\,ds\right]d\xi<1$$

gilt. (Diese Wahl ist möglich, weil die Integrale (2), (3) konvergent sind.) Dann gilt

$$1+\int_{t_0}^{t}R(t,s)\,ds=1-\int_{t_0}^{t}\left(\int_s^t[b_+(\xi)+(\xi-s)c(\xi)]E(\xi,s)\,d\xi\right)ds=$$

$$=1-\int_{t_0}^{t}\left[b_+(\xi)\int_{t_0}^{\xi}E(\xi,s)\,ds+c(\xi)\int_{t_0}^{\xi}(\xi-s)E(\xi,s)\,ds\right]d\xi\geqq 1-q_{t_0}>0$$

für $t\geqq t_0$.

Aus diesen Gründen ist laut Hilfssatz 2 [8] $Y(t)>0$ in $[t_0,+\infty)$ und also ist $y''(t)>0$ in $[t_0,+\infty)$. Für $y(t)$ und $y'(t)$ bekommen wir dann

$$y'(t)>0, \quad y(t)>0, \quad t>t_0.$$

Es sei $b_-(t)=b(t)-b_+(t)$ für $t\in I$. Weil

$$Ly=L^+y+b_-(t)y'(t)=b_-(t)y'(t)\leqq 0 \quad \text{für} \quad t>t_0$$

ist, ist $L\in\mathscr{D}([t_0,+\infty))$ ([9], Folgerung 1′ des Satzes 2). Das bedeutet aber, dass $L\in\mathscr{N}(I)$ ist.

Nehmen wir noch zur Kenntniss, dass wenn $c(t)\equiv 0$ in I gilt, dann ist $l^+y'=0$ in I. Da $y'(t)>0$ in $(t_0,+\infty)$ ist, ist $l^+\in\mathscr{D}((t_0,+\infty))$. Aus dem Sturmschen Vergleichssatz [3] folgt, dass auch $l\in\mathscr{D}((t_0,+\infty))$ ist.

Also gilt: *Es sei $(\gamma,\lambda)\in I\times I$ und es sei*

$$\int_{\gamma}^{+\infty}b_+(t)\left(\int_{\lambda}^{t}E(t,s)\,ds\right)dt<+\infty.$$

Dann ist $l\in\mathscr{N}(I)$ $(l^+\in\mathscr{N}(I))$.

Bemerkung 2. Der Satz 3 verallgemeinert den Satz 4 aus [8].

Satz 4. *Es sei $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ und es sei*

$$\int_{t_0}^{+\infty} c(t)\left(\int_{t_0}^{t} sE(t,s)\,\mathrm{d}s\right)\mathrm{d}t=+\infty \quad (t_0\in I). \tag{4}$$

Dann gilt $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$.

Beweis. Da gemäss Satz 1 $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}^-=\mathscr{E}_0^-\cup\mathscr{E}_1^-$ gilt, genügt es zu zeigen, dass $\mathscr{E}_1^-=\emptyset$ ist. Indirekt. Es sei $\mathscr{E}_1^-\neq\emptyset$ und es sei $w(t)\in\mathscr{E}_1^-$. Aus der Gleichung $Lw=0$ erhalten wir nach dem multiplizieren

$$E(t,t_0)\int_{t_0}^{t} sE(t_0,s)\,\mathrm{d}s$$

und nach Integration von t_0 bis t $(t\geqq t_0)$

$$\int_{t_0}^{t} b(s)E(s,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}\xi E(t_0,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)w'(s)\,\mathrm{d}s$$
$$+\int_{t_0}^{t} c(s)E(s,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}\xi E(t_0,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)w(s)\,\mathrm{d}s=$$
$$=-\int_{t_0}^{t}(w''(s)E(s,t_0))'\left(\int_{t_0}^{s}\xi E(t_0,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s=$$
$$=-w''(t)E(t,t_0)\int_{t_0}^{t} sE(t_0,s)\,\mathrm{d}s+\int_{t_0}^{t} sw''(s)\,\mathrm{d}s.$$

Daraus erhalten wir, mit Rücksicht auf die Eigenschaften der Funktion $b(t)$, $c(t)$, $w(t)$ und des Hilfssatzes 1, dass das Integral

$$\int_{t_0}^{+\infty} c(s)E(s,t_0)\left(\int_{t_0}^{s}\xi E(t_0,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)w(s)\,\mathrm{d}s$$

konvergent ist. Da $\lim\limits_{t\to+\infty} w(t)\neq 0$ ist, ist das Integral

$$\int_{t_0}^{+\infty} c(s)\left(\int_{t_0}^{s}\xi E(s,\xi)\,\mathrm{d}\xi\right)\mathrm{d}s$$

konvergent. Das steht aber im Widerspruch mit (4). Damit wurde gezeigt, dass $\mathscr{E}_1^-=\emptyset$ gilt und also $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$ ist.

Satz 5. *Es sei $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ und es sei*

$$\limsup_{t\to+\infty} b(t)E(t,t_0)\int_{t_0}^{t} sE(t_0,s)\,\mathrm{d}s<0 \quad (t_0\in I). \tag{5}$$

Wenn $L\in\mathscr{O}(I)$ gilt, dann ist $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$.

Beweis. Es sei $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$ und es sei $w(t) \in \mathscr{E}_1^-$, $w(t)>0$ in I. Setzen wir

$$y(t)=w(t)\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{w^2(s)}, \quad t>t_0>\alpha.$$

Dann ist

$$y'(t)=\frac{1}{w(t)}+w'(t)\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{w^2(s)}.$$

Es sei $\lim_{t\to+\infty} w(t)=k$ $(k\in(0, +\infty))$. Weil

$$\lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t}\int_{t_0}^{t} \frac{ds}{w^2(s)}=\frac{1}{k^2}$$

gilt und gemäss Hilfssatz 1

$$\lim_{t\to+\infty} tw'(t)=0$$

ist, erhalten wir

$$\lim_{t\to+\infty} y'(t)=\frac{1}{k}>0.$$

Also existiert eine solche Zahl T_0 $(T_0 \geqq t_0)$, dass $y'(t)>0$ in $(T_0, +\infty)$ ist.

Ferner gilt

$$Ly=\frac{b(t)}{w(t)}+\frac{w''(t)}{w^2(t)}=$$

$$=\frac{E(t_0, t)}{w(t)\int_{t_0}^{t} sE(t_0, s)\,ds}\left[b(t)E(t, t_0)\int_{t_0}^{t} sE(t_0, s)\,ds+\frac{w''(t)E(t, t_0)}{w(t)}\int_{t_0}^{t} sE(t_0, s)\,ds\right]$$

für $t>T_0$. Aus der Bedingung (5) und dem Hilfssatz 1 erhalten wir daraus, dass $Ly \leqq 0$ in $(T, +\infty)$ für irgendein $T \geqq T_0$ gilt. Weil $y(t)>0$, $y'(t)>0$ in $(T, +\infty)$ und $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$ ist, ist laut Folgerung 1' des Satzes 2 [9] $L\in\mathscr{D}([T, +\infty))$ und also ist $L\in\mathscr{N}(I)$. Damit wurde gezeigt, dass $\mathscr{E}_1^-\neq\emptyset \Rightarrow L\in\mathscr{N}(I)$ gilt. Also für $L\in\mathscr{O}(I)$ ist $\mathscr{E}_1^-=\emptyset$. Aus dem Satz 1 folgt dann, dass $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$ gilt.

Satz 6. *Es sei $b(t)\in\mathscr{S}^-(I)$, $c(t)\in\mathscr{S}_0^+(I)$,*

$$\liminf_{t\to+\infty} ta(t)>1 \tag{6}$$

und es sei $L\in\mathscr{O}(I)$. Dann gilt $\mathscr{E}_2^-=\mathscr{E}_0^-$.

Beweis. Es sei $\mathscr{E}_1^-\neq\emptyset$ und es sei $w(t)\in\mathscr{E}_1^-$. Wir können $w(t)>0$ für $t\in I$ annehmen. Bezeichnen wir

$$\bar{F}v\equiv v''+\left(a(t)-\frac{w'(t)}{w(t)}\right)v'+\left(b(t)+\frac{w''(t)}{w(t)}\right)v.$$

Aus der Bedingung (6) folgt: Es existiert eine solche Zahl $\alpha \in (0, 1)$ und $T_0 \in I$ ($T_0 > 0$), dass $ta(t) > 1 + 2\alpha$ für $t > T_0$ gilt. Also ist $a(t) > 0$ in $(T_0, +\infty)$. Setzen wir

$$y(t) = t^{-\alpha} + w'(t), \quad t > T_0.$$

Weil $\lim_{t \to +\infty} tw'(t) = 0$ ist (Hilfssatz 1), existiert $T \geqq T_0$, dass $y(t) > 0$ in $(T, +\infty)$ ist.

Wir zeigen, dass die Differentialgleichung $\bar{F}v = 0$ in einer gewissen Umgebung des Punktes $+\infty$ diskonjugiert ist. Tatsächlich gilt

$$\bar{F}y = -c(t)w(t) + t^{-\alpha}b(t) + \alpha t^{-1-\alpha} \frac{w'(t)}{w(t)} +$$

$$+ \alpha t^{-2-\alpha} \left[1 + \alpha - ta(t) + \frac{t^2}{\alpha} \frac{w''(t)}{w(t)}\right] \quad \text{für} \quad t > T.$$

Weil $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $ta(t) > 1 + 2\alpha > 0$ in $(T, +\infty)$ ($\lim_{t \to +\infty} w(t) = k \in (0, +\infty)$) und

$$\lim_{t \to +\infty} t^2 w''(t) = 0$$

gilt (Folgerung des Hilfssatzes 1), ist $\bar{F}y \leqq 0$ in irgendeinem Intervall $(T_1, +\infty) \subset \subset (T, +\infty)$. Aus diesem Grunde ist $\bar{F} \in \mathscr{D}([T_1, +\infty))$ ([9], Hilfssatz 2). Auf Grund des Hilfssatzes 3′ und der Bemerkung 5 [9] ist deshalb auch $L \in \mathscr{D}([T_1, +\infty))$ und also ist $L \in \mathscr{N}(I)$. Dies steht aber im Widerspruch mit der Voraussetzung $L \in \mathscr{O}(I)$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathscr{E}_1^- = \emptyset$ gilt. Aus dem Satz 1 folgt, das dann $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$ ist.

Beispiel 1. Es sei

$$a(t) = \frac{1}{t}, \quad b(t) = 0, \quad c(t) = \frac{12 + 8 \ln t + 2 \ln^2 t}{(2 + \ln t) t^3 \ln^3 t}, \; t \in I = (1, +\infty).$$

Dann hat die Differentialgleichung $Lx = 0$ die Lösung

$$w(t) = 1 + \frac{2}{\ln t}, \quad t \in I.$$

Dabei ist $w(t) \in \mathscr{E}_1^-$, $\liminf_{t \to +\infty} ta(t) = 1$ und $L \in \mathscr{O}(I)$ ([2], Satz 2).

Aus diesem Beispiel ist ersichtlich, dass die Bedingung (6) im Satz 6 im allgemeinen nicht geschwächt werden kann.

Satz 7. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und es existiere eine solche positive Zahl M, dass*

$$\frac{\int_{\tau_0}^{t} (t-s)E(t_0, s)\,\mathrm{d}s}{\int_{\tau_0}^{t} sE(t_0, s)\,\mathrm{d}s} \leqq M \quad \text{für} \quad t \geqq T > \tau_0 \tag{7}$$

gilt, wo τ_0, t_0 irgendwelche Zahlen aus dem Intervall I sind. Wenn $L \in \mathcal{O}(I)$ gilt, dann ist $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$.

Beweis. Es sei $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$. Dann erhalten wir aus dem Satz 4, dass das Integral

$$H = \int_T^{+\infty} c(t) \left(\int_{\tau_0}^{t} sE(t, s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t$$

konvergent ist. Aus dieser Tatsache haben wir auf Grund (7)

$$MH \geqq \int_T^{+\infty} c(t) \left(\int_{\tau_0}^{t} (t-s)E(t, s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t.$$

Das heisst, dass auch das Integral (3) konvergent ist. Da $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ gilt, ist das Integral (2) ebenfalls konvergent. Gemäss Satz 3 ist deshalb $L \in \mathscr{N}(I)$. Damit wurde gezeigt, dass wenn $L \in \mathcal{O}(I)$ gilt, dann ist $\mathscr{E}_1^- = \emptyset$. Auf Grund des Satzes 1 ist dann $\mathscr{E}_2^- = \mathscr{E}_0^-$.

Bemerkung 3. a) Wenn (7) gilt, dann ist

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} sE(t_0, s)\,\mathrm{d}s = +\infty.$$

b) Wenn $a(t) \in \mathscr{S}^-(I)$ oder das Integral

$$\int_{t_0}^{t} a(\eta)\,\mathrm{d}\eta \quad (t_0 \in I)$$

eine begrenzte Funktion in $(t_0, +\infty)$ ist, dann gilt (7).

Bemerkung 4. Aus dem Satz 7 erhalten wir, im Falle, dass $a(t) \equiv 0$ in I gilt, den Satz 6 aus [4].

Die Sätze 5—7 können auf folgende Weise umformuliert werden:

Satz 8. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und es sei eine der Bedingungen (5), (6), (7) erfüllt. Wenn $\mathscr{E}_1^- \neq \emptyset$ ist, dann gilt $L \in \mathscr{N}(I)$.*

2. Satz 9. *Es sei $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \notin \mathscr{S}^+(I)$, $l^+ \in \mathscr{D}(I)$, $L \in \mathscr{N}(I)$ und es sei*

$$\int_{\tau_0}^{+\infty} E(\tau_0, s)\,\mathrm{d}s = +\infty \quad (\tau_0 \in I), \tag{E}$$

wenn $b(t) \notin \mathscr{S}^-(I)$ gilt. Dann gilt $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$, $\mathscr{E}_1^+ \neq \emptyset$ und $\mathscr{E} = \mathscr{E}_0^- \cup \mathscr{E}_1^- \cup \mathscr{E}_1^+$. Dabei ist $\dim \mathscr{E}^- \leqq 2$, $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$, $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$. *Ausserdem gilt*

$$\dim \mathscr{E}_1^- = 2 \Rightarrow \dim \mathscr{E}_0^- = 1$$

und

$$\dim \mathscr{E}_1^- = 1 \Leftrightarrow \mathscr{E}_0^- = \emptyset.$$

Beweis. Aus dem Satz 1 folgt, dass $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$ ist. Es sei $y(t) \in \mathscr{E} - \mathscr{E}^-$. Dann existiert eine solche Zahl $\tau \in I$, dass $y(\tau)y'(\tau) \geqq 0$ ist. Gemäss Hilfssatz 7 [1] ($L \in \mathscr{N}(I)$) ist deshalb $y(t) \in \mathscr{E}_1^+$. Damit haben wir gezeigt, dass $\mathscr{E}_1^+ \neq \emptyset$ und $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_1^+$ ist. Jetzt werden wir zeigen, dass $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$. Es seien $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ Lösungen der Differentialgleichung $Lx = 0$, welche in der Zahl $t_0 \in I$ den Anfangsbedingungen

$$\begin{aligned} x_1(t_0) &= x_1'(t_0) = 0, \quad x_1''(t_0) = 1, \\ x_2(t_0) &= x_2''(t_0) = 0, \quad x_2'(t_0) = 1, \\ x_3'(t_0) &= x_3''(t_0) = 0, \quad x_3(t_0) = 1 \end{aligned}$$

entsprechen. Auf Grund des Hilfssatzes 7 [1] sind $x_1(t)$, $x_2(t)$, $x_3(t)$ aus $\mathscr{E}_1^+$. Ersichtlich sind $x_1(t), x_2(t), x_3(t)$ in I linear unabhängig und also ist $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$.

Jetzt zeigen wir, dass $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$ gilt. Indirekt. Es sei $\dim \mathscr{E}_0^- \geqq 2$ und es seien $w_0(t), w_1(t) \in \mathscr{E}_0^-$ linear unabhängig in I. Es sei $\xi \in I$ und es sei

$$z(t) = w_0(t) - \frac{w_0(\xi)}{w_1(\xi)} w_1(t), \quad t \in I.$$

Dann ist $\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0$. Weil $z(\xi) = 0$ ($\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_1^+$) gilt, ist $z(t) \in \mathscr{E}_1^+$ und also gilt $\lim_{t \to +\infty} z(t) \neq \emptyset$. Das ist aber ein Widerspruch mit der Tatsache, dass $\lim_{t \to +\infty} z(t) = 0$ gilt. Also ist $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$.

$\dim \mathscr{E}^- \leqq 2$. Indirekt. Es sei $\dim \mathscr{E}^- = 3$. $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ aus $\mathscr{E}^-$ seien linear unabhängig in I und es sei $k_i = \lim_{t \to +\infty} w_i(t)$ ($k_i \in (-\infty, +\infty)$), $i = 1, 2, 3$. Da $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$ ist, können wir ohne Einschränkung der Allgemeinheit voraussetzen, dass $w_1(t), w_2(t), w_3(t)$ aus $\mathscr{E}_1^-$ sind, d.h. $k_1 k_2 k_3 \neq 0$ gilt. Es sei $y_1(t) = k_2 w_1(t) - k_1 w_2(t)$, $y_2(t) = k_3 w_2(t) - k_2 w_3(t)$ für $t \in I$. Dann sind $y_1(t)$, $y_2(t)$ linear unabhängig in I und sind aus $\mathscr{E}_0^-$($\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_1^+$; $\lim_{t \to +\infty} y_i(t) = 0$, $i = 1, 2$), d.h. $\dim \mathscr{E}_0^- = 2$ gilt, was ein Widerspruch damit ist, dass $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$ gilt. Dieser Widerspruch beweist, dass $\dim \mathscr{E}^- \leqq 2$ ist.

Es sei $\dim \mathscr{E}_1^- = 2$ und es seien $w_1(t), w_2(t) \in \mathscr{E}_1^-$ linear unabhängig in I und $\lim_{t \to +\infty} w_1(t) = k_1$, $\lim_{t \to +\infty} w_2(t) = k_2$. Dann ist $k_2 w_1(t) - k_1 w_2(t)$ aus $\mathscr{E}_0^-$, also gilt $\mathscr{E}_0^- \neq \emptyset$ und gemäss dem oben Bewiesenen ist $\dim \mathscr{E}_0^- = 1$. Aus dieser Tatsache folgt auch: wenn $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$ gilt, dann ist $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$ ($\mathscr{E}_1^- = \mathscr{E}^- \neq \emptyset$).

Es bleibt noch zu zeigen, dass wenn $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$ gilt, dass dann $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$ ist. Es sei

$\mathscr{E}_0^- \neq \emptyset$ und es sei $w_1(t) \in \mathscr{E}_1^-$, $w_0(t) \in \mathscr{E}_0^-$. Dabei sei $w_1(t) > 0$, $w_0(t) > 0$ in I. Dann ist $w_0(t) + w_1(t)$ aus $\mathscr{E}_1^-$ und $w_1(t)$, $w_0(t) + w_1(t)$ sind linear unabhängig in I, d.h. $\dim \mathscr{E}_1^- = 2$ gilt. Das steht im Widerspruch zu unserer Voraussetzung $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$, also gilt $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$. Der Satz ist bewiesen.

Aus diesem Satz und dem Satz 1 (Satz 2) bekommen wir:

Folgerung 1. *Es seien $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und $L \in \mathscr{N}(I)$. Dann gilt $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}_1^+$ und $1 \leqq \dim \mathscr{E}_2^- \leqq 2$, $\dim \mathscr{E}_0^- \leqq 1$, $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$.*

Folgerung 1'. *Es sei $a(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^-(I) \cap C^1(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $(2c(t) - b'(t) - a(t)b(t)) \in \mathscr{S}^+(I)$, $(a(t) + 2c(t) - b'(t) - a(t)b(t)) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und es gelte*

$$\liminf_{t \to +\infty} b(t)E(t, t_0) < 0$$

oder

$$\int_{t_0}^{+\infty} [2c(s) - b'(s) - a(s)b(s)]E(s, t_0)\,\mathrm{d}s = +\infty,$$

wo t_0 irgendeine Zahl aus I ist. Wenn $L \in \mathscr{N}(I)$ ist, dann gilt

$$\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}_1^+ \ (\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_2^-) \quad \textit{und} \quad \dim \mathscr{E}_0^- = 1, \quad \dim \mathscr{E}_1^+ = 3.$$

Weiterhin erhalten wir aus der Folgerung 1 und dem Satz 4 die

Folgerung 2. *Es sei $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$,*

$$\int_{t_0}^{+\infty} c(t) \left(\int_{t_0}^{t} sE(t, s)\,\mathrm{d}s \right) \mathrm{d}t = +\infty \quad (t_0 \in I)$$

und es sei $L \in \mathscr{N}(I)$. Dann gilt: $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}_1^+$, $\mathscr{E}_0^- = \mathscr{E}_2^-$ und $\dim \mathscr{E}_0^- = 1$ ($\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$).

Beispiel 2. Es sei

$$a(t) = 0, \quad b(t) = \frac{3 + 3\mathrm{e}^{-t} - t}{t - 1 - \mathrm{e}^{-t}}, \quad c(t) = \frac{2\mathrm{e}^{-t}}{t - 1 - \mathrm{e}^{-t}}, \quad t \in I = (4, +\infty).$$

Die Differentialgleichung $Lx = 0$ hat dann die Lösungen

$$w_0(t) = t\mathrm{e}^{-t}, \quad w_1(t) = 1 + \mathrm{e}^{-t}, \quad t \in I.$$

Dabei ist $w_0(t) \in \mathscr{E}_0^-$, $w_1(t) \in \mathscr{E}_1^-$ $(\mathscr{E}^- = \mathscr{E}_2^-)$. Gemäss Satz 3 (oder Satz 8) ist $L \in \mathscr{N}(I)$. Ferner ist auf Grund der Folgerung 1 des Satzes 9 $\dim \mathscr{E}_0^- = 1$ ($\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$), $\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}_1^+$. Die Lösung $w_1(t) - w_0(t)$ ist aus der Menge $\mathscr{E}_1^+$.

Beispiel 3. Es sei

$$a(t) = \frac{3}{t^3 + 3t}, \quad b(t) = -\frac{6}{t^3 + 3t^2}, \quad c(t) = \frac{6}{t^4 + 3t^3}, \quad t \in I = (0, +\infty).$$

Die Differentialgleichung $Lx=0$ hat dann ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$1+\frac{1}{t}, \quad t, \quad t^2, \quad t \in I.$$

Dabei ist $\mathscr{E}_0^- = \emptyset$, $\dim \mathscr{E}_1^- = 1$ ($L \in \mathscr{N}(I)$, $\mathscr{E}_1^- = \mathscr{E}_2^-$).

Beispiel 4. Es sei

$$a(t)=0, \quad b(t)=\frac{2}{3t^2}\,\frac{1-2t}{1+t}, \quad c(t)=\frac{56t^2-14t-16}{27t^3(1+t)^2},$$

$t \in I = (1, +\infty)$. Dann hat die Differentialgleichung $Lx=0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$t^{7/3}+t^{4/3}, \quad t^{4/3}+t^{1/3}, \quad t^{7/3}+2t^{7/3}\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right), \quad t \in I.$$

Weil $b(t) \in \mathscr{S}^-(I)$, $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$ und

$$\int_2^{+\infty} t^2 c(t)\,\mathrm{d}t = +\infty$$

ist, ist auf Grund der Folgerung 2 des Satzes 9 $\dim \mathscr{E}_0^- = 1$ ($\mathscr{E} = \mathscr{E}_2^- \cup \mathscr{E}_1^+$, $\mathscr{E}_0^- = \mathscr{E}_2^-$, $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$). Dabei ist die Lösung

$$t^{7/3}\left[\frac{2}{t}+\frac{1}{t^2}-2\left(1+\frac{1}{t}\right)\ln\left(1+\frac{1}{t}\right)\right], \quad t \in I$$

aus $\mathscr{E}_0^-$.

Satz 10. *Es sei* $c(t) \in \mathscr{S}_0^+(I)$, $b(t) \in \mathscr{S}^+(I)$, $l \in \mathscr{D}(I)$, $L \in \mathscr{N}(I)$ *und es gelte* (E). *Dann gilt:* $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$, $\mathscr{E}_2^+ = \mathscr{E}_1^+$, $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_2^+$ *und* $\dim \mathscr{E}^- = 1$, $\dim \mathscr{E}_2^+ = 3$.

Beweis. $\mathscr{E}^- \neq \emptyset$ garantiert der Satz 1. Es sei $y(t) \in \mathscr{E}$ und es sei $y(t) \notin \mathscr{E}^-$. Dann existiert ein solches $\tau \in I$, dass $y(\tau)y'(\tau) \geqq 0$ gilt. Auf Grund des Hilfssatzes 7 aus [1] ($L \in \mathscr{N}(I)$) ist deshalb $y(t) \in \mathscr{E}_1^+$ und gemäss Folgerung 2 des Satzes 3 [2] ist dann $y(t) \in \mathscr{E}_2^+$. Damit ist gezeigt worden, dass $\mathscr{E}_1^+ = \mathscr{E}_2^+$ und $\mathscr{E} = \mathscr{E}^- \cup \mathscr{E}_2^+$ gilt.

Den Beweis, dass $\dim \mathscr{E}_1^+ = 3$ gilt, ist es möglich auf dieselbe Art durchzuführen wie im Beweis des Satzes 9.

Nun zeigen wir, dass $\dim \mathscr{E}^- = 1$ gilt. Es sei $\dim \mathscr{E}^- \geqq 2$ und es seien $w_1(t)$, $w_2(t)$ aus $\mathscr{E}^-$ linear unabhängig in I. Es seien $\lim_{t\to+\infty} w_1(t) = k_1$, $\lim_{t\to+\infty} w_2(t) = k_2$ und $\xi \in I$. Für

$$z(t) = w_1(t) - \frac{w_1(\xi)}{w_2(\xi)}\,w_2(t) \quad (t \in I)$$

gilt dann

$$\lim_{t\to+\infty} z(t) = k_1 - \frac{w_1(\xi)}{w_2(\xi)}\,k_2. \tag{8}$$

Andererseits, weil $z(\xi)=0$ ($\mathscr{E}=\mathscr{E}^{-}\cup\mathscr{E}_{2}^{+}$) gilt, ist $z(t)\in\mathscr{E}_{2}^{+}$. Aus diesem Grunde ist

$$\lim_{t\to+\infty}|z(t)|=+\infty.$$

Das steht im Widerspruch mit (8). Damit wurde gezeigt, dass $\dim\mathscr{E}^{-}=1$ gilt.

Der Satz ist bewiesen.

Bemerkung 5. Wenn wir im Satz 10 die Voraussetzung (E) weglassen, dann kann die Behauptung des Satzes (was $\dim\mathscr{E}^{-}$ anbelangt) gelten oder nicht.

Wenn zum Beispiel

a) $$a(t)=\frac{3}{t},\quad b(t)=\frac{1}{4t^2},\quad c(t)=\frac{1}{4t^3},\quad t\in I=(0,+\infty)$$

gilt, dann hat die Differentialgleichung $Lx=0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$\frac{1}{t},\quad t,\quad t\ln t,\quad t\in I.$$

Dabei ist $\mathscr{E}^{-}=\mathscr{E}_{0}^{-}$ und $\dim\mathscr{E}^{-}=1$;

b) $$a(t)=9,\quad b(t)=20,\quad c(t)=12,\quad t\in I=(-\infty,+\infty)$$

gilt, dann hat die Differentialgleichung $Lx=0$ ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$e^{-t},\quad e^{-2t},\quad e^{-6t}$$

und $\dim\mathscr{E}^{-}=3$.

LITERATUR

[1] GERA, M.: Über einige Eigenschaften der Lösungen der Gleichung $x'''+a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=0$, $c(t)\geqq 0$. Mat. Čas., 24, 1974, 357—370.

[2] GERA, M.: Bedingungen für die Existenz oszillatorischer Lösungen der Gleichung $x'''+a(t)x''+b(t)x'+c(t)x=0$, $c(t)\geqq 0$. Mat. Čas., 25, 1975, 23—40.

[3] ХАРТМАН, Ф.: Обыкновенные дифференциальные уравнения. Москва 1970 (перевод с английского).

[4] JONES, G. D.: An asymptotic property of solutions $y'''+p(x)y'+q(x)y=0$. Pac. J. Math., 47, № 1, 1973, 135—138.

[5] GREGUŠ, M.: Über die lineare homogene Differentialgleichung dritter Ordnung. Wiss. Z. Univ. Halle, Math.-Nat., XII/3, 1963, 265—286.

[6] ŠVEC, M.: Einige asymptotische und oszillatorische Eigenschaften der Differentialgleichung $y'''+A(x)y'+B(x)y=0$. Czech. mat. J., T. 15(90), 1965, 378—393.

[7] LAZER, A. C.: The behavior of solutions of the differential equation $y'''+p(x)y'+q(x)y=0$. Pac. J. Math., 17, 1966, 435—466.

[8] GERA, M.: Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung. Mat. Čas., 21, 1971, 65—80.

[9] GERA, M.: Nichtoszillatorische und oszillatorische Differentialgleichungen dritter Ordnung. Čas. pěstov. Mat., 96, 1971, 278—293.

[10] GERA, M.: Allgemeine Bedingungen der Nicht-oszillationsfähigkeit und der Oszillationsfähigkeit für die lineare Differentialgleichung dritter Ordnung $y''' + p_1(x)y'' + p_2(x)y' + p_3(x)y = 0$. Mat. Čas., 20, 1970, 49—61.

Eingegangen am 29. 9. 1978

Katedra matematickej analýzy PFUK
Pavilón matematiky, Mlynská dolina
816 31 Bratislava

О ПОДМНОЖЕСТВАХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ $x''' + a(t)x'' + b(t)x' + c(t)x = 0$, $c(t) \geqq 0$

Милан Гера

Резюме

В работе приведены условия для размерности подмножеств неосцилляционных решений линейного дифференциального уравнения третьего порядка. Кроме того исследуется поведение этих решений при $t \to +\infty$.