Mathematica Slovaca

Ondrej Dreveňák

Лексикографическое σ-произведение структурно упорядоченных $F\Omega$-групп

Mathematica Slovaca, Vol. 30 (1980), No. 1, 31--50

Persistent URL: http://dml.cz/dmlcz/136227

Math. Slovaca 30, 1980, No. 1, 31—50

ЛЕКСИКОГРАФИЧЕСКОЕ σ-ПРОИЗВЕДЕНИЕ СТРУКТУРНО УПОРЯДОЧЕННЫХ $F\Omega$-ГРУПП

ОНДРЕЙ ДРЕВЕНЯК

Понятие структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группы было введено А.И. Черемисиным [4]. В предлагаемой работе исследуется разложение дистрибутивной $F\Omega$-группы на лексикографическое σ-произведение и обобщаются некоторые результаты работы [8].

Мы используем обыкновенные обозначения для структурно упорядоченных групп и Ω-группы (см. [1, 6, 9]). Понятие структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группы используется в таком же смысле, как в [5]. Напомним следующие понятия, введёные в [5] и [8]. Пусть G является структурно упорядоченной группой. Символом $P(G)$ будет обозначаться её положительный конус. Два элемента $x, y \in G$ являются дизъюнктными, если $x \wedge y = 0$. Подмножество $A \subset G$ называем дизъюнктным, если любые два элемента являются дизъюнктными и $a > 0$ для каждого $a \in A$. Для $x \in G$, $A \subset G$ будем писать $|x| \wedge A = 0$, если $|x| \wedge |a| = 0$ для каждого $a \in A$. Для $A \subset G$ положим

$$A^{\delta} = \{x \in G : |x| \wedge |a| = 0 \text{ для каждого } a \in A\}.$$

Множества A, $B \subset G$ дизъюнктны, если $A \subset B^{\delta}$. Система $\mathscr{A} = \{A_j\}$ $(j \in J)$ подмножеств G дизъюнктна, если для любого $j(1) \neq j(2)$, $j(1), j(2) \in J$ $A_{j(1)} \subset A^{\delta}_{j(2)}$. $\mathscr{A}$ является максимальной дизъюнктной системой, если $\mathscr{A}$ не является собственным подмножеством ни одной дизъюнктной системы. Для a, $b \in G$, $a \leq b$ положим $[a, b] = \{x \in G:\ a \leq x \leq b\}$. Подмножество $A \subset G$ выпуклое, если $[a, b] \subset A$, когда $a < b$, a, $b \in A$.

Пусть J не пустое множество индексов и для каждого $j \in J$ A_j является l-группой. Прямое произведение $A = \Pi A_j$ $(j \in J)$ является множеством всех таких отображений $f: J \to \cup A_j$, что $f(j) \in A_j$ для каждого $j \in J$; $f(j)$ называется j-той компонентой элемента f. Операции $+$, $\wedge$, $\vee$ в A считаются по компонентам.

Предположим, что M выпуклая l-подгруппа l-группы G, $0 \leq x \in G$. Если существует $y \in G$ такое, что $y = \sup \{m \in M: m \leqslant x\}$, и если элемент y принадлежит M, тогда положим $y = x(M)$ и говорим, что y является проекцией элемента x в l-подгруппу M.

Пусть $\mathscr{A} = \{A_j\}$ $(j \in J)$ — максимальная дизъюнктная система выпуклых l-подгрупп l-группы G. Предположим, что

(i) для каждого $0 \leqslant g \in G$ и каждого $j \in J$ существует проекция $g(A_j)$;

(ii) каждая система $\{u_j\}$ $(j \in J)$, $0 \leqslant u_j \in A_j$ имеет наим. в.г. в G.

Тогда существует изоморфизм φ l-группы G на прямое произведение ΠA_j $(j \in J)$. В таком случае говорят, что l-группа G является прямым произведением своих l-подгрупп A_j, и обозначают её $G = [\Pi A_j]$ $(j \in J)$.

Будем писать $x > A$, $x \in G$, $A \subset G$, если $a \leqslant x$ для каждого $a \in A$. Выпуклую l-подгруппу A l-группы G будем называть p-подгруппой в G, если для каждого $0 \leqslant x \in G$, $x \not> A$ существует $x(A)$. Пусть B является выпуклой l-подгруппой l-группы G и пусть имеет место условие:

Если $X \subset B$ и если $\sup X$ существует в G, то $\sup X \in B$. Тогда B называется замкнутой подгруппой в G. для любого $A \subset G$, A^{δ} является замкнутой подгруппой в G. Замкнутую подгруппу l-группы G, порожденную подмножеством $D \subset G$ будем обозначать $C(D)$. Если $\mathscr{A} = \{A_j\}$ $(j \in J)$ — система подмножеств G, то обозначим также $C(\mathscr{A})$ вместо

$$C\left(\bigcup_{j \in J} A_j\right).$$

Элемент $s \in G$ называется базисным, если $s > 0$ и множество $\{x \in G: 0 < x \leqslant s\}$ является цепью. Подмножество $S \subset G$ является базисом в G, если оно максимальное дизъюнктное подмножество в G и каждое $s \in S$ является базисным элементом.

Говорят, что структурно упорядоченная Ω-группа G является лексикографическим расширением структурно упорядоченной Ω-группы H, (обозначаем $G = \langle H \rangle$), если H является l-идеалом в Ω-группе G, Ω-фактор-группа G/H линейно упорядоченная и для каждого $0 < g \in G \setminus H$ имеет место $g > h$ для всех $h \in H$.

Пусть для каждой l-группы H kH (ядро H) является l-подгруппой l-группы H, порожденной множеством всех элементов x, несравнимых с элементом 0. Тогда kH является l-идеалом, $H = \langle kH \rangle$ и $kH \subset A$, если $H = \langle A \rangle$ (см.[3]).

Пусть l-группа G является прямым произведением своих l-подгрупп A_j. Предположим, что G является одновременно Ω-группой. Пусть для каждого $j \in J$ A_j является Ω-подгруппой в G и для каждого $\omega \in \Omega$, $g_1, g_2, \ldots, g_n \in G$, $1 \leqslant i \leqslant n = n(\omega)$ имеет место

$$(1) \qquad (g_1 g_2 \ldots g_n \omega)(A_j) = g_1(A_j) g_2(A_j) \ldots g_n(A_j) \omega.$$

Тогда говорим, что $l\Omega$-группа G является прямым произведением $l\Omega$-групп A_j.

Следующее определение лексикографического произведения $l\Omega$-подгрупп аналогично с определением лексикографического произведения l-групп, введённого в [8].

Определение 1. *Пусть λ_0 является бесконечным порядковым числом и пусть для каждого $\lambda < \lambda_0$ $\mathcal{S}^\lambda = \{A_i^\lambda\}$ $(i \in I^\lambda)$ является системой ненулевых $l\Omega$-подгрупп в G, которая удовлетворяет следующим условиям:*

(α) *для каждого $\lambda < \lambda_0$ и каждых двух разных элементов $i(1), i(2) \in I^\lambda$ имеет место включение $A_{i(1)}^\lambda \subset (A_{i(2)}^\lambda)^\delta$;*

(β) *если $\lambda < \lambda_0$, $\lambda = \lambda(1) + 1$ и $i \in I^\lambda$, то либо*

$$A_i^\lambda = A_{i(1)}^{\lambda(1)}$$

для некоторого $i(1) \in I^{\lambda(1)}$, либо существует такое подмножество $I \subset I^{\lambda(1)}$, что $\operatorname{card} I > 1$ и существует $l\Omega$-подгруппа A в G, которая является прямым произведением $l\Omega$-групп

$$A_{i(1)}^{\lambda(1)} \ (i(1) \in I),$$

а A_i^λ является собственным лексикографическим расширением подгруппы A (см. [5], определение 8);

(γ) *если $\lambda < \lambda_0$ является лимитным порядковым числом и $i \in I^\lambda$, то существует такая трансфинитная последовательность $\{i(\nu)\}$ $(\nu < \lambda)$, что для каждого $\nu < \lambda$ имеется*

$$i(\nu) \in I^\nu, \quad A_{i(\nu(1))}^{\nu(1)} \subset A_{i(\nu(2))}^{\nu(2)}$$

для каждой пары порядковых чисел $\nu(1), \nu(2)$, удовлетворяющих отношению $\nu(1) \leq \nu(2) < \lambda$ и что A_i^λ является лексикографическим расширением Ω-группы

$$A = C\left(\bigcup_{\nu<\lambda} A_{i(\nu)}^\nu\right);$$

(δ) *$C(\mathcal{S}^\lambda) \subset C(\mathcal{S}^{\lambda'})$ для $\lambda < \lambda' \leq \lambda_0$ и $G = \cup C(\mathcal{S}^\lambda)$ $(\lambda < \lambda_0)$. Тогда G называется лексикографическим произведением $l\Omega$-подгрупп A_i^1 $(i \in I^1)$. G называется лексикографическим σ-произведением $l\Omega$-подгрупп A_i^1 $(i \in I^1)$, если G является лексикографическим произведением этих $l\Omega$-подгрупп и если $\lambda_0 = \omega$.*

Примечание. Можно показать, что из выше приведённого определения 1 вытекает следующее утверждение: Для каждого натурального числа n и для каждого индекса $i \in I^n$ существует такой индекс $i(1) \in I_{n+1}$, что

$$A_i^n \subseteq A_{i(1)}^{n+1}.$$

В дальнейшем предположим, что G структурно упорядоченная дистрибутивная $F\Omega$-группа, удовлетворяющая условию:

($\mathbf{F}_3$) Каждое ограниченное дизъюнктное подмножество в G имеет наим. в.г. в G.

Предположим, что имеется данная система $\mathscr{S}_1$ выпуклых $l\Omega$-подгрупп B_j^1 $(j \in J_1)$ со следующими свойствами:

(a) Каждое B_j^1 является p-подгруппой в G.

(b) Система $\mathscr{S}_1$ является максимальной дизъюнктной.

(c) $(B_j^1)^{\delta\delta} = B_j^1$ для каждого $j \in J_1$.

В этой работе доказывается, что существует выпуклая $l\Omega$-подгруппа X в G, имеющая следующие свойства:

(**A**) X является лексикографическим σ-произведением $l\Omega$-подгрупп системы $\mathscr{S}_1$;

(**B**) если Y является выпуклой $l\Omega$-подгруппой в G и если Y является лексикографическим σ-произведением той же самой системы $\mathscr{S}_1$, то $Y \subset X$.

Прежде всего построим выпуклую $l\Omega$-подгруппу X. Пусть $U(\mathscr{S}_1)$ является множеством всех элементов $x \in G$, которые могут быть представлены в виде

$$x = \vee b_j \quad (j \in J_1), \tag{2}$$

где $0 \leq b_j \in B_j^1$ для всех $j \in J_1$.

Пусть A является множественным объединением всех интервалов $[-x, y]$, причём x, $y \in U(\mathscr{S}_1)$. Согласно [8, утверждение 3.2] A является замкнутой выпуклой l-подгруппой l-группы G, порожденной множеством $\cup B_j^1$ $(j \in J_1)$. Очевидно, $P(A) = U(\mathscr{S}_1)$ и каждое $x \in P(A)$ можно записать в виде (2). В [8, утвержд. 3.3 и 3.4] доказаны следующие два утверждения:

1. *$P(A)$ является множеством всех элементов $x \in P(G)$, для которых имеет место $x \not> B_j^1$ для всех $j \in J_1$.*

Обозначим D множество всех таких элементов $d \in P(G)$, что для каждого $j \in J_1$ или d является дизъюнктным с $P(B_j^1)$, или $d > P(B_j^1)$.

2. *Пусть $a \in P(G) \backslash P(A)$. Тогда элемент a можно представить в виде $a = b + d$, где $b \in P(A)$, $d \in D$ и элемент $d > B_j^1$ тогда и только тогда, когда $a > B_j^1$.*

3. *A является Ω-подгруппой в G.*

Доказательство. Пусть $\omega \in \Omega$, x_1, x_2, ..., $x_n \in A$, $x_i \geq 0$, $1 \leq i \leq n = n(\omega)$. Положим $x_1 x_2 \ldots x_n \omega = x$. Элементы x_i могут быть записаны в виде (2). Могут произойти следующие два случая a) Предположим, что $x \not> B_j^1$ для каждого $j \in J_1$. Согласно условию (a) для каждого $j \in J_1$ существует $x(B_j^1)$ и имеет место $x(B_j^1) \leq x$. Так как система $\{B_j^1\}$ является дизъюнктной и $x(B_j^1) \in B_j^1$, множество $\{x(B_j^1)\}$ $(j \in J_1)$ является дизъюнктным, сверху ограниченным. Согласно условию ($\mathbf{F}_3$) существует в G элемент

$$y = \vee x(B_j^1) \quad (j \in J_1)$$

и имеет место $0 \leqslant y \leqslant x$. Предположим, что $y < x$ и положим $x - y = z$. Тогда $z \leqslant x$, так что $z \not> B_j^1$ для каждого $j \in J_1$.

Подобным рассуждением, как для элемента x, получаем, что для каждого $j \in J_1$ существует проекция $z(B_j^1) \geqslant 0$. Предположим, что для некоторого $j(0) \in J_1$ имеет метсо $z(B_{j(0)}^1) > 0$. Тогда

$$x(B_{j(0)}^1) < z(B_{j(0)}^1) + x(B_{j(0)}^1) \leqslant z + y = x$$

и одновременно

$$z(B_{j(0)}^1) + x(B_{j(0)}^1) \in B_{j(0)}^1,$$

что является противоречием с максимальностью проекции $x(B_{j(0)}^1)$. Поэтому $z(B_j^1) = 0$ для каждого $j \in J_1$. Значит, элемент z является дизъюнктным со всеми множествами B_j^1. Так как $\mathscr{S}_1$ является максимальной дизъюнктной системой, то $z = 0$, и, значит,

$$x = \vee x(B_j^1) \quad (j \in J_1).$$

Этим мы доказали, что $x \in A$. b) Предположим, что для некоторого $j(1) \in J_1$, $x > B_{j(1)}^1$. Достаточно рассмотреть случай $\operatorname{card} J_1 > 1$, потому что в случае $\operatorname{card} J_1 = 1$ $x \in B_{j(0)}^1$. Пусть $\operatorname{card} J_1 > 1$. Элементы x_i можно записать в виде

(3)
$$x_i = b_{j(1)}^i + \bigvee_{j \neq j(1)} b_j^i \quad (j \in J_1).$$

На основании (3) по свойству (b) и согласно [5, лемма 1] для элемента x получаем

$$x = x_1 x_2 \ldots x_n \omega = \Big(b_{j(1)}^1 + \bigvee_{j \neq j(1)} b_j^1\Big)\Big(b_{j(1)}^2 + \bigvee_{j \neq j(1)} b_j^2\Big) \ldots$$

$$\ldots\Big(b_{j(1)}^n + \bigvee_{j \neq j(1)} b_j^n\Big)\omega = b_{j(1)}^1 b_{j(1)}^2 \ldots b_{j(1)}^n \omega +$$

$$+ \Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^1\Big)\Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^2\Big) \ldots \Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^n\Big)\omega.$$

Положим

$$y_1 = b_{j(1)}^1 b_{j(1)}^2 \ldots b_{j(1)}^n \omega,$$

$$y_2 = \Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^1\Big)\Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^2\Big) \ldots \Big(\bigvee_{j \neq j(1)} b_j^n\Big)\omega.$$

Тогда имеет место

(4)
$$x = y_1 + y_2,$$

причём $y_1 \geqslant 0$, $y_2 \geqslant 0$, $y_1 \in B_{j(1)}^1$ и $y_2 \wedge b = 0$ для каждого $b \in P(B_{j(1)}^1)$. Если было бы $y_1=0$, тогда $x=y_2$ и, значит, $x \not> B^1_{j(1)}$, получается противоречие с предположением. Следовательно $y_1>0$. Тогда $y_1<2y_1 \in B^1_{j(1)}$. Так как $x>B^1_{j(1)}$, должно быть $2y_1 \leqslant x$. Тогда согласно (4) существуют элементы z_1, $z_2 \in G$, удовлетворяющие условиям

$$2y_1=z_1+z_2, \quad 0\leqslant z_1 \leqslant y_1,$$
$$0 \leqslant z_2 \leqslant y_2.$$

Поскольку $y_1 \wedge y_2=0$, то и $z_1 \wedge z_2=0$, мы имеем

$$2y_1=z_1+z_2=z_1 \vee z_2.$$

Далее,

$$2y_1=2y_1 \wedge (z_1 \vee z_2)=z_1 \vee 0=z_1,$$

потому что $2y_1 \wedge z_2=0$. Этим получаем

$$2y_1=z_1 \leqslant y_1,$$

что является противоречием. Значит, $x \not> B^1_j$ для каждого $j \in J_1$ и согласно а) элемент x принадлежит A. Согласно [5, лемма 3], получается, что A является Ω-подгруппой в G.

4. *Пусть* $\omega \in \Omega$, $a_1, a_2, \ldots, a_n \in U(\mathscr{S}_1)$, $1 \leqslant i \leqslant n=n(\omega)$. *Тогда для каждого* $j \in J_1$ *имеет место равенство*

$$(a_1a_2\ldots a_n\omega)(B^1_j)=a_1(B^1_j)a_2(B^1_j)\ldots a_n(B^1_j)\omega.$$

Доказательство. Элементы a_i могут быть записаны в виде

$$a_i=\vee b^i_j \quad (j \in J_1), \tag{2'}$$

где $0 \leqslant b^i_j \in B^1_j$ для всех $j \in J_1$. Согласно (а) для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ существует $a_i(B^1_j)$. Очевидно, $b^i_j(B^1_j)=b^i_j$. Тогда из равенства (2′) применением бесконечной дистрибутивности получаем $b^i_j=a_i(B^1_j)$ для каждого $j \in J_1$. Следовательно,

$$a_i(B^1_j)=b^i_j(B^1_j) \tag{5}$$

для каждого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$ и каждого $j \in J_1$.

Значит, ввиду (b), [5, лемма 1], (2′), (3), (5) и согласно [8, утвержд. 2.4] получаем:

$$(a_1a_2\ldots a_n\omega)(B^1_j)=[(\vee b^1_j)(\vee b^2_j)\ldots(\vee b^n_j)\omega](B^1_j)=$$
$$=\left[\left(b^1_j+\bigvee_{k\neq j} b^1_k\right)\left(b^2_j+\bigvee_{k\neq j} b^2_k\right)\ldots\left(b^n_j+\bigvee_{k\neq j} b^n_k\right)\omega\right](B^1_j)=$$
$$=\left[b^1_jb^2_j\ldots b^n_j\omega+\left(\bigvee_{k\neq j} b^1_k\right)\left(\bigvee_{k\neq j} b^2_k\right)\ldots\left(\bigvee_{k\neq j} b^n_k\right)\omega\right](B^1_j)=$$

$$= (b_j^1 b_j^2 \dots b_j^n \omega)(B_j^1) = b_j^1 b_j^2 \dots b_j^n \omega =$$

$$= b_j^1(B_j^1) b_j^2(B_j^1) \dots b_j^n(B_j^1)\omega = a_1(B_j^1) a_2(B_j^1) \dots a_n(B_j^1)\omega .$$

В дистрибутивной Ω-группе справедливо следующее утверждение.

5. *Пусть G является дистрибутивной Ω-группой. Тогда для каждого $\omega \in \Omega$, каждого $i \in \{1, 2, \dots, n\}$ и для каждого $b, a_1, a_2, \dots, a_n \in G$ имеет место:*

1) $a_1 a_2 \dots a_{i-1}(a_i - b) a_{i+1} \dots a_n \omega =$
   $= a_1 a_2 \dots a_n \omega - a_1 a_2 \dots a_{i-1} b a_{i+1} \dots a_n \omega$;
2) $a_1 a_2 \dots a_{i-1} 0 a_{i+1} \dots a_n \omega = 0$;
3) $a_1 a_2 \dots a_{i-1}(-a_i) a_{i+1} \dots a_n \omega = -a_1 a_2 \dots a_n \omega$.

6. *A является прямым произведением $l\Omega$-подгрупп B_j^1 $(j \in J_1)$.*

Доказательство. Согласно [8, теорема 2.6] A является прямым произведением l-групп B_j^1 $(j \in J_1)$. Надо проверить, что для каждого $j \in J_1$ и каждого $\omega \in \Omega$ справедливо равенство

$$(1') \qquad (g_1 g_2 \dots g_n \omega)(B_j^1) = g_1(B_j^1) g_2(B_j^1) \dots g_n(B_n^1)\omega .$$

Пусть $\omega \in \Omega$, $g_1, g_2, \dots, g_n \in A$. Пусть g является любым элементом из G. Если положим $g^+ = g \vee 0$ и $g^- = -(g \wedge 0)$, то $g = g^+ - g^-$. Элемент $g_1 g_2 \dots g_n \omega$ можно представить в виде

$$(6) \qquad g_1 g_2 \dots g_n \omega = (g_1^+ - g_1^-)(g_2^+ - g_2^-) \dots (g_n^+ - g_n^-)\omega .$$

На основании дистрибутивности оператора ω и вследствие утверждения 5 элемент $g_1 g_2 \dots g_n \omega$ равен сумме элементов вида

$$(-1)^k \; g_1^{(\varepsilon_1)} g_2^{(\varepsilon_2)} \dots g_n^{(\varepsilon_n)} \omega ,$$

где $(\varepsilon_i) \in \{+, -\}$ и k-число тех символов (ε_i), которые равны символу $-$. Для каждого элемента $g_i^{(\varepsilon_i)}$ имеет место $0 \leqslant g_i^{(\varepsilon_i)} \in A$; следовательно, $g_i^{(\varepsilon_i)} \in U(\mathcal{S}_1)$. Поэтому $g_i^{(\varepsilon_i)}$ можно записать в виде

$$g_i^{(\varepsilon_i)} = \vee b_j^i \quad (j \in J_1),$$

причём $0 \leqslant b_j^i \in B_j^1$ $(j \in J_1)$. Для каждого $\omega \in \Omega$ и каждого $j \in J_1$ согласно утверждению 4 имеется

$$(7) \qquad (g_1^{(\varepsilon_1)} g_2^{(\varepsilon_2)} \dots g_n^{(\varepsilon_n)} \omega)(B_j^1) = g_1^{(\varepsilon_1)}(B_j^1) g_2^{(\varepsilon_2)}(B_j^1) \dots g_n^{(\varepsilon_n)}(B_j^1)\omega .$$

Ввиду (6), (7) и утверждения 5 левая сторона (1′) равна сумме выражений вида

$$(-1)^k \; g_1^{(\varepsilon_1)}(B_j^1) g_2^{(\varepsilon_2)}(B_j^1) \dots g_n^{(\varepsilon_n)}(B_j^1)\omega .$$

Если преобразуем применением (6) правую сторону (1′), получим

$$g_1(B_j^1)g_2(B_j^1)\dots g_n(B_j^1)\omega=(g_1^+(B_j^1)-g_1^-(B_j^1))(g_2^+(B_j^1)-\\-g_2^-(B_j^1))\dots(g_n^+(B_j^1)-g_n^-(B_j^1))\omega.$$

Опять на основании дистрибутивности оператора ω и вследствие утверждения 5, правая сторона (1′) равна сумме выражений вида

$$(-1)^k\ g_1^{(\varepsilon_1)}(B_j^1)g_2^{(\varepsilon_2)}(B_j^1)\dots g_n^{(\varepsilon_n)}(B_j^1)\omega,$$

где k — число тех символов (ε_i), которые равны символу $-$. Следовательно, имеет место (1′), и поэтому A является прямым произведением $l\Omega$-групп B_j^1.

Пусть $J\subset J_1$, $\mathrm{card}J>1$ и предположим, что удовлетворены условия:

(iii) для каждого $j(1)$, $j(2)\in J$ и каждого $x\in G$ $x>B_{j(1)}^1$ тогда и только тогда, когда $x>B_{j(2)}^1$;

(iv) существует такое $x\in G$, что $x>B_j^1$ для каждого $j\in J$ и x является дизъюнктным с каждым B_k^1 $(k\in J_1\backslash J)$. Если J и J' подмножества J_1, удовлетворяющие (iii), (iv), и $\mathrm{card}J>1$, $\mathrm{card}J'>1$, $J\cap J'\neq\emptyset$, то $J=J'$. Следовательно, каждое $j\in J_1$ принадлежит самое большее к одному подмножеству J с данными свойствами; если такое J существует, обозначим его $\bar j$, а в противном случае положим $\bar j=\{j\}$. Пусть J_2 множество всех $\bar j$, $j\in J_1$. Пусть $\bar j\in J_2$, $\mathrm{card}\bar j>1$.

Обозначим $D'(j)$ множество всех элементов $x\in G$, удовлетворяющих (iv). Если $D'(j)\neq\emptyset$, то, очевидно, $D'(j)$ является замкнутым множеством относительно операции $+$ и является выпуклой подструктурой в G. Положим

$$B_{\bar j}^2=[-d_1,\ d_2],$$

где d_1, $d_2\in D'(j)$. В [8, утвержд. 3.9] доказано утверждение:

7. *Пусть $\bar j\in J_2$, $0\leqslant x\in G$. Если элемент x является дизъюнктным с каждой $l\Omega$-группой B_k^1 для $k\in J_1\backslash\bar j$, то $x\in B_{\bar j}^2$.*

8. *$B_{\bar j}^2$ является Ω-подгруппой в G.*

Доказательство. Ввиду [8, утвержд. 3.5], достаточно проверить, что $B_{\bar j}^2$ является замкнутым множеством относительно операторов $\omega\in\Omega$. Пусть $\omega\in\Omega$, b_1, b_2, ..., $b_n\in P(B_{\bar j}^2)$. Согласно [8, утвержд. 3.8] $\mathcal{S}_2=\{B_{\bar j}^2\}$ $(\bar j\in J_2)$ удовлетворяет условию (b) и поэтому для каждого b_i имеет место

$$b_i\wedge b_k^1=0\quad\text{для всех}\quad k\in J_1\backslash\bar j. \tag{8}$$

Из (8) и определения $F\Omega$-группы вытекает, что

$$b_1b_2\dots b_n\omega\wedge B_k^1=0\quad\text{для всех}\quad k\in J_1\backslash\bar j.$$

Согласно утверждению 7 элемент $b_1b_2\dots b_n\omega$ принадлежит $B_{\bar j}^2$. Далее применением [5], леммы 3, получаем, что $B_{\bar j}^2$ является Ω-подгруппой Ω-группы G.

9. $B_{\bar{j}}^2 = \langle[\Pi B_j^1]\rangle$ $(j \in \bar{j})$ *и* $B_{\bar{j}}^2 \neq [\Pi b_j^1]$ $(j \in \bar{j})$.

Доказательство. Из факта, что система $\mathscr{S}_1$ максимальная дизъюнктная в G и что любое $x \in B_{\bar{j}}^2$ дизъюнктное с $B_{j(1)}^1$ для каждого $j(1) \in J_1 \backslash \bar{j}$, вытекает, что система $\{B_j^1\}$ $(j \in \bar{j})$ является максимальной дизъюнктной в $[\Pi B_j^1]$ $(j \in \bar{j})$. Кроме того, эта система удовлетворяет условиям (a) и (c). Тогда в силу утверждения 3, $[\Pi B_j^1]$ $(j \in \bar{j})$ является Ω-подгруппой в $B_{\bar{j}}^2$, а согласно утверждению 6 является прямым произведением $l\Omega$-подгрупп B_j^1 $(j \in \bar{j})$.

Положим $f(\mathscr{S}_1) = \mathscr{S}_2$. Система выпуклых $l\Omega$-подгрупп $\mathscr{S}_2 = \{B_{\bar{j}}^2\}$ $(\bar{j} \in J_2)$, ввиду [8, утвержд. 3.7, 3.8 и 3.10], удовлетворяет условиям (a), (b), (c); следовательно, можно аналогично конструировать $\mathscr{S}_3 = f(\mathscr{S}_2) = f^2(\mathscr{S}_1)$. Определим индукцией

$$f^n(\mathscr{S}_1) = f[f^{n-1}(\mathscr{S}_1)] \quad \text{для} \quad n > 2.$$

Имеем сконструированные выпуклые $l\Omega$-подгруппы систем $\mathscr{S}_n$. Согласно [8, см. §3] система $\mathscr{S}_n$ удовлетворяет условиям (a), (b), (c) для каждого натурального числа n. Мы показали для системы $\mathscr{S}_1$, что $C(\mathscr{S}_1)$ является Ω-подгруппой (см. 3). Далее, на основании конструкции системы $\mathscr{S}_n$ вытекает, что каждый элемент $0 < x \in C(\mathscr{S}_n)$ может быть записан в виде

$$x = \vee b_j \quad (j \in J_n),$$

где $0 \leq b_j \in B_j^n$ $(j \in J_n)$. Тогда подобным образом, как и в доказательстве утверждения 3, можно показать, что для каждого натурального числа n $C(\mathscr{S}_n)$ является Ω-подгруппой в G. Для каждого натурального числа n положим $B^n = C(\mathscr{S}_n)$. Тогда, очевидно, имеет место

$$B^1 \subset B^2 \subset B^3 \subset \ldots$$

Положим

$$B_0(\mathscr{S}_1) = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^n.$$

Очевидно, $B_0(\mathscr{S}_1)$ является Ω-подгруппой в G. Ввиду [8, утверж. 3.11] и утверждений 3, 6, 8 и 9 справедлива теорема:

Теорема 1. *Пусть* $\mathscr{S}_1 = \{B_j^1\}$ $(j \in J_1)$ *— система выпуклых $l\Omega$-подгрупп структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группы G, удовлетворяющих условиям* (a), (b), (c). *Предположим, что G удовлетворяет условию* ($\mathbf{F}_3$). *Тогда $B_0(\mathscr{S}_1)$ является лексикографическим σ-произведением $l\Omega$-групп системы $\mathscr{S}_1$. В случае, когда множество операторов Ω пусто, утверждение этой теоремы редуцируется на утверждение 3.11 в* [8].

Теперь положим $B_0(\mathscr{S}_1) = X$. Мы покажем, что если Y — выпуклая $l\Omega$-подгруппа в G и если Y является лексикографическим σ-произведением той же самой системы $\mathscr{S}_1$, то $Y \subset X$.

Пусть Y любая выпуклая $l\Omega$-подгруппа в G, которая является лексикографическим σ-произведением системы $\mathscr{S}_1$. В дальнейшем для систем выпуклых $l\Omega$-групп лексикографического σ-произведения X будем применять обозначения, как и выше, т.е. B_j^n $(j \in J_n)$. В случае лексикографического σ-произведения Y $l\Omega$-группы систем $\mathscr{S}_n'$, удовлетворяющие условиям определения 1, мы быдем обозначать A_i^n $(i \in I_n)$.

Для каждой l-группы H, пусть kH — l-подгруппа l-группы H, порожденная множеством всех элементов x, несравнмых с элементом 0.

В следующем утверждении мы будем пользоваться теми же обозначениями, как и выше.

10. *Пусть* $I \subset I_{n-1}$, $J \subset J_{n-1}$, $\operatorname{card} I > 1$, $\operatorname{card} J > 1$. *Предположим, что* A_i^n *и* B_j^n *в* G *являются собственными лексикографическими расширениями прямого произведения* $l\Omega$-*подгрупп* A_r^{n-1} $(r \in I)$ *и* B_s^{n-1} $(s \in J)$. *Пусть для каждого* $r(2) \in I_{n-1}$ *существует такое* $s(2) \in J_{n-1}$, *что*

$$A_{r(2)}^{n-1} \subset B_{s(2)}^{n-1},$$

и пусть

$$0 < x \in B_j^n \backslash kB_j^n, \quad x > A_{r(1)}^{n-1}$$

для некоторого $r(1) \in I$. *Тогда*

$$x > A_{r(2)}^{n-1}$$

для каждого $r(2) \in I$.

Доказательство. Пусть верны предположения утверждения 10 и

$$A_{r(1)}^{n-1} \neq \{0\}.$$

Тогда в силу [3, теорема 3.1] выпуклые $l\Omega$-подгруппы A_i^n и B_j^n являются сравнимыми. Пусть $B_j^n \subset A_i^n$ и существует такое $r(2) \in I$, что

$$x \not> A_{r(2)}^{n-1}.$$

В силу [3, теорема 2.1] kA_i^n и B_j^n сравнимы. Пусть $B_j^n \subset kA_i^n$. Согласно предположению

$$kA_i^n = [A_{r(1)}^{n-1} \times (A_{r(1)}^{n-1})^*],$$

где

$$(A_{r(1)}^{n-1})^*$$

– комплементарный прямой множитель

$$A_{r(1)}^{n-1} \quad \text{в} \quad kA_i^n.$$

Благодаря выпуклости $l\Omega$-подгруппы B_j^n в kA_i^n, имеет место

$$B_j^n = [A_{r(1)}^{n-1} \cap B_j^n) \times ((A_{r(1)}^{n-1})^* \cap B_j^n)].$$

Но

$$A_{r(1)}^{n-1} \cap B_j^n = A_{r(1)}^{n-1} \neq \{0\}$$

и, так как B_j^n — собственное лексикографическое расширение, B_j^n является директно неразложимым, мы получаем

$$(A_{r(1)}^{n-1})^* \cap B_j^n = \{0\}.$$

Поэтому

$$B_j^n = A_{r(1)}^{n-1},$$

что противоречит

$$x > A_{r(1)}^{n-1}.$$

Пусть теперь

$$B_j^n \supset kA_i^n \quad \text{и} \quad A_{r(2)}^{n-1} \neq \{0\}.$$

Согласно предположению для $r(2) \in I$ существует такое $s(2) \in J_{n-1}$, что

$$A_{r(2)}^{n-1} \subset B_{s(2)}^{n-1}.$$

Тогда, либо $s(2) \in J$, либо $s(2) \in J_{n-1} \setminus J$. В первом случае

$$x > B_{s(2)}^{n-1}$$

и то же самое верно для

$$A_{r(2)}^{n-1}$$

– и возникает противоречие. Во втором случае $s(2) \notin J$, и, следовательно,

$$B_j^n \cap B_{s(2)}^{n-1} = \{0\}.$$

Тогда, так как $B_j^n \supset kA_i^n$, мы получаем

$$kA_i^n \cap B_{s(2)}^{n-1} = \{0\},$$

а отсюда в силу отношения

$$B_{s(2)}^{n-1} \supset A_{r(2)}^{n-1}$$

следует, что

$$kA_i^n \cap A_{r(2)}^{n-1} = \{0\},$$

а это является противоречием.

Обратно, предположим, что $B_j^n \supset A_i^n$. Тогда $kB_j^n \supset kA_i^n$. В силу предположения для $r(2) \in I$ существует такое $s(2) \in J_{n-1}$, что

$$A_{r(2)}^{n-1} \subset B_{s(2)}^{n-1}.$$

Тогда либо $s(2) \in J$, либо $s(2) \in J_{n-1} \setminus J$. В первом случае

$$x > A_{r(2)}^{n-1},$$

что является противоречием. Во втором случае, поскольку $s(2) \notin J$, мы получаем

$$B^{n-1}_{s(2)} \cap kB^n_j = \{0\}.$$

Поскольку $kB^n_j \supset kA^n_i$, из предыдущего равенства следует

$$B^{n-1}_{s(2)} \cap kA^n_i = \{0\}$$

а отсюда в силу отношения

$$A^{n-1}_{r(2)} \subset B^{n-1}_{s(2)}$$

получаем

$$A^{n-1}_{r(2)} \cap kA^n_i = \{0\},$$

что явно противоречит включению

$$A^{n-1}_{r(2)} \subset kA^n_i.$$

Это завершает доказательство утверждения 10.

11. *Предположим, что A – выпуклая $l\Omega$-подгруппа в G, которая является собственным лексикографическим расширением. Предположим, что A_1 и A_2 являются прямыми множителями в kA. Пусть $0 < x \in G$. Тогда $x > A_1$ тогда и только тогда, когда $x > A_2$.*

Доказательство. Пусть удовлетворены предположения утверждения 11. Если $x \in A$, то, очевидно, имеет место утверждение 11. Если $x \notin A$, то или $x > A$, или $x \not> A$. В первом случае доказательство очевидно. Во втором случае, согласно [2], лемме 6.2. (iii), можно элемент x представить в виде $x = x_1 + x_2$, причём $x_1 = x(A) \in P(A)$, $0 \leqslant x_2$ и $x_2 \wedge a = 0$ для каждого $a \in P(A)$. Следовательно, одновременно имеет место $x = x_1 \vee x_2$. Из приведённого вытекает, что $x > A_1$ тогда и только тогда, когда $x > A_2$.

Теперь индукцией покажем, что для каждого натурального числа n и для каждого $i \in I_n$ существует такое $j \in J_n$, что справедливо включение

$$A^n_i \subset B^n_j. \tag{9}$$

Пусть $n = 1$ и $i \in I_n$. Тогда $i \in J_1$ и $A^1_i = B^1_i$. Пусть $n > 1$ и предположим, что утверждение верно для $n-1$. Пусть $i \in I_n$, тогда мы имеем два случая:

Случай I. Пусть

$$A^n_i = A^{n-1}_{i(1)}$$

для некоторого $i(1) \in I_{n-1}$. Тогда в силу индукции

$$A^{n-1}_{i(1)} \subset B^{n-1}_{j(1)}$$

для некоторого $j(1) \in J_{n-1}$. Существует $j \in J_n$, для которого справедливо включение

$$B^{n-1}_{j(1)} \subset B^n_j.$$

Следовательно, $A^n_i \subset B^n_j$ для некоторого $j \in J_n$.

Случай II. Пусть существует такое подмножество $I \subset I_{n-1}$, что $\operatorname{card} I > 1$, и $l\Omega$-подгруппа A' в G, которая является прямым произведением $l\Omega$-групп

$$A_{i(1)}^{n-1} \; (i(1) \in I),$$

а A_i^n является собственным лексикографическим расширением $l\Omega$-подгруппы A'. Возьмём фиксированное $i(1) \in I$. По предположению индукции для каждого $i(2) \in I$ существует такое $j(2) \in J_{n-1}$, что верно включение

$$A_{i(2)}^{n-1} \subset B_{j(2)}^{n-1}.$$

Далее, из предыдущей конструкции лексикографического σ-произведения X вытекает, что для индекса $j(1) \in J_{n-1}$, (удовлетворяющего соотношению

$$A_{i(1)}^{n-1} \subset B_{j(1)}^{n-1}),$$

должна возникнуть одна и только одна из следующих двух возможностей:

1) Существует индекс $j \in J_n$ и такая $l\Omega$-подгруппа B' в G, что имеет место $B' \neq B_j^n = \langle B' \rangle$ и B' является прямым произведением $l\Omega$-групп

$$B_{j(2)}^{n-1} \; (j(2) \in J),$$

причём $j(1) \in J \subset J_{n-1}$.

2) Существует такое $j'(1) \in J_n$, что

$$B_{j(1)}^{n-1} = B_{j'(1)}^{n}.$$

Перейдём к случаю 1). В этом случае выпуклые $l\Omega$-подгруппы A_i^n и B_j^n в G являются собственными лексикографическими расширениями, и так как $A_i^n \cap B_i^n \neq \{0\}$, то они взаимно сравнимы ([3, теорема 3.1]). В случае $A_i^n \subset B_i^n$ доказательство тривиально. Предположим, что $B_j^n \subset A_i^n$. Существует $0 < x \in B_j^n \backslash kB_j^n$. Таким образом, $x > kB_j^n$. Согласно конструкции B_j^n, $l\Omega$-группа

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

является прямым множителем kB_j^n, следовательно,

$$x > B_{j(1)}^{n-1}.$$

В силу индукции

$$x > A_{i(1)}^{n-1}$$

и согласно утвержд. 10

$$x > A_{i(2)}^{n-1}$$

для каждого $i(2) \in I$; таким образом, $x > kA_i^n$. Так как $l\Omega$-группа B_j^n выпуклая в G, то $kA_i^n \subset B_j^n$. Отсюда на основании соотношения $kkA_i^n = kA_i^n$ мы получаем $kA_i^n \subset kB_j^n$. С другой стороны, из $B_j^n \subset A_i^n$ вытекает $kB_j^n \subset kA_i^n$. В общем получаем $kB_j^n = kA_i^n$.

Пусть теперь $0<t\in A_i^n\backslash kA_i^n$. Предположим, что

$$j(3)\in J_{n-1}\backslash J,\quad 0<u\in B_{j(3)}^{n-1},\quad u\leq t.$$

Тогда либо $u\in kA_i^n$, либо $u>kA_i^n$. Первый случай не может возникнуть, так как $l\Omega$-группа $kA_i^n=kB_j^n$ является прямым произведением $l\Omega$-групп

$$B_{j(2)}^{n-1}\ (j(2)\in J),$$

и каждая из них дизъюнктна с

$$B_{j(3)}^{n-1}.$$

Во втором случае

$$u>B_{j(2)}^{n-1},$$

что является противоречием. Поэтому t дизъюнктно со всеми $l\Omega$-группами

$$B_{j(3)}^{n-1}\quad \text{для}\quad j(3)\in J_{n-1}\backslash J.$$

Из этого вытекает, что элемент t принадлежит $(B_j^n)^{\delta\delta}=B_j^n$. Мы доказали, что $A_i^n\subset B_j^n$. Тем самым доказательство в случае 1) укончено.

Далее рассмотрим случай 2). В этом случае для $j(1)$ существует такое $j'(1)\in J_n$, что

$$\{0\}\neq B_{j(1)}^{n-1}=B_{j'(1)}^n.$$

Для

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

могут возникнуть две возможности:

a)

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

является собственным лексикографическим расширением,

b)

$$B_{j(1)}^{n-1}=B_{i(r)}^1$$

для некоторого $i(r)\in J_1$.

Теперь перейдем к рассмотрению случая a). Пусть

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

является собственным лексикографическим расширением. Очевидно,

$$A_i^n\cap B_{j(1)}^{n-1}\neq\{0\}$$

и, следовательно, $l\Omega$-подгруппы

$$A_i^n\quad \text{и}\quad B_{j(1)}^{n-1},$$

согласно [3, теорема 3.1], сравнимы. Предположим, что

$$B^{n-1}_{j(1)} \subset A^n_i.$$

В силу [3, теорема 2.1] kA^n_i можно сравнить с

$$B^{n-1}_{j(1)}.$$

a₁) Предположим, что

$$B^{n-1}_{j(1)} \supset kA^n_i.$$

Если $j(1) \neq j(2) \in J_{n-1}$ и

$$0 < b \in B^{n-1}_{j(2)},$$

то b не принадлежит A^n_i, так как b дизъюнктно с

$$B^{n-1}_{j(1)}.$$

Поэтому $l\Omega$-группа A^n_i дизъюнктна с

$$B^{n-1}_{j(2)}$$

для каждого $j(2) \in J_{n-1}$, $j(2) \neq j(1)$. Из этого вытекает

$$A^n_i \subset (B^{n-1}_{j(1)})^{\delta\delta}.$$

Так как, согласно (c),

$$(B^{n-1}_{j(1)})^{\delta\delta} = B^{n-1}_{j(1)},$$

получаем

$$B^{n-1}_{j(1)} = A^n_i,$$

следовательно, $A^n_i = B^n_{j'(1)}$.

a₂) Далее исследуем случай, когда

$$B^{n-1}_{j(1)}$$

является собственным подмножеством kA^n_i. В силу предположения мы имеем

$$kA^n_i = [A^{n-1}_{i(1)} \times (A^{n-1}_{i(1)})^*],$$

где

$$(A^{n-1}_{i(1)})^*$$

является комплементарным прямым множителем

$$A^{n-1}_{i(1)} \quad \text{в} \quad kA^n_i.$$

Так как

$$B^{n-1}_{j(1)}$$

является выпуклой $l\Omega$-подгруппой в kA^n_i, имеет место

$$B^{n-1}_{j(1)} = [(A^{n-1}_{i(1)} \cap B^{n-1}_{j(1)}) \times (A^{n-1}_{i(1)})^* \cap B^{n-1}_{j(1)})].$$

Но

$$A_{i(1)}^{n-1} \cap B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1} \neq \{0\},$$

и поскольку

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

является собственным лексикографическим расширением,

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

директно неразложимо, мы получаем

$$(A_{i(1)}^{n-1})^* \cap B_{j(1)}^{n-1} = \{0\};$$

поэтому

$$B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1}.$$

Кроме того,

$$kA_i^n \neq A_{i(1)}^{n-1},$$

а тогда существует такое $i(2) \in I$, что $i(2) \neq i(1)$ и

$$A_{i(2)}^{n-1}$$

является прямым множителем kA_i^n. По предположению индукции существует такое $j(2) \in J_{n-1}$, что

$$A_{i(2)}^{n-1} \subset B_{j(2)}^{n-1}.$$

Для каждого $j \in J_{n-1}$ обозначим символом j' такой индекс из множества J_n, для которого верно включение

$$B_j^{n-1} \subset B_{j'}^n.$$

Если

$$B_{j'(2)}^n \neq B_{j(2)}^{n-1},$$

то, поскольку

$$A_{i(2)}^{n-1}$$

является прямым множителем kA_i^n, согласно части II. 1) этого доказательства удовлетворено включение $A_i^n \subset B_{j'(2)}^n$. Следовательно, имеет место

$$B_{j'(1)}^n = B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1} \subset A_i^n \subset B_{j'(2)}^n. \tag{10}$$

Из соотношения $B_{j'(1)}^n \subset B_{j'(2)}^n$ вытекает $B_{j'(1)}^n = B_{j'(2)}^n$. В силу (10) мы имеем

$$B_{j'(2)}^n = B_{j(1)}^{n-1},$$

следовательно, $j(2) = j(1)$. Выше было приведено соотношение

$$A_{i(2)}^{n-1} \subset B_{j(2)}^{n-1},$$

значит,

$$A_{i(2)}^{n-1} \subset B_{j(1)}^{n-1}.$$

Так как

$$B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1},$$

мы получаем

$$A_{i(2)}^{n-1} \subset A_{i(1)}^{n-1}.$$

Из этого следует

$$A_{i(2)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1},$$

итак, $i(2) = i(1)$, что является противоречием.

В случае, когда

$$B_{j(2)}^{n-1}$$

является собственным лексикографическим расширением, подобным способом, как мы получили равенство

$$B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1},$$

получаем равенство

$$B_{j(2)}^{n-1} = A_{i(2)}^{n-1}.$$

Если

$$B_{j(2)}^{n-1} = B_{i(r)}^{1}$$

для некоторого $i(r) \in J_1$, тогда, очевидно,

$$B_{j(2)}^{n-1} = A_{i(2)}^{n-1}.$$

В силу предположения существует $0 < u \in A_i^n \backslash kA_i^n$. Очевидно,

$$u > B_{j(1)}^{n-1} \quad \text{и} \quad u > B_{j(2)}^{n-1}.$$

Пусть теперь $J \subset J_{n-1}$ — множество всех таких индексов $j_{(3)} \in J_{n-1}$, что

$$B_{j(3)}^{n-1} = A_{i(3)}^{n-1}$$

для некоторого $i(3) \in I_{n-1}$, где

$$A_{i(3)}^{n-1}$$

– прямой множитель kA_i^n. В силу утверждения 11 существует индекс $j'(3) \in J_n$, $\operatorname{card} j'(3) > 1$, и $l\Omega$-подгруппа $B_{j'(3)}^n$, которая является собственным лексикографическим расширением прямого произведения $l\Omega$-подгрупп

$$B_{j(3)}^{n-1} \quad \text{для} \quad j(3) \in J' \subset J_{n-1}, \quad J \subset J'$$

и, следовательно, возникает противоречие. Доказательство в случае a) окончено.

Остается проверить случай b). Пусть

$$B_{j(1)}^{n-1}$$

не является собственным лексикографическим расширением, тогда существует такой индекс $i(r) \in J_1$, что верно включение

$$A^{n-1}_{i(1)} \subset B^{n-1}_{j(1)} = B^1_{i(r)} = A^1_{i(r)},$$

а отсюда вытекает, что

$$B^{n-1}_{j(1)} = A^{n-1}_{i(1)}.$$

Так как, согласно предположению,

$$kA^n_i \neq A^{n-1}_{i(1)},$$

то существует такое $i(2) \in I$, что

$$i(2) \neq i(1) \quad \text{и} \quad A^{n-1}_{i(2)}$$

является прямым множителем kA^n_i. В силу индукции существует такое $j(2) \in J_{n-1}$, что

$$A^{n-1}_{i(2)} \subset B^{n-1}_{j(2)}.$$

Теперь, кроме исследуемой $l\Omega$-группы

$$B^{n-1}_{j(1)},$$

обратим внимание и на $l\Omega$-группу

$$B^{n-1}_{j(2)}.$$

Но опять

$$B^{n-1}_{j(2)}$$

является либо собственным лексикографическим расширением, либо существует такое $i(s) \in J_1$, что

$$B^{n-1}_{j(2)} = B^1_{i(s)}.$$

Далее $l\Omega$-группу

$$B^{n-1}_{j(2)}$$

рассматриваем согласно $l\Omega$-группе

$$B^{n-1}_{j(1)},$$

в части II. 2) a) этого доказательства.

b₁) В случае, если

$$B^{n-1}_{j(2)} \supset kA^n_i,$$

получаем

$$B^{n-1}_{j(2)} = A^n_i.$$

Выше было приведено соотношение

$$B_{j(1)}^{n-1} = A_{i(1)}^{n-1}$$

и, следовательно,

$$B_{j(1)}^{n-1} \subset A_i^n = B_{j(2)}^{n-1}.$$

Из этого вытекает

$$B_{j(1)}^{n-1} = B_{j(2)}^{n-1},$$

а отсюда имеем

$$A_{i(1)}^{n-1} = A_i^n,$$

что является противоречием с предположением.

b_2) В случае, когда

$$B_{j(2)}^{n-1}$$

является собственным подмножеством kA_i^n, или

$$B_{j(2)}^{n-1}$$

равно $B_{i(s)}^1$ для некоторого $i(s) \in J_1$, мы поступаем согласно части II. 2) a) последнего обзаца этого доказательства.

Мы доказали, что соотношение (9) имеет место для каждого натурального числа n.

На основании предыдущего результата получаем

$$A^n = C(\mathscr{S}_n') \subset C(\mathscr{S}_n) = B^n,$$

а отсюда

$$\bigcup_{n=1}^{\infty} A^n = Y \subset X = \bigcup_{n=1}^{\infty} B^n.$$

Этим мы доказали теорему.

Теорема 2. *Пусть система* $\mathscr{S}_1 = \{B_j^1\}$ $(j \in J_1)$ *выпуклых* $l\Omega$*-подгрупп структурно упорядоченной* $F\Omega$*-группы* G *удовлетворяет условиям* (a), (b) *и* (c). *Предположим, что* G *удовлетворяет условию* (**F**$_3$). *Пусть* Y *является выпуклой* $l\Omega$*-подгруппой в* G*, которая является лексикографическим* σ*-произведением системы* $\mathscr{S}_1$. *Тогда* $Y \subset X$.

Пример: Пусть $\mathscr{S}_1$ является системой выпуклых $l\Omega$-подгрупп B_j^1 $(j \in J_1)$ структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группы G, удовлетворяющих условиям (a), (b), (c). Тогда выше приведённые выпуклые $l\Omega$-подгруппы $A = C(\cup B_j^1)$ $(j \in J_1)$ и $B_0(\mathscr{S}_1)$ $l\Omega$-группы G удовлетворяют условиям (A) и (B). (Для того чтобы были удовлетворены условия определения 1, в случае $l\Omega$-подгруппы A достаточно положить $B_j^1 = B_j^n$ для каждого натурального числа n.)

Пусть теперь $S = \{s_j\}(j \in J_1)$ является базисом в G. Пусть для каждого $j \in J_1$ $B_j^1 = \{s_j\}^{\delta\delta}$. Тогда, очевидно, имеют место условия (b) и (c). Кроме того, каждая B_j^1 является линейно упорядоченной (см. [7]), следовательно, B_j^1 является собственным лексикографическим расширением, и тогда B_j^1 является p-подгруппой в G. Согласно [5, лемма 11], каждая B_j^1 является Ω-подгруппой в G. Пусть $\mathscr{S}_1$ является системой всех B_j^1; тогда в G существует $l\Omega$-подгруппа $B_0(\mathscr{S}_1)$.

Теорема 3. *Пусть G является структурно упорядоченной дистрибутивной $F\Omega$-группой с базисом $\{s_j\}$ $(j \in J_1)$ и $\mathscr{S}_1 = \{\{s_j\}^{\delta\delta}\}$ $(j \in J_1)$. Предположим, что G удовлетворяет условию* ($\mathbf{F}_3$). *Тогда $l\Omega$-группа $B_0(\mathscr{S}_1)$ является наибольшей выпуклой $l\Omega$-подгруппой в G, которую можно представить в виде лексикографического σ-произведения $l\Omega$-групп системы $\mathscr{S}_1$. (В случае $\Omega = \emptyset$ мы получаем утверждение 4.6 из [8].)*

ЛИТЕРАТУРА

[1] BIRKHOFF, G.: Lattice theory. Third Edition, Second Printing, 1973.

[2] CONRAD, P.: Some structure theorems for lattice-ordered groups. Trans. Amer. math. Soc., 99, 1961, 1—29.

[3] CONRAD, P.: Lex-subgroups of lattice ordered groups. Czechoslov. Math. j., 18 (93), 1968, 56—103.

[4] ЧЕРЕМИСИН, А. И.: Дистрибутивные $F\Omega$-группы с конечным числом носителей. Сибирск. мат. ж., 9, 1968, 177–187.

[5] ДРЕВЕНЯК, О.: Структурно упорядоченные дистрибутивные Ω-группы с базисом. Mat. Čas., 25, 1975, 11—21.

[6] ФУКС, Л.: Частично упорядоченные алгебраические системы. Москва 1965.

[7] ЯКУБИК, Я.: Прямые разложения частично упорядоченных групп II. Czechoslov. Math. J., 11 (86), 1961, 490—515.

[8] JAKUBÍK, J., DREVEŇÁK, O.: Lattice ordered groups with a basis. Math. Nachr., 53, 1972, 217—236.

[9] KUROŠ, A. G.: Kapitoly z obecné algebry. Praha 1968.

Поступило 14. 10. 1977

Katedra matematiky
Strojnícka fakulta VŠT
Švermova 9
041 87 Košice